Corrigé du devoir n° 3

Exercice 1. On raisonne par systèmes équivalents en indiquant les opérations sur les lignes.

$$(S1)\left\{\begin{array}{rrcll} x & +(\lambda+1)y & = & 1 & (L1) \\ \lambda x & +(\lambda+4)y & = & 2 & (L2) \end{array}\right.$$

$$(S1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcll} x & +(\lambda+1)y & = & 1 & (L1) \\ & [\lambda+4-\lambda(\lambda+1)]y & = & 2-\lambda & (L2-\lambda L1) \end{array}\right.$$

$$(S1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ & [4-\lambda^2]y & = & 2-\lambda \end{array}\right.$$

$$(S1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{llcl} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ & (2-\lambda)(2+\lambda)y & = & 2-\lambda \end{array}\right.$$

• Si $\lambda \neq 2, -2$ alors $(2-\lambda)(2+\lambda) \neq 0$ et $y = \frac{1}{2+\lambda}$. En remplaçant dans (L1) on trouve $x = 1 - \frac{\lambda+1}{2+\lambda} = \frac{1}{2+\lambda}$. Donc le système (S1) a une unique solution $\left(\frac{1}{2+\lambda}, \frac{1}{2+\lambda}\right)$.

• Si $\lambda = 2$ alors le système devient $\left\{\begin{array}{rrcl} x & +3y & = & 1 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$

La dernière ligne disparaît, le système se réduit à une seule ligne. On a $x = 1-3y$ et le système (S1) admet une infinité de solutions $\{(1-3y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

• Si $\lambda = -2$ alors le système devient $\left\{\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 1 \\ & 0 & = & 4 \end{array}\right.$

La dernière égalité n'est jamais satisfaite donc le système (S1) n'admet aucune solution.

Exercice 2.

a) On raisonne par systèmes équivalents en indiquant les opérations sur les lignes.

$$(S2)\left\{\begin{array}{rrrrcll} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 & (L1) \\ x & +\,y & +\,z & +\,t & = & b_2 & (L2) \\ x & +3y & +3z & +2t & = & b_3 & (L3) \\ x & +3y & +4z & +5t & = & b_4 & (L4) \end{array}\right.$$

$$(S2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcll} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 & (L1) \\ & -2y & -3z & -6t & = & b_2-b_1 & (L2 \leftarrow L2-L1) \\ & & -\,z & -5t & = & b_3-b_1 & (L3 \leftarrow L3-L1) \\ & & & -2t & = & b_4-b_1 & (L4 \leftarrow L4-L1) \end{array}\right.$$

On a obtenu un système triangulaire, on le résoud en partant du bas :
• $t = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4$,
• $z = b_1 - b_3 - 5t = -\frac{3}{2}b_1 - b_3 + \frac{5}{2}b_4$,
• $y = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}z - 3t = \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2}b_3 - \frac{9}{4}b_4$,
• $x = b_1 - 3y - 4z - 7t = -\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{4}b_4$.

On a montré que le système (S2) a une unique solution quels que soient les nombres b_1, b_2, b_3, b_4, qui est $\left\{\frac{1}{4}b_1 + \frac{3}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_3 + \frac{1}{4}b_4, \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + \frac{3}{2}b_3 - \frac{9}{4}b_4, -\frac{3}{2}b_1 - b_3 + \frac{5}{2}b_4, \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_4\right\}$.

b) Le système (S2) est équivalent à l'équation matricielle $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$.

À la question a) on a résolu ce système et on a trouvé :

$$\begin{cases} x = & -\frac{1}{4}b_1 & +\frac{3}{2}b_2 & -\frac{1}{2}b_3 & +\frac{1}{4}b_4 \\ y = & \frac{5}{4}b_1 & -\frac{1}{2}b_2 & +\frac{3}{2}b_3 & -\frac{9}{4}b_4 \\ z = & -\frac{3}{2}b_1 & +0b_2 & -\ b_3 & +\frac{5}{2}b_4 \\ t = & \frac{1}{2}b_1 & +0b_2 & +0b_3 & -\frac{1}{2}b_4 \end{cases}$$

donc la matrice A est inversible et les coefficients de x, y, z, t en fonction de b_1, b_2, b_3, b_4 (dans l'ordre) donnent A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{9}{4} \\ -\frac{3}{2} & 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On a $BM = \begin{pmatrix} 3a+4d & 3b+4e & 3c+4f \\ 2a+3d & 2b+3e & 2c+3f \\ a+d & b+e & c+f \end{pmatrix}$, donc $BM = I_3$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3a+4d & = & 1 & \text{(L1)} \\ 3b+4e & = & 0 & \text{(L2)} \\ 3c+4f & = & 0 & \text{(L3)} \\ 2a+3d & = & 0 & \text{(L4)} \\ 2b+3e & = & 1 & \text{(L5)} \\ 2c+3f & = & 0 & \text{(L6)} \\ a+d & = & 0 & \text{(L7)} \\ b+e & = & 0 & \text{(L8)} \\ c+f & = & 1 & \text{(L9)} \end{cases}$$

On voit que les inconnues a, d n'apparaissent que dans les lignes (L1), (L4) et (L7).
De (L7) on déduit que $d = -a$ et en remplaçant dans (L4) on trouve $a = 0$, donc $d = 0$. Mais alors (L1) n'est pas vérifiée, donc le système n'a pas de solution.

Conclusion : il n'existe aucune matrice $M \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telle que $BM = I_3$.

Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. On a $NB = \begin{pmatrix} 3a+2b+c & 4a+3b+c \\ 3d+2e+f & 4d+3e+f \end{pmatrix}$, donc $NB = I_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} 3a+2b+c & = & 1 & \text{(L1)} \\ 4a+3b+c & = & 0 & \text{(L2)} \\ 3d+2e+f & = & 0 & \text{(L3)} \\ 4d+3e+f & = & 1 & \text{(L4)} \end{cases}$$

On remarque que les inconnues a, b, c n'apparaissent que dans (L1) et (L2) et les inconnues d, e, f dans (L3) et (L4).

$$\begin{cases} 3a+2b+c & = & 1 & \text{(L1)} \\ a+b & = & -1 & \text{(L2 − L1)} \\ 3d+2e+f & = & 0 & \text{(L3)} \\ d+e & = & 1 & \text{(L4 − L3)} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2b+c & = & 1-3a \\ b & = & -1-a \\ 2e+f & = & -3d \\ e & = & 1-d \end{cases} \qquad \begin{cases} c & = & 3-a \\ b & = & -1-a \\ f & = & -2-d \\ e & = & 1-d \end{cases}$$

Les inconnues principales sont b, c, e, f, les inconnues secondaires sont a, d.

Conclusion : on a une infinité de matrices $N \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $NB = I_2$, qui sont les matrices $N = \begin{pmatrix} a & -1-a & 3-a \\ d & 1-d & -2-d \end{pmatrix}$ pour tous les réels $a, d \in \mathbb{R}$.