Corrigé du problème 2

Exercice 1.

1.a. Sur chacun des intervalles $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$, les coefficients de l'équation (H) (et ceux de (E)) sont continus et le coefficient de y' ne s'annule pas. Les solutions de (H), sur chacun des intervalles $I = I_1$ ou $I = I_2$ sont de la forme :

$$\forall x \in I \; ; \quad y(x) \;=\; \lambda \exp\left(\int \frac{2\,x^2-1}{x\,(x^2-1)}dx \right)$$

où λ est un nombre réel et $\int \frac{2\,x^2-1}{x\,(x^2-1)}dx$ désigne une primitive de la fraction rationnelle $\frac{2x^2-1}{x\,(x^2-1)}$. On remarque que :

$$\frac{2x^2-1}{x\,(x^2-1)} = \frac{2x^2-1}{x\,(x-1)\,(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

On peut trouver A, B et C par identification ou de la manière suivante :

- On multiplie l'égalité précédente par x et on fait $x=0$
$$\frac{-1}{(-1).1} = 1 = A$$
- On multiplie l'égalité précédente par $x-1$ et on fait $x=1$
$$\frac{2.1-1}{1.(1+1)} = \frac{1}{2} = B$$
- On multiplie l'égalité précédente par $x+1$ et on fait $x=-1$
$$\frac{2.1-1}{(-1).(-1-1)} = \frac{1}{2} = C$$

On en déduit que la fraction rationnelle $\frac{2x^2-1}{x\,(x^2-1)}$ admet sur $I = I_1$ ou $I = I_2$, une primitive de la forme

$$\forall x \in I \; ; \quad \int \frac{2\,x^2-1}{x\,(x^2-1)}dx = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

et donc les solutions de (H), sur chacun des intervalles $I = I_1$ ou $I = I_2$, sont de la forme :

$$\forall x \in I \; ; \quad y(x) = \lambda\, x\,\sqrt{|x^2-1|}$$

où λ appartient à $\mathbb{R}$.

1.b. Soit f une solution non nulle définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle coincide avec des solutions de (H) sur I_1 et I_2. Autrement dit, il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que :

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad f(x) = \lambda_1\, x\,\sqrt{(1-x^2)}$$
$$\forall x \in I_2 \; ; \quad f(x) = \lambda_2\, x\,\sqrt{(x^2-1)}$$

Par ailleurs, une telle fonction doit être continue, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Etant donné les équations précédentes, elle est continue dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}/\{1\} = I_1 \cup I_2$ et il reste à examiner la continuité et la dérivabilité en 1. On remarque que :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \lambda_1\, x\,\sqrt{(1-x^2)} = 0 = \lim_{x\to 1^+} \lambda_2\, x\,\sqrt{(x^2-1)} = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

et donc comme f est continue, on a nécessairement $f(1) = 0$. On remarque que f doit être dérivable en 1 et donc

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

or

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lambda_1 \frac{x\,\sqrt{(1-x^2)}}{x-1} = -\,\lambda_1\,\frac{x\,\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1-x)}}$$

$$\forall x \in I_2 \; ; \quad \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lambda_2 \frac{x\,\sqrt{(x^2-1)}}{x-1} = +\,\lambda_2\,\frac{x\,\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(x-1)}}$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(1-x)}} = +\infty = \lim_{x\to 1^+} \frac{x\sqrt{(1+x)}}{\sqrt{(x-1)}}$$

donc f est dérivable en 1 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, mais alors f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. On n'a donc pas de solutions non nulles sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.a. On cherche une solution particulière de (E) sur I_1. Pour cela on utilise la méthode de variation de la constante. On cherche donc, sur I_1, une solution de la forme

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad y(x) = \lambda(x)\, x\, \sqrt{(1-x^2)}$$

Comme d'habitude, les termes en $\lambda(x)$ s'éliminent et on obtient que, si y est solution de (E), alors

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad \lambda'(x)\, x^2\, (1-x^2)^{\frac{3}{2}} = 2x^3$$

soit encore

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad \lambda'(x) = 2\, x\, (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

dont une primitive est

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad \lambda(x) = 2\, (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

on a donc la solution particulière

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad y(x) = 2\, x$$

et donc toute solution de (E) sur I_1 s'écrit

$$\forall x \in I_1 \; ; \quad y(x) = 2\, x + \lambda\; x\, \sqrt{(1-x^2)}$$

où λ est un nombre réel. De la même manière, toute solution de (E) sur I_2 s'écrit

$$\forall x \in I_2 \; ; \quad y(x) = 2\, x + \lambda\; x\, \sqrt{(x^2-1)}$$

où λ est un nombre réel.

