Feuille d'Exercices 4

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 4.1.— Ou considère l'équation différentielle linéaire homogène $y' - ay = 0$, où $a \in \mathbb{R}$ est une constante.

1. Résoudre cette équation en séparant les variables.

2. Vérifier que l'ensemble des solution est de la forme $\{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour une certaine fonction g qui ne s'annule jamais (à déterminer).

Exercice 4.2.— On considère résoudre l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $y' - y = e^{2x}$.

1. Résolution de l'équation homogène

Écrire l'équation homogène associée, puis la résoudre.

2. Recherche d'une solution particulière

Chercher **une** solution particulière de l'équation différentielle $y' - y = e^{2x}$ sous la forme d'une fonction $x \mapsto \lambda(x)g(x)$ où :

- g est la solution de l'équation homogène trouvée à la question précédente,
- et λ est une **fonction inconnue** à trouver.

Autrement dit, dans l'équation initiale, on fait le "changement de fonction inconnue" $y = \lambda g$ (où y est l'ancienne fonction inconnue, et λ la nouvelle).

3. Résolution de l'équation

On note f_0 la fonction solution particulière trouvée à la question précédente.

a) Montrer que toutes les fonctions $f_0 + \lambda g$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, sont aussi des solutions de l'équation différentielle $y' - y = e^{2x}$.

b) A-t-on trouvé toutes les solutions ?

Exercice 4.3.— Résoudre les équations ci-dessous. À chaque fois, on esquissera le champs de tangentes et on tracera quelques solutions. Préciser les intervalles de résolution quand c'est nécessaire.

1. $y' - \frac{y}{x} = 1 + 2x$.
2. $y' + \frac{2}{x}y = x^4$.
3. $y' + 2xy = 2x$.
4. $y' - y = x$. *Indication : pour calculer une primitive d'une fonction de la forme xe^{ax}, faire une intégration par parties.*
5. $y' = y \tan x + \sin x$, sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Correction partielle. Avec la variation de la constante, voici ce qu'on trouve.
1) $y_H = \lambda x$, $\lambda' = \frac{1}{x} + 2$. 2) $y_H = 1/x^2$, $\lambda' = x^2$. 3) $y_H = \lambda e^{-x^2}$, $\lambda' = 2xe^{x^2}$. 4) $y_H = \lambda e^x$, $\lambda' = xe^{-x}$. 5) $y_H = \frac{\lambda}{\cos x}$, $\lambda' = \cos(x)\sin(x)$ s'intègre grâce à la primitive de $u'u$ ou avec $\cos(x)\sin(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

* **Exercice 4.4.**— On voudrait résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) \end{cases} \qquad \text{avec la condition initiale} \qquad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

1. On pose $u = x - y$ et $v = 3x - y$. Calculer $u'(t)$ et $v'(t)$ en fonction de x et y, puis en fonction de u et v. En déduire que u et v sont solutions d'équations différentielles linéaires d'ordre 1, et résoudre ces équations différentielles.

2. En déduire les solutions (x, y) du système d'équations différentielles, puis la solution vérifiant la condition initiale.

Correction. On a : $u' = -2u$ et $v' = 2v$. On en déduit que les solutions u et v sont de la forme $u(t) = C_1 e^{-2t}$ et $v(t) = C_2 e^{2t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & x - y \\ v & = & 3x + y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{4}(u + v) \\ y & = & \frac{1}{4}(v - 3u) \end{array} \right.$$

Donc les solutions du système différentiel sont les couples de fonctions (x, y) de la forme

$$x(t) = D_1 e^{-2t} + D_2 e^{2t},\ y(t) = -3D_1 e^{-2t} + 3_2 e^{2t},\ D_1, D_2 \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $x(0) = 2$ et $y(0) = -2$ et est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} D_1 & + & D_2 & = & 2 \\ -3D_1 & + & D_2 & = & -2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} D_1 & = & 1 \\ D_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Conclusion : il y a une unique solution, donnée par

$$x(t) = e^{-2t} + e^{2t},\ y(t) = -3e^{-2t} + e^{2t}.$$

Exercice 4.5.— On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) \qquad y' - (1 - \tan(x))y = \cos(x).$$

On s'intéresse à cette équation sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. Champ de tangentes de l'équation homogène

Dans cette partie, on considère l'équation homogène associée à l'équation (E), toujours sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a) Écrire l'équation homogène.

b) Déterminer, et indiquer sur un dessin,

– l'ensemble des points où le champ de tangentes est horizontal ;

– l'ensemble des points où sa pente est positive ;

– l'ensemble des points où sa pente est négative.

c) Esquisser rapidement l'allure du champ de tangentes, et l'allure du graphe de quelques solutions.

2. Résolution de l'équation homogène

Résoudre l'équation homogène sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Tester les solutions obtenues.

3. Dessin des solutions de l'équation homogène

a) Quelle est la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$? On la note g_0. Donner le tableau de variations de g_0 sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (on pourra utiliser la question 1). Déterminer les limites aux bornes de l'intervalle. Tracer le graphe de g_0.

b) Tracer sur le même dessin, rapidement, les graphes des trois solutions vérifiant respectivement $y(0) = 2$, $y(0) = 3$, $y(0) = -1$.

4. Résolution de l'équation (E)

Résoudre complètement l'équation (E). Tester une solution particulière.

* **5. Variante :** Résoudre de même, sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E_2) \qquad y' - (1 - \tan(x))y = \cos^2(x).$$

Indication : on pourra calculer la primitive en utilisant l'exponentielle complexe [1]*, ou des intégrations par parties.*

6. Question subsidiaire.

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$?

$$y' - (1 - \tan(x))y = \cos(x) + \cos^2(x).$$

On peut traiter cette question sans avoir fait la question 5. Dans ce cas, on considèrera connue une solution particulière f_1 de l'équation différentielle (E_2).

1. On peut dériver une fonction à valeurs complexes en dérivant sa partie réelle et sa partie imaginaire : si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, x \mapsto f(x) = f_r(x) + if_i(x)$ avec $f_r(x), f_i(x) \in \mathbb{R}$, la dérivée de f est $f' = f_r' + if_i'$. Pour l'exponentielle complexe, on a encore la formule suivante : si $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $(e^{\alpha x})' = \alpha e^{\alpha x}$.
On rappelle les formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$.