Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S2SM
2003-2004

Mathématiques
Correction de la feuille d'exercices 6

Exercice 1 (a) On a $f_1(2(1,1)) = f_1(2,2) = 4$ et $2f_1(1,1) = 2$, donc $f_1(2(1,1)) \neq 2f_1(1,1)$: l'application f_1 n'est pas linéaire.

(b) Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_2(x_1 + \lambda x_2) = (0, 2(x_1 + \lambda x_2)) = (0, 2x_1) + \lambda(0, 2x_2)$ donc $f_2(x_1 + \lambda x_2) = f_2(x_1) + \lambda f_2(x_2)$. L'application f_2 est donc linéaire.
On a $f_2(x) = (0,0) \Rightarrow (0, 2x) = (0,0) \Rightarrow x = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f_2) = \{0\}$. On a $\mathrm{Im}(f_2) = \mathbb{R}(0,1)$. L'application f_2 est injective, mais pas surjective.
On a $f_2(1) = (0,2)$, la matrice de f_2 dans les bases canoniques est donc $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) On a $f_3(i) = -i \neq i = if_3(1)$: l'application f_3 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

(d) Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $f_4(z_1 + \lambda z_2) = \overline{z_1 + \lambda z_2} = \overline{z}_1 + \overline{\lambda}\overline{z}_2$. Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda} = \lambda$. On a donc $f_4(z_1 + \lambda z_2) = f_4(z_1) + \lambda f_4(z_2)$. L'application f_4 est donc linéaire.
On a $f_4(f_4(z)) = z$: l'application f_4 est donc bijective, et donc $\mathrm{Ker}(f_4) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(f_4) = \mathbb{C}$.
La base canonique de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$ est $(1, i)$. On a $f_4(1) = 1$ et $f_4(i) = -i$, la matrice de f_4 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(e) On a $f_5(0,0) = 1 \neq 0$: l'application f_5 n'est pas linéaire.

(f) Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2)$, donc $f_6\big((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)\big) = \big(\frac{x_1 + \lambda x_2 + y_1 + \lambda y_2}{2}, \frac{x_1 + \lambda x_2 - y_1 + \lambda y_2}{2}\big) = \big(\frac{x_1 + y_1 + \lambda(x_2 + y_2)}{2}, \frac{x_1 - y_1 + \lambda(x_2 - y_2)}{2}\big)$ et donc $f_6\big((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)\big) = \big(\frac{x_1 + y_1}{2} + \lambda\frac{x_2 + y_2}{2}, \frac{x_1 - y_1}{2} + \lambda\frac{x_2 - y_2}{2}\big) = f_6(x_1, y_1) + \lambda f_6(x_2, y_2)$. L'application f_6 est donc linéaire.
Si $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f_6)$, on a $x + y = 0$ et $x - y = 0$, donc $x = y = 0$, *i.e.* $\mathrm{Ker}(f_6) = \{0\}$ et l'application f_6 est injective.
Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_6(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = (\alpha, \beta)$: l'application f_6 est surjective et $\mathrm{Im}(f_6) = \mathbb{R}^2$.
On a $f_6(1,0) = \big(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big)$ et $f_6(0,1) = \big(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\big)$. La matrice de f_6 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(g) Un calcul analogue à celui du (f) montre que f_7 est linéaire. On a $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f_7)$ si et seulement si $x = -y$ et $z = 3y$ *i.e.* si et seulement si $(x, y, z) = (-y, y, 3y)$. On a donc $\mathrm{Ker}(f_7) = \mathbb{R}(-1, 1, 3)$. En particulier, l'application f_7 n'est pas injective.
Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_7(\alpha, 0, \beta - \alpha) = (\alpha, \beta)$: l'application f_7 est surjective et $\mathrm{Im}(f_7) = \mathbb{R}^2$.
On a $f_7(1,0,0) = (1,1)$, $f_7(0,1,0) = (1,-2)$ et $f_7(0,0,1) = (0,1)$. La matrice de f_7 dans la base canonique est donc $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(h) Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q'$. L'application f_8 est donc linéaire.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on a $f_8(P) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + na_n X^{n-1}$. On a donc $f_8(P) = P' = 0$ si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ *i.e.* si et seulement si $P \in \mathbb{R}$ (polynôme contant). On a donc $\mathrm{Ker}(f_8) = \mathbb{R}$ et f_8 n'est pas injective. Comme $f_8(P) = a_1 + 2a_2 X + \cdots + na_n X^{n-1}$, on a $\mathrm{Im}(f_8) \subseteq \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Si $Q = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $f_8\big(b_0 X + \frac{b_1}{2} X^2 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n} X^n\big) = Q$ et $Q \in \mathrm{Im}(f_8)$: on a $\mathrm{Im}(f_8) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et f_8 n'est pas surjective.
La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\big(1, X, ..., X^n\big)$. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $f_8(X^i) = iX^{i-1}$. La matrice de f_8 dans la base canonique est donc
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $X(P + \lambda Q) = XP + \lambda XQ$. L'application f_9 est donc linéaire.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, on a $f_9(P) = a_0 X + a_1 X^2 + \cdots + a_n X^{n+1}$. On a donc $f_9(P) = 0$ si et seulement si $a_0 = \cdots = a_n = 0$ *i.e.* si et seulement si $P = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(f_9) = \{0\}$ et f_9 est injective.
Comme $f_9(P) = a_0 X + a_1 X^2 + \cdots + a_n X^{n+1}$ on a $\mathrm{Im}(f_9) = \{Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X],\ Q(0) = 0\}$, en particulier f_9