2.b. Si f est une solution définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ de (E), alors on remarque que la fonction qui à x associe $f(x) - 2\, x$ est une solution de (H) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, car la fonction qui à x associe $2\; x$ est une solution particulière de (E) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'après **1.b.**, la fonction qui à x associe $f(x) - 2\; x$ est identiquement nulle. Il exite une unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est la fonction qui à x associe $2\, x$.

Exercice 2.

1. On calcule le discriminant du polynôme caractéristique $r^2 + 2\, m\, r + 1$:

$$\Delta = 4\, m^2 - 4 = 4\, (m^2 - 1)$$

et on en déduit le tableau suivant

m	$-\infty < m < -1$	$m = -1$	$-1 < m < 1$	$m = 1$	$1 < m < +\infty$
Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
racines	2 racines réelles distinctes : $-m + \sqrt{m^2-1}$; $-m - \sqrt{m^2-1}$	1 racine double : 1	2 racines complexes distinctes : $-m + i\sqrt{1-m^2}$; $-m - i\sqrt{1-m^2}$	1 racine double : -1	2 racines réelles distinctes : $-m + \sqrt{m^2-1}$; $-m - \sqrt{m^2-1}$

2. On en déduit sans difficultés les solutions de (H)

– Si $m \in]-\infty, -1[$, alors les solutions réelles de (H) sont :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; y(x) = A\, e^{(-m+\sqrt{m^2-1})x} + B\, e^{(-m-\sqrt{m^2-1})x} \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

– Si $m = -1$, alors les solutions réelles de (H) sont :

$$\forall x \in \mathbb{R} \; ; \quad y(x) = (A\, x + B)\, e^x \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad y(x) = e^{-mx}\left(A\sin\left(x\sqrt{1-m^2}\right) + B\cos\left(x\sqrt{1-m^2}\right)\right) \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

– Si $m=1$, alors les solutions réelles de (H) sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad y(x) = (A\,x + B)\,e^{-x} \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

– Si $m \in]1, +\infty[$, alors les solutions de (H) sont :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ; \quad y(x) = A\,e^{(-m+\sqrt{m^2-1})x} + B\,e^{(-m-\sqrt{m^2-1})x} \quad (A \text{ et } B \text{ réels})$$

3. Le second membre de (E) est de la forme $P(x)\,e^{sx}$ où P est un polynôme (ici $P(x)=x$) et $s=1$. On examine donc différentes possibilités, suivant que $s=1$ est racine ou non du polynôme $r^2+2\,m\,r+1$. On remarque que $s=1$ est racine si et seulement si $s^2+2\,m\,s+1 = 2(m+1) = 0$. Donc s est racine si et seulement $m=-1$ et dans ce cas s est racine double.

– Si $m \neq -1$, alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = Q(x)\,e^x$ où Q est un polynôme de degré 1 : $Q(x) = a\,x + b$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) &= (a\,x+b)\,e^x \\ f'(x) &= (a\,x+a+b)\,e^x \\ f''(x) &= (a\,x+2\,a+b)\,e^x \end{aligned}$$

donc f est solution de (E) si et seulement si :

$$f''(x) + 2\,m\,f'(x) + f(x) = (2\,a\,(m+1)x + 2\,(m+1)\,(a+b))e^x = x\,e^x$$

et on obtient ici

$$a = \frac{1}{2\,(m+1)}\ ,\quad b = -\frac{1}{2\,(m+1)}$$

on a donc une solution particulière : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \dfrac{1}{2\,(m+1)}\,(x-1)\,e^x$ et la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à f la solution générale de (H). Reste donc à résoudre le cas $m=-1$.

– Si $m=-1$, alors on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $f(x) = x^2\,Q(x)\,e^x$ où Q est un polynôme de degré 1 : $Q(x) = a\,x+b$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) &= (a\,x^3 + b\,x^2)\,e^x \\ f'(x) &= (a\,x^3 + (3\,a+b)\,x^2 + 2\,b\,x)\,e^x \\ f''(x) &= (a\,x^3 + (6\,a+b)\,x^2 + (6\,a+4\,b)\,x + 2\,b)\,e^x \end{aligned}$$

donc f esx solution de (E) si et seulement si :

$$f''(x) - 2\,f'(x) + f(x) = (6\,a\,x + 2\,b)e^x = x\,e^x$$

et on obtient ici

$$a = \frac{1}{6}\ ,\quad b = 0$$

on a donc une solution particulière : $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ f(x) = \dfrac{x^3}{6}\,e^x$ et la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à f la solution générale de (H).