Corrigé de quelques exercices de la feuille d'exercices 5

Exercice 9. a. Il est facile de voir que:

$$v_4 = \frac{1}{2}v_2. \tag{1}$$

Il reste à déterminer si la famille (v_1, v_2, v_3) est libre. On se donne 3 réels λ, μ et ν. On a:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0 \iff \begin{cases} \lambda + 4\mu + 2\nu = 0 \\ 2\lambda + 4\mu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

On remarque que l'on peut éliminer la deuxième ligne qui est exactement le double de la quatrième. En utilisant la variable λ comme pivot, on obtient:

$$\lambda v_1 + \mu v_2 + \nu v_3 = 0 \iff \begin{array}{l} (L_4) \\ (L_1) - (L_4) \\ (L_3) \end{array} \begin{cases} \lambda + 2\mu = 0 \\ 2\mu + 2\nu = 0 \\ \mu + \nu = 0 \end{cases}$$

La deuxième ligne est le double de la troisième. On obtient donc seulement deux équations indépendantes pour 3 inconnues. Choisissons μ comme variable secondaire. Le système est équivalent à:

$$\lambda = -2\mu, \quad \nu = -\mu.$$

En fixant par exemple $\mu = 1$, on obtient la relation de dépendance:

$$v_3 = -2v_1 + v_2. \tag{2}$$

Enfin, les deux vecteurs v_1 et v_2 n'étant pas colinéaires, la famille (v_1, v_2) est libre, et donc, d'après les relations (1) et (2), $\mathcal{F}$ est de rang 2.

b. D'après la question précédente, F est de dimension 2, et engendré par la famille libre (qui est donc une base de F), $\mathcal{F}' = (v_1, v_2)$.

c. Soit $\mathcal{B}$ la famille $\big(v_1, v_2, (1,0,0,0), (0,1,0,0)\big)$. On suppose que pour 4 réels λ, μ, ν, ρ:

$$\lambda(1,2,0,1) + \mu(4,4,1,2) + \nu(1,0,0,0) + \rho(0,1,0,0) = 0.$$

Soit:

$$\begin{cases} \lambda + 4\mu + \nu = 0 \\ 2\lambda + 4\mu + \rho = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes impliquent facilement $\lambda = \mu = 0$ dont on déduit avec les deux premières $\nu = \rho = 0$. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre, et puisqu'elle a 4 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, de dimension 4, c'est une base de cet espace.

d. Notons:

$$G = \operatorname{Vect}\big\{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\big\} = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ z = t = 0\big\}.$$

D'après la question précédente, on a:

$$F + G = \mathbb{R}^4.$$

De plus $\dim F+\dim G = 4$. Donc $\dim(F\cap G) = \dim F+\dim G-\dim(F+G) = 0$. En d'autres termes, $F\cap G=\{0\}$, ce qui achève de montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10. a. On considère la base canonique de E formée des matrices:

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\ E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\ E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Pour montrer que $\mathcal{F}$ engendre E, il suffit de montrer que chacun des E_{ij} est un élément de $F=Vect(\mathcal{F})$. On voit tout de suite:

$$E_{11}=\frac{1}{3}(2A_4-A_3),\quad E_{21}=\frac{1}{3}(A_4+A_3).$$

donc E_{11} et E_{21} sont dans F. De plus, $E_{22}=A_5-E_{11}$, et c'est donc également un élément de F (une combinaison linéaire d'éléments de F est dans F). Enfin, par le même raisonnement:

$$E_{12}=A_2-E_{21}-2E_{22}\in F.$$

b. La famille (A_1,A_2,A_4) est de rang 2 car on a la relation:

$$A_4=A_1-2A_2.$$

c. D'après les questions **a** et **b**, (A_1,A_2,A_3,A_5) engendre E. C'est une famille génératrice de cardinal 4, dans l'espace vectoriel E de dimension 4, donc une base de E.

d. D'après le **c**:

$$\underbrace{\text{Vect}\,\{A_1,A_2\}}_{\text{de dim.2}}+\underbrace{\text{Vect}\,\{A_3,A_5\}}_{\text{de dim.2}}=E.$$