n'est pas surjective.
Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on a $f_9(X^i) = X^{i+1}$. La matrice de f_9 dans la base canonique est donc

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Remarque : cette matrice a $n+1$ lignes et n colonnes.

Exercice 2 (a) On a $2f(1,-1) = (4,6) \neq (3,2) = f(2,-2) = f(2(1,1))$: il n'existe aucune application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(2,-2) = (3,2)$.

(b) La famille $\{(1,-1),(1,1)\}$ est libre, il existe donc une application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(1,1) = (3,2)$ (comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, la famille $\big((1,-1),(1,1)\big)$ est même une base : il en existe en fait une seule).

(c) Toute application linéaire f vérifiant $f(1,-1) = (2,3)$ (c'est le cas de l'application définie par (b)) vérifie aussi $f(3,-3) = 3f(1,-1) = (6,9)$. Il existe donc une application linéaire f telle que $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(3,-3) = (6,9)$ (il y en a en fait une infinité, autant que de choix possibles pour $f(1,1)$ par exemple).

Exercice 3 L'ensemble F des applications de classe C^∞ est stable par dérivation, addition et multiplication. Si $f \in F$, on a $f' \in F$. Comme $x \mapsto 2x$ appartient à F, on a bien $D(f) \in F$. On peut donc parler de l'application $D\colon F \to F$.
Montrons qu'elle est linéaire : soient $f, g \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $D(f+\lambda g)(x) = (f+\lambda g)'(x) - 2x(f+\lambda g)(x) = f'(x) + \lambda g'(x) - 2x(f(x) + \lambda g(x)) = f'(x) - 2xf(x) + \lambda\big(g'(x) - 2xg(x)\big)$ soit $D(f+\lambda g)(x) = D(f)(x) + \lambda D(g)(x)$. Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $D(f+\lambda g) = D(f) + \lambda D(g)$ et D est linéaire.
Soit $f \in \operatorname{Ker}(D)$, on a $f'(x) - 2xf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f est l'application $x \mapsto \lambda e^{x^2}$. Le sous-espace $\operatorname{Ker}(D)$ de F est donc la droite engendrée par la fonction $x \mapsto e^{x^2}$.
Calcul de $\operatorname{Im}(D)$: on cherche quelles sont les fonctions $g \in F$ telles qu'il existe $f \in F$ avec $D(f) = g$ *i.e.* $f'(x) - 2xf(x) = g(x)$. Pour résoudre cette équation différentielle, on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche f sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{x^2}$. L'équation se réécrit $\lambda'(x)e^{x^2} = g(x)$ soit $\lambda'(x) = g(x)e^{-x^2}$. Or pour tout $g \in F$, cette équation a des solutions dans F (par exemple $\lambda_0\colon x \mapsto \int_0^x g(t)e^{-t^2}\,dt$, qui est bien une fonction de classe C^∞ car g l'est). On a donc $\operatorname{Im}(D) = F$ et D est surjective.

Remarque : si φ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension *finie*, il résulte du théorème noyau-image qu'on a l'implication φ surjectif $\Rightarrow$ φ injectif. Ici on peut avoir D surjectif et pas injectif parce que F est dimension infinie.

