Feuille d'Exercices 1

1 Champs de tangentes et dessins de solutions

Exercice 1.1.— Le dessin de gauche de la figure 1 représente le champ de tangentes de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2}y$.

1. Sur le dessin, esquisser l'allure du graphe de la solution pour la condition initiale $y(0) = 1$.

2. Même question pour la condition initiale $y(3) = 2$.

Exercice 1.2.— On considère l'équation différentielle $y' = y - x$, dont le champ de tangentes est représenté sur le dessin de droite de la figure 1.

1. Trouver sur le dessin une droite qui est le graphe d'une solution (utiliser une règle !). Proposer une formule pour cette solution.

2. Vérifier analytiquement que la formule proposée est bien solution.

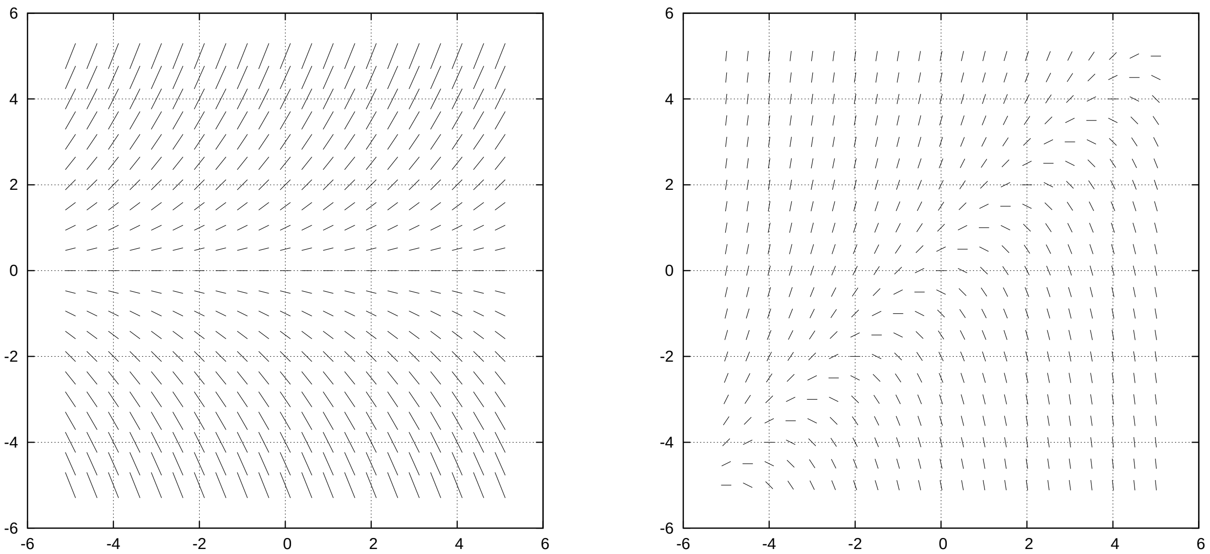

FIGURE 1 –

Exercice 1.3.—

1. La figure 2 représente cinq dessins de champs de tangentes. Pour chacun, déterminez les lieux où la pente est positive, négative, nulle, non définie. Tracez à la main quelques solutions de l'équation différentielle correspondante.

2. La figure 2 représente les champs de tangentes des cinq équations différentielles suivantes, dans le désordre : (1) $y' = x$ (2) $y' = \sqrt{y}$ (3) $y' = 2$ (4) $y' = \frac{y}{x}$ (5) $y' = -\frac{x}{y}$. Faites correspondre les équations aux champs de tangentes, en expliquant vos choix.

