Feuille d'Exercices 4

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

** **Exercice 4.6.—** On considère l'équation différentielle suivante sur $]0,+\infty[$:

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2.$$

1. Déterminer $a \in]0,+\infty[$ tel que $f_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. Montrer que le changement de fonction inconnue : $y(x) = f_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \qquad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1.$$

3. Résoudre (E_1) sur $]0,+\infty[$.
4. Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$.
Correction. Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2. \tag{E}$$

1. *Trouvons $a \in]0,\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière. Puisque*

$$y_0'(x) - \frac{y_0(x)}{x} - y_0(x)^2 = -a^2x^2,$$

y_0 est solution si et seulement si $a = \pm 3$. On choisit $a = 3$.

2. *Si z est une fonction $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas, on pose $y(x) = 3x - 1/z(x)$. Alors y est solution si et seulement si*

$$\frac{z'(x)}{z(x)^2} + \frac{1}{xz(x)} - \frac{1}{z(x)^2} + \frac{6x}{z(x)} = 0.$$

En multipliant par $z(x)^2$, on obtient que y est solution de (E) *ssi z vérifie*

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1. \tag{E$_1$}$$

3. *On résout* (E_1) *sur $]0,\infty[$. Une primitive de $x \mapsto 6x + 1/x$ est $x \mapsto 3x^2 + \ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto A\exp(-3x^2 - \ln(x))$. On cherche une solution particulière de* (E_1) *sous la forme $z_p(x) = \alpha(x)\exp(-3x^2 - \ln(x))$; alors z_p est solution si $\alpha'(x)\exp(-3x^2 - \ln(x)) = 1$, c'est-à-dire si $\alpha'(x) = x\exp(3x^2)$, par exemple si $\alpha(x) = \exp(3x^2)/6$. Les solutions de* (E_1) *sont donc les*

$$z(x) = \frac{1 + A\exp(-3x^2)}{6x}, \qquad \textit{avec } A \in \mathbb{R}.$$

4. *On va maintenant en déduire les solutions de* (E) *définies sur* $]0,\infty[$.

   Soit y *une solution* $\mathcal{C}^1$ *définie sur* $]0,\infty[$. *On suppose dans un premier temps que* $y(x) > 3x$ *sur l'intervalle ouvert* $I \subset]0,\infty[$, *pris aussi grand que possible. Alors* $y(x) = 3x - 1/z_I(x)$ *pour une certaine fonction* $z_I < 0$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I. *D'après la question précédente, on a nécessairement* $z_I(x) = [1 + A_I \exp(-3x^2)]/6x$ *pour une certaine constante* $A_I \in \mathbb{R}$. *Puisque* $z_I < 0$, *cela impose* $A_I < 0$, *mais du coup* $I \neq]0,+\infty[$ *car* $1 > A_I \exp(-3x^2)$ *si* x *est assez grand.*

   Dans tous les cas, il existe donc un intervalle ouvert J *tel que* $y(x) < 3x$ *sur* J. *On suppose encore que* J *est aussi grand que possible. Sur* J, $y(x) = 3x - 1/z_J(x)$ *pour une certaine fonction* $z_J > 0$ *qui est* $\mathcal{C}^1$ *sur* J. *Encore d'après la question précédente,* $z_J(x) = [1+A_J \exp(-3x^2)]/6x$ *pour une certaine constante* A_J. *Puisque l'intervalle ouvert* $J =]a,b[$ *a été supposé maximal, et puisque* y *est supposée définie sur* $]0,+\infty[$, *si* $a > 0$ *on a* $y(a) = 3a$ *et de même si* $b < \infty$, $y(b) = 3b$, *car sinon par continuité de* y *on aurait encore* $y(x) < 3x$ *sur* $]a-\epsilon, b+\epsilon[$ *pour un petit* $\epsilon > 0$. *Cela n'est possible respectivement que si* $z_J(x) \to +\infty$ *lorsque* $x \to a$ *ou* $z_J(x) \to +\infty$ *lorsque* $x \to b$. *Or on a dit que* $z_J = [1 + A_J \exp(-3x^2)]/6x$, *cela n'est donc pas possible du tout (sauf précisément si respectivement* $a = 0$ *et* $b = 0$*).*

   Donc soit $y(x) = 3x$ *sur* $]0,+\infty[$, *soit* $y(x) < 3x$ *sur* $]0,+\infty[$. *Dans ce dernier cas,* $z(x) = 1/(3x - y(x))$ *est définie sur* $]0,+\infty[$ *et s'écrit* $z(x) = [1 + A\exp(-3x^2)]/6x$. *Puisque* $z > 0$, *nécessairement* $A \geq -1$. *Donc si* y *est solution, alors*

   $$y(x) = 3x \qquad \text{ou} \qquad y(x) = 3x - \frac{6x}{1 + A\exp(-3x^2)} \quad \text{avec } A \geq -1.$$

   Réciproquement, si y *est ainsi définie, alors* y *est définie et* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0,\infty[$, *et on peut vérifier que c'est bien une solution.*