Exercice 4 (a) Comme f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie, pour prouver que f est bijective, il suffit de montrer qu'elle est injective (cela résulte du théorème noyau-image) *i.e.* que son noyau est nul. Mais comme on nous demande de calculer f^{-1}, on ne procède pas ainsi : on va résoudre l'équation

$$(*) \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z).$$

Cette équation équivaut au système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 2\alpha & & +\gamma & = & z & (L3) \end{cases}.$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} \alpha & +\beta & +\gamma & = & x & (L1) \\ 2\alpha & +\beta & & = & y & (L2) \\ 3\alpha & & & = & -x+y+z & (L2)+(L3)-(L1) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3\alpha & & & = -x+y+z \\ & 3\beta & & = 2x+y-2z \\ & & 3\gamma & = 2x-2y+z \end{cases}.$$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'équation $(*)$ admet une unique solution : l'application f est bijective. Par ailleurs, on a $f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$.

(b) Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme f est bijective, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow f^{-1}(v) \in F$. Comme $f^{-1}(v) = f^{-1}(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z)$, on a $v \in f(F) \Leftrightarrow (-x+y+z, 2x+y-2z, 2x-2y+z) \in F \Leftrightarrow 2(-x+y+z)+(2x+y-2z)+(2x-2y+z) = 0$ soit $v \in f(F) \Leftrightarrow 2x+y+z = 0$. Le sous-espace $f(F)$ admet donc $2x + y + z = 0$ pour équation cartésienne (on a donc $f(F) = F$).

Exercice 5 (a) On a $f(1, 0, 0) = (1, 2, 2)$, $f(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ et $f(0, 0, 1) = (-2, -2, -3)$. La matrice de f dans la base canonique est donc

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) On a $f(u_1) = f(1, 1, 1) = (1, 1, 1) = u_1$, $f(u_2) = f(-1, 1, 0) = (1, -1, 0) = -u_2$ et $f(u_3) = f(1, 0, 1) = (-1, 0, -1) = -u_3$. La matrice de f dans la base $\mathfrak{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est donc

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Interprétation géométrique : l'application f laisse tout vecteur de $\mathrm{Vect}(u_1)$ invariant et transforme les vecteurs de $\mathrm{Vect}\{u_2, u_3\}$ en leur opposé, c'est donc la symétrie par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(u_1)$ parallèlement au plan $\mathrm{Vect}\{u_2, u_3\}$.

(c) D'après la formule de changement de base, on peut prendre pour P la matrice de changement de base de la base canonique à $\mathfrak{B}'$. Elle s'écrit

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6 (a) Comme la famille $\mathfrak{U}$ a trois éléments et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que $\mathfrak{U}$ est génératrice (remarque : il suffit aussi de montrer qu'elle est libre, en résolvant un système). Posons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ (de sorte que $\mathfrak{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$). On a $e_2 = u_2 - u_3 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$, d'où $e_3 = u_1 - u_2 - e_2 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ et $e_1 = u_2 - e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$. On a donc $\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathrm{Vect}(\mathfrak{U})$ d'où $\mathrm{Vect}(\mathfrak{U}) = \mathbb{R}^3$ et $\mathfrak{U}$ est génératrice.

De même, il suffit de montrer que $\mathfrak{V}$ est génératrice. Posons $e'_1 = (1, 0)$ et $e'_2 = (0, 1)$ (de sorte que $\mathfrak{B}_2 = (e'_1, e'_2)$). On a $e'_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ et $e'_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$ donc $\{e'_1, e'_2\} \subset \mathrm{Vect}(\mathfrak{V})$ et $\mathfrak{V}$ est génératrice.

(b) (i) Rappelons que $\mathfrak{B}_3 = (e_1, e_2, e_3)$. On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (-1, 1)$, $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, 2)$ et $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (0, 1)$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{B}_2$ s'écrit donc

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Rappelons que $\mathfrak{B}_2 = (e'_1, e'_2)$. On a $e'_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ et $e'_2 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, donc $f(e_1) = (-1, 1) = -e'_1 + e'_2 = -v_2$. De même, on a $f(e_2) = (1, 2) = e'_1 + 2e'_2 = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$ et $f(e_3) = (0, 1) = e'_2 = \frac{1}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$ s'écrit donc

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Remarque : notons Q la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}_2$ à $\mathfrak{V}$ (elle s'écrit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$). Alors on a $B = Q^{-1}A$.