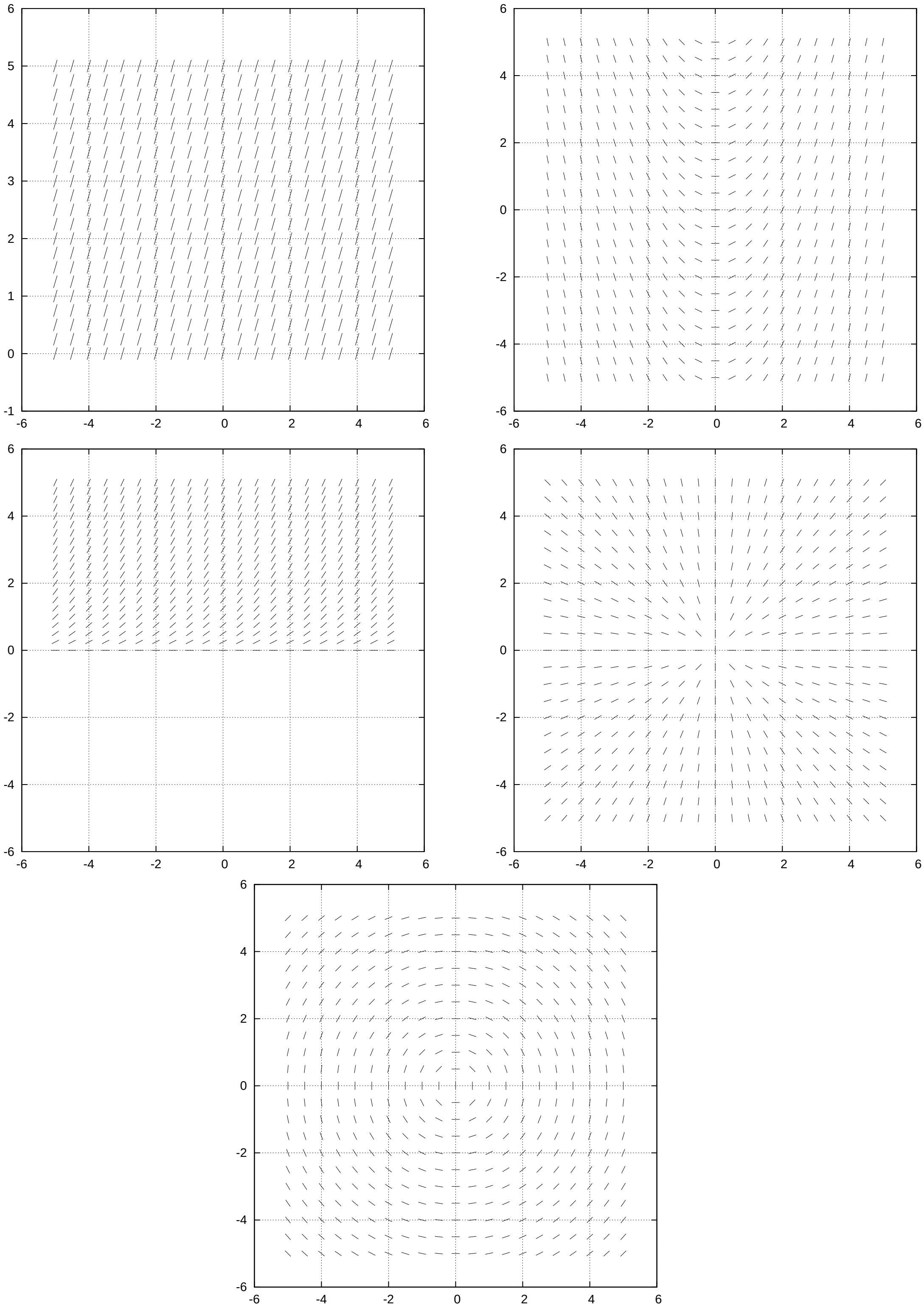

FIGURE 2 –

Exercice 1.4.— On considère l'équation différentielle $y' = -xy$. On voudrait esquisser l'allure du champ de tangentes de l'équation.

1. Quelle est la formule donnant la pente $\varphi(x, y)$ du champ de tangentes en un point (x, y) ?

2. Tracer le champ de tangentes aux points $(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)$. Trouver une fonction simple solution de l'équation différentielle.

3. Tracer de même le champ de tangentes en quelques points de l'axe (Oy).

4. Quel est le signe de la pente du champ de tangentes en un point (x, y) avec $x > 0$ et $y > 0$? Tracer le champ aux points $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$.

