Corrigé du devoir n° 3

Exercice 1.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

$$AM = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MA = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

$$AM = MA \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a+c & = & a+b \\ b+d & = & a+b \\ a+c & = & c+d \\ b+d & = & c+d \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & c \end{array} \right.$$

L'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$ est donc $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 2.

Soit a le nombre de tonnes d'alliage A, b le nombre de tonnes d'alliage B et c le nombre de tonnes d'alliage C. On mélange ces 3 quantités. Le nombre de tonnes de fer contenu dans le mélange est $0,1a + 0,3b + 0,8c$. On veut obtenir 100 tonnes d'alliage contenant 34% de fer, donc contenant 34 tonnes de fer, il faut donc $0,1a + 0,3b + 0,8c = 34$. On fait de même pour le nickel et le cuivre, ce qui donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 0,1a & +0,3b & +0,8c & = & 34 \\ 0,2a & +0,4b & +0,1c & = & 28 \\ 0,7a & +0,3b & +0,1c & = & 38 \end{array} \right.$$

On multiplie les 3 lignes par 10 :

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & L1 \\ 2a & +4b & +c & = & 280 & L2 \\ 7a & +3b & +c & = & 380 & L3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & L1 \\ & 2b & +15c & = & 400 & 2L1 - L2 \to L2 \\ & 18b & +55c & = & 2000 & 7L1 - L3 \to L3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 340 & \\ & 2b & +15c & = & 400 & L2 \\ & & 80c & = & 1600 & 9L2 - L3 \end{array} \right.$$

On trouve $c = 20$, $b = 50$, $a = 30$. Il faut donc mélanger 30 tonnes d'alliage A, 50 tonnes d'alliage B et 20 tonnes d'alliage C pour réaliser la commande.

Peut-on produire le deuxième alliage ? Remarquons tout d'abord que si on sait produire 100 tonnes de cet alliage alors on sait en produire n'importe quelle quantité par proportionnalité, et réciproquement. On va donc chercher si on peut produire 100 tonnes de cet alliage (on peut aussi raisonner sur les proportions). On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{llllll} 0,1a & +0,3b & +0,8c & = & 69 \\ 0,2a & +0,4b & +0,1c & = & 23 \\ 0,7a & +0,3b & +0,1c & = & 8 \end{array}\right.$$

On remarque que seul le second membre a changé, on peut donc reprendre les mêmes opérations sur les lignes pour diagonaliser le système, ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{llllll} a & +3b & +8c & = & 690 \\ & 2b & +15c & = & 1150 \\ & & 80c & = & 2600 \end{array}\right.$$

On trouve $c = 70$, $b = 50$, $a = -20$. On ne peut pas avoir de masse négative, donc cette solution n'est pas acceptable pour le problème posé. On ne peut pas obtenir un alliage contenant 69% de fer, 23% de nickel et 8% de cuivre.
Sans faire de calcul, on peut également remarquer que les alliages A, B, C contiennent tous au moins 10% de cuivre, on ne peut donc pas obtenir un allliage ne contenant que 8% de cuivre.

Exercice 3.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Pour savoir si B est inversible, on va résoudre le système $BX = Y$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ \alpha x_1 & & -x_3 & = & y_3 & L3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ & -\alpha x_2 & -x_3 & = & y_3 - \alpha y_1 & L3 - \alpha L1 \to L3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 & L1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 & L2 \\ & & -(\alpha+1)x_3 & = & y_3 - \alpha y_1 + \alpha y_2 & L3 + \alpha L2 \end{array}\right.$$

• **1er cas : $\boldsymbol{\alpha \neq -1}$.** Alors $\alpha + 1 \neq 0$ et le système est triangulaire, donc il a une unique solution et B est inversible. On obtient :
$x_3 = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha y_1 - \alpha y_2 - y_3)$, $x_2 = y_2 + x_3 = \frac{1}{\alpha+1}(\alpha y_1 + y_2 - y_3)$, $x_1 = y_1 - x_2 = \frac{1}{\alpha+1}(y_1 - y_2 + y_3)$.

On trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} & \frac{-1}{\alpha+1} \end{pmatrix}$.

• **2ème cas : $\boldsymbol{\alpha = -1}$.** Le système ci-dessus devient

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & & = & y_1 \\ & x_2 & -x_3 & = & y_2 \\ & & 0 & = & y_3 + y_1 - y_2 \end{array}\right.$$

Ce système n'a pas une unique solution (selon les valeurs de Y, il a soit une infinité de solutions soit pas de solution), donc B n'est pas inversible.