(iii) Les coordonnées de $f(x, y, z)$ dans la base $\mathfrak{V}$ sont données par le produit $B.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ (où B est la matrice de f dans les bases $\mathfrak{B}_3$ et $\mathfrak{V}$ calculée dans la question précédente). On applique ceci à u_1, u_2 et u_3, on trouve $f(u_1) = \frac{5}{2}v_1 - \frac{5}{2}v_2$, $f(u_2) = \frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{2}v_2$ et $f(u_3) = -v_1 - v_2$. La matrice de f dans les bases $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ s'écrit donc

$$C = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

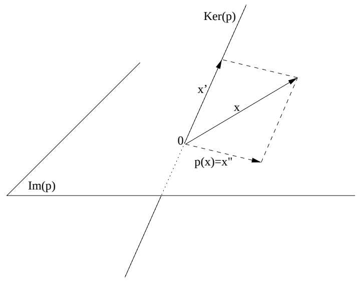
Remarques :

- On peut calculer $f(u_1) = (0, 5)$, $f(u_2) = (-1, 2)$ et $f(u_3) = (-2, 0)$ dans la base canonique et calculer leurs coordonnées dans la base $\mathfrak{V}$ comme dans la question précédente, mais c'est plus long.

- Notons P la matrice de changement de base de $\mathfrak{B}_3$ à $\mathfrak{U}$ (elle s'écrit $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$). Alors on a $C = BP$, c'est d'ailleurs précisément le calcul qu'on a fait pour calculer C.

Exercice 7 (a) Soit $x \in E$, on a $p\big(x - p(x)\big) = p(x) - p(p(x)) = (p - p^2)(x) = 0$ vu que $p^2 = p$. On a donc $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$.
Si $x \in E$, on a $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ d'après ce qui précède et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$. On a donc $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

(b) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Comme $x \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$. Par ailleurs, on a $x \in \mathrm{Ker}(p)$, donc $p(x) = 0$, soit $p(p(y)) = 0$. Comme $p^2 = p$, on a $p(p(y)) = p(y) = x$, d'où $x = 0$. On a donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$. Comme on sait, d'après la question précédente, que $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$ on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.



Soit $x \in E$. Comme $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$, on peut écrire, de façon *unique*, $x = x' + x''$ avec $x' \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x'' \in \mathrm{Im}(p)$. Comme $x' \in \mathrm{Ker}(p)$, on a $p(x') = 0$. Comme $x'' \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x'' = p(y)$. On a alors $p(x'') = p(p(y)) = p(y) = x''$ (car $p^2 = p$). On a donc $p(x) = p(x') + p(x'') = x''$. L'application p associe au vecteur x sa composante x'' dans $\mathrm{Im}(p)$: c'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 8 (a) Notons A la matrice $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ de f. La matrice de f^2 dans la base canonique est A^2.
On a $A^2 = A$, donc $f^2 = f$. L'endomorphisme f est donc la projection de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.
On a $(x, y, z) \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $(\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3)\ f(\alpha, \beta, \gamma) = (x, y, z)$. Cela équivaut à

$$
\begin{aligned}
& (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \left\{\begin{array}{llll} 5\alpha & -2\beta & +\gamma & = 6x \quad (L1) \\ -2\alpha & +2\beta & +2\gamma & = 6y \quad (L2) \\ \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 6z \quad (L3) \end{array}\right. \\
\iff & (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z \quad (L3) \\ & 6\beta & +12\gamma & = & 6y + 12z \quad (L2) + 2(L3) \\ & -12\beta & -24\gamma & = & 6x - 30z \quad (L1) - 5(L3) \end{array}\right. \\
\iff & (\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3) \quad \left\{\begin{array}{lllll} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = & 6z \\ & \beta & +2\gamma & = & y + 2z \\ & & 0 & = & 6x + 12y - 6z \end{array}\right. \\
\iff & x + 2y - z = 0.
\end{aligned}
$$

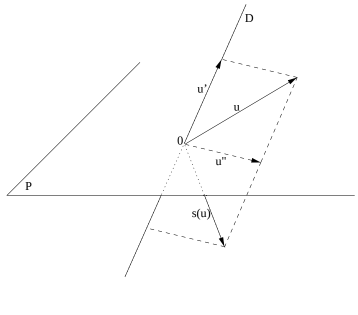
On a donc $\mathrm{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$.
D'après le calcul qui précède, on a $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si

$$
\left\{\begin{array}{llll} \alpha & +2\beta & +5\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} \alpha & & +\gamma & = 0 \\ & \beta & +2\gamma & = 0 \end{array}\right.
\iff (\alpha, \beta, \gamma) = (-\gamma, -2\gamma, \gamma) = -\gamma(1, 2, -1).
$$

On a donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\{(1, 2, -1)\}$.
L'endomorphisme f est donc la projection sur le plan d'équation $x + 2y - z = 0$ parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $(1, 2, -1)$.