5. Tracer de même le champ en quelques points (x, y) avec $x < 0$ et $y > 0$.

6. Esquisser l'allure de la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$.

Exercice 1.5.— On considère l'équation différentielle $y' = 2x-y$. On voudrait esquisser l'allure du champ de tangentes de l'équation.

1. Quel est l'ensemble des points du plan où la tangente est horizontale ? Trouver de même les points où la tangente est de pente négative, puis ceux où la pente est positive.

2. Trouver l'ensemble des points où la pente vaut 2. En déduire une courbe solution. Vérifier par le calcul.

3. Quelle est la pente au point $(0, 2)$? Tracer l'allure du graphe d'une solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 2$.

4. Tracer l'allure du champ de tangentes.

5. Vérifier que pour toute constante C, les fonctions $f(x) = C \exp(-x)+2(x-1)$ sont solutions de l'équation.

Exercice 1.6.— On considère l'équation différentielle $y' = y^2$.

1. Esquisser le champ de tangentes de l'équation (en quels points la pente vaut-elle 0 ? 1 ? 4 ?).

2. Dessiner l'allure de quelques solutions. Pour chaque solution, dire quel semble être son ensemble de définition.

3. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{C-x}$, où C est une constante, est solution de l'équation. Quel est son ensemble de définition ?

4. À l'aide du dessin, trouver une solution qui n'est pas donnée par la question précédente.

Exercice 1.7.— On considère l'équation différentielle $y' = y^2 - 1$.

1. Esquisser le champ de tangentes de l'équation (en quels points la pente vaut-elle 0 ? 3 ? -1 ? $-3/4$?).

2. Dessiner l'allure de quelques solutions. Pour chaque solution, dire quel semble être son ensemble de définition.

3. Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1-Ce^{2x}}{1+Ce^{2x}}$, où C est une constante, est solution de l'équation. Quel est son ensemble de définition ?

4. À l'aide du dessin, trouver une solution qui n'est pas donnée par la question précédente.

2 Méthode d'Euler

Exercice 1.8.— On considère l'équation différentielle $y' = -y$. On se donne pour condition initiale $y(0) = 1$.

1. Tracer le graphe de la solution approchée obtenue par la méthode d'Euler, pour un pas d'intégration $\Delta x = 2$ sur l'intervalle $[0, 8]$ *(remarque : pour avoir un dessin lisible, utiliser une échelle plus grande sur l'axe des ordonnées que sur l'axe des abscisses).*

2. Même question pour un pas d'intégration $\Delta x = 1$, puis $\Delta x = 1/2$.

3 Intervalles de vie

Exercice 1.9.— Vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$ avec condition initiale $y(0) = 1$. Quel est son intervalle de vie ? Tracer rapidement son graphe.

Exercice 1.10.— Soit $f : x \mapsto \tan(x)$.

1. Calculer la dérivée f', et exprimer f' à l'aide de f.

2. En déduire une équation différentielle dont f est une solution.

3. La fonction f vérifie la condition initiale $f(0) = 0$; quel est l'intervalle de vie correspondant ?

4. Même question avec la condition initiale $f(\pi) = 0$.

4 Utilisation de l'unicité des solutions

Exercice 1.11.— On considère l'équation différentielle $y' = -xy$.

1. Montrer que la fonction nulle $f_0 : x \mapsto 0$ est solution.

2. Soit f_1 l'unique solution maximale vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$, et $I =]a, b[$ son intervalle de vie. Montrer que f_1 est strictement positive sur I.

3. Montrer que f_1 est croissante sur $]a, 0]$ et décroissante sur $[0, b[$.

Exercice 1.12.— On considère l'équation différentielle $y' = y^3$.

1. Soit f la solution maximale vérifiant $f(0) = 1$. En vous inspirant du raisonnement de l'exercice précédent, montrer que f est strictement croissante sur son intervalle de vie I.

2. De même, donner le sens de variation de la solution maximale pour la condition initiale $y(0) = -1$.