Puisque $\dim E=4$, il est facile d'en déduire, en raisonnant sur les dimensions comme dans le **d** de l'exercice 9:

$$\text{Vect}\,\{A_1,A_2\}\oplus\text{Vect}\,\{A_3,A_5\}=E$$

Exercice 11. a. On a la relation $u+w=v$. Le rang de la famille (u,v,w) est donc égal au rang de (u,w), qui vaut 2, ces deux vecteurs n'étant pas colinéaires. L'espace vectoriel G est de dimension 2 et (u,w)[1] forme une base de G.

L'espace G est un sous-espace vectoriel de dimension 2 dans un espace de dimension 4. Il est donc déterminé par 2 équations cartésiennes indépendantes. Pour trouver ces équations, on part d'un système d'équations paramétriques de G donné par la base (u,w). Soit $(x,y,z,t)\in G$. Il existe alors 2 paramètres réels λ et μ tels que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x&=&\lambda&+&3\mu\\ y&=&-\lambda&+&\mu\\ z&=&2\lambda&-&\mu\\ t&=&-2\lambda&-&3\mu\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}\\(L_1)+(L_2)\\(L_3)-2(L_1)\\(L_4)+2(L_1)\end{array}\left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda&+&3\mu&=&x&&\\ &&4\mu&=&x&+&y\\ &&-7\mu&=&z&-&2x\\ &&3\mu&=&t&+&2x\end{array}\right.$$

En écrivant l'égalité entre les valeurs de μ données par les trois dernières lignes, on obtient:

$$\text{(S)}\qquad\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4z&&&-&x&+&7y=0\\ &&4t&+&5x&-&3y=0.\end{array}\right.$$

[1] On aurait tout aussi bien pu choisir (u,v) ou (v,w)

Le système (S) formé de 2 équations indépendantes, est vérifié par les coordonnées de tous les vecteurs de G, qui est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^4$. C'est donc un système d'équation cartésienne de G.

b. L'espace vectoriel H est déterminé par 3 équations indépendantes (on peut écrire le système donné comme un système échelonné), dans un espace vectoriel de dimension 4. Donc:

$$\dim H = 4 - 3 = 1.$$

Une base de H est formée d'un seul vecteur non nul de H, que l'on peut choisir en donnant la valeur 1 à une variable secondaire du système, par exemple t, puis en déterminant les autres coordonnées avec les équations $x = y = x - y + z + 2t = 0$. On obtient le vecteur:

$$h = (0, 0, -2, 1).$$

On en déduit un système d'équations paramétriques de H:

$$\begin{cases} x = 0, & y = 0, \\ z = -2\lambda, & t = \lambda, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c. Les coordonnées de h ne vérifient pas les équations cartésiennes (S), donc $h \notin G$. Puisque $H = \operatorname{Vect} h$, on a:

$$G \cap H = \{0\}.$$

L'espace vectoriel $G \cap H$ est de dimension 0 (et a pour base l'ensemble vide).

On a: $\dim (G + H) = \dim G + \dim H - \dim (G \cap H) = 3$. De plus, d'après les questions **a** et **b**:

$$G + H = \operatorname{Vect}(u, w, h),$$

dont on déduit que (u, w, h) est une base de $G + H$.

d. Soit f un élément de E qui n'est pas dans $G + H$, et $F = \operatorname{Vect} f$. On a:

$$\begin{aligned} (G + H) \cap F &= \{0\} \\ \dim \big((G + H) + F\big) &= \underbrace{\dim (G + H)}_{3} + \underbrace{\dim F}_{1} - \underbrace{\dim (G + H) \cap F}_{0} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Et donc:

$$(G + H) \oplus F = \mathbb{R}^4.$$

Il suffit donc de trouver un vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui n'est pas dans $G + H$. Le vecteur $f = (1, 0, 0, 0)$ convient (ce que l'on peut vérifier en montrant que la famille (u, w, h, f) est libre).