(b) Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$ parallèlement à la droite D engendrée par le vecteur $v_0 = (1, 2, -2)$, et B sa matrice dans la base canonique.

Le plan P et la droite D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ (parce que $v_0 \notin P$) : tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de façon unique $u = u' + u''$ avec $u' \in D$ et $u'' \in P$. On a alors $s(u) = -u' + u''$. L'endomorphisme s est donc caractérisé par les deux propriétés suivantes : $s(u) + u = 2u'' \in P$ et $u - s(u) = 2u' \in D$. On a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $s(u) = u + \lambda v_0$ et $s(u) + u = 2u + \lambda v_0 \in P$. Si $u = (x, y, z)$, on a $2u + \lambda v_0 = (2x + \lambda, 2y + 2\lambda, 2z - 2\lambda)$ et donc $2x + \lambda + 2y + 2\lambda + 2z - 2\lambda = 0$, soit $\lambda = -2(x + y + z)$. On a donc $s(u) = u - 2(x + y + z)v_0$. En particulier, on a $s(1, 0, 0) = (-1, -4, 4)$, $s(0, 1, 0) = (-2, -3, 4)$ et $s(0, 0, 1) = (-2, -4, 5)$. On a donc



$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9 Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f_\alpha)$ si et seulement si

$$(S_\alpha) \quad \begin{cases} x & +\alpha y & & +(\alpha-1)t & = 0 & (L1) \\ & -y & +z & +\alpha t & = 0 & (L2) \\ x & & +\alpha z & +t & = 0 & (L3) \end{cases}$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S_\alpha) \iff \begin{cases} x & +\alpha y & & +(\alpha-1)t & = 0 & (L1) \\ & -y & +z & +\alpha t & = 0 & (L2) \\ & & & (\alpha^2+\alpha-2)t & = 0 & (L1)+\alpha(L2)-(L3) \end{cases}.$$

On a $\alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha - 1)(\alpha + 2)$.

<u>Premier cas</u> : $\alpha \notin \{-2, 1\}$. On a $\alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0$ donc

$$\begin{aligned} (S_\alpha) \quad &\iff \begin{cases} x & +\alpha y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & & t & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & +\alpha z & & = 0 \\ y & -z & & = 0 \\ & & t & = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On a donc $(x, y, z, t) = (-\alpha z, z, z, 0) = z(-\alpha, 1, 1, 0)$, soit $\operatorname{Ker}(f_\alpha) = \operatorname{Vect}\{(-\alpha, 1, 1, 0)\}$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_α, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_\alpha)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f_\alpha)) = 3$. On a donc $\operatorname{Im}(f_\alpha) = \mathbb{R}^3$ et f_α est de rang 3.

<u>Deuxième cas</u> : $\alpha = -2$. On a

$$(S_{-2}) \iff \begin{cases} x & -2y & & -3t & = 0 \\ & y & -z & +2t & = 0 \end{cases}.$$

On a donc $(x, y, z, t) = (2y + 3t, y, y + 2t, t) = y(2, 1, 1, 0) + t(3, 0, 2, 1)$: la famille $\big((2, 1, 1, 0), (3, 0, 2, 1)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f_{-2})$. En particulier, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f_{-2})) = 2$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_{-2}, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_{-2})) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f_{-2})) = 2$: f_{-2} est de rang 2. Les deux premières colonnes de la matrice de f_{-2} sont linéairement indépendantes : la famille $\big((1, 0, 1), (2, 1, 0)\big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f_{-2})$.

<u>Troisième cas</u> : $\alpha = 1$. On a

$$(S_1) \iff \begin{cases} x & +y & & & = 0 \\ & y & -z & -t & = 0 \end{cases}.$$

On a donc $(x, y, z, t) = (-y, y, y - t, t) = y(-1, 1, 1, 0) + t(0, 0, -1, 1)$: la famille $\big((-1, 1, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\big)$ est une base de $\operatorname{Ker}(f_1)$. En particulier, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f_1)) = 2$. D'après le théorème noyau-image appliqué à f_1, on a $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f_1)) = 4 - \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f_1)) = 2$: f_1 est de rang 2. Les deux premières colonnes de la matrice de f_1 sont linéairement indépendantes : la famille $\big((1, 0, 1), (1, -1, 0)\big)$ est une base de $\operatorname{Im}(f_1)$.

Exercice 10 (a) Soit $x \in \operatorname{Im}(u)$: il existe $y \in V$ tel que $x = u(y)$. On a donc $u(x) = u^2(y) = 0$ (vu que $u^2 = 0$) *i.e.* $x \in \operatorname{Ker}(u)$. On a donc $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$.

D'après le théorème noyau-image appliqué à u, on a $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(u))$. Comme $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$, on a $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Im}(u)) \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u))$. On a donc $3 = \dim_{\mathbb{K}}(V) \leq 2\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u))$ *i.e.* $\frac{3}{2} \leq \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) \leq 3$ soit $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) \in \{2, 3\}$. Comme $u \neq 0$, on a $\operatorname{Ker}(u) \neq V$ donc $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) \neq 3$. On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) = 2$.

(b) L'énoncé demande de montrer qu'il existe une base (v_1, v_2, v_3) de V telle que $u(v_1) = v_2$, $u(v_2) = u(v_3) = 0$. Il suffit pour cela de choisir $v_1 \in V$ tel que $u(v_1) \neq 0$ (c'est possible vu que $u \neq 0$) et de poser $v_2 = u(v_1)$. D'après la question (a), on a $v_2 \in \operatorname{Ker}(u)$. Comme $v_2 \neq 0$ et $\dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u)) = 2$, on peut compléter la famille libre $\{v_2\}$ de $\operatorname{Ker}(u)$ en une base (v_2, v_3) de $\operatorname{Ker}(u)$. Par construction, on a $u(v_3) = 0$.

Il reste à montrer que la famille $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3)$ ainsi construite est une base. Comme V est de dimension 3, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$. En appliquant u, on tire $\lambda_1 u(v_1) = 0$ (car $u(v_2) = u(v_3) = 0$). Comme $u(v_1) \neq 0$, on a $\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. Comme (v_2, v_3) est une base de $\operatorname{Ker}(u)$, on a $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et la famille $\mathcal{V}$ est bien une base de V.

Exercice 11 Soient $(e_1, f_1), (e_2, f_2) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $(e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2) = (e_1 + \lambda e_2, f_1 + \lambda f_2)$ donc $\psi\big((e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2)\big) = \big(e_1 + \lambda e_2\big) - \big(f_1 + \lambda f_2\big) = e_1 - f_1 + \lambda(e_2 - f_2)$ soit $\psi\big((e_1, f_1) + \lambda(e_2, f_2)\big) = \psi(e_1, f_1) + \lambda\psi(e_2, f_2)$: l'application ψ est bien linéaire.

L'image de ψ est composée des éléments de V qui peuvent s'écrire comme la somme d'un élément de E et d'un élément de F. On a donc $\mathrm{Im}(\psi) = E + F$.

Soit $(e, f) \in \mathrm{Ker}(\psi)$. On a $e - f = 0$ *i.e.* $e = f$. Comme $e \in E$ et $f \in F$, on a $e \in E \cap F$ et donc $(e, f) = (e, e) \in \{(x, x),\ x \in E \cap F\}$. Réciproquement, si $x \in E \cap F$, on a $\psi(x, x) = x - x = 0$ donc $(x, x) \in \mathrm{Ker}(\psi)$. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi) = \{(x, x),\ x \in E \cap F\}$.

Soit $\big(e_1, ..., e_n\big)$ (resp. $\big(f_1, ..., f_p\big)$) une base de E (resp. de F). Alors la famille $\big((e_1, 0), ..., (e_n, 0), (0, f_1), ..., (0, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$ (parce qu'on a $(e, f) = (e, 0) + (0, f)$ dans $E \times F$). On a donc $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

D'après le théorème noyau-image appliqué à ψ, on a $\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(\psi)) + \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(\psi))$, soit $\dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E + F) + \dim_{\mathbb{K}}(E \cap F)$ d'après ce qui précède.