Corrigé du devoir n° 2

Exercice 1.

1. On désigne les trois intervalles par :

$$I_1 =]-\infty, 0[, \quad I_2 =]0, 2[, \quad I_3 =]2, +\infty[.$$

Soit $k \in \{1, 2, 3\}$. Pour x appartenant à I_k, l'équation homogène (E_0) peut se récrire

$$y' + \frac{2(x+1)}{x(x-2)} y = 0,$$

dont l'ensemble des solutions sur I_k est constitué des fonctions

$$\begin{aligned} y : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto C_k \cdot \exp(-F(x)) \end{aligned}$$

où F est une primitive de la fonction rationnelle $f : x \mapsto \frac{2(x+1)}{x(x-2)}$ sur I_k, et C_k un réel quelconque. Pour trouver F, on commence par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle, en cherchant deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ on ait

$$\frac{2(x+1)}{x(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}. \tag{1}$$

On peut procéder par exemple par substitution : en multipliant l'égalité (1) par x, on obtient

$$\frac{2(x+1)}{x-2} = a + \frac{bx}{x-2}.$$

Si on prend $x = 0$ dans cette nouvelle égalité, on aura $a = 2/(-2) = -1$. De même, en multipliant l'égalité (1) par $(x-2)$ et en prenant $x = 2$, on obtiendra $b = 2(3)/2 = 3$. On en déduit la relation valable pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$\frac{2(x+1)}{x(x-2)} = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2}.$$

Il est maintenant aisé de trouver les primitives de f qui sont

$$\int -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-2} \mathrm{d}x = -\ln|x| + 3\ln|x-2| + c$$

où c est une constante réelle. On choisit

$$F(x) = -\ln|x| + 3\ln|x-2|.$$

Donc l'ensemble $\mathcal{S}_k^{(E_0)}$ des solutions sur I_k de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions y définies sur I_k par

$$y(x) = C_k \cdot \exp(-F(x)) = C_k \cdot \exp(\ln|x| - 3\ln|x-2|) = C_k \frac{|x|}{|x-2|^3}.$$

Les signes de x et de $(x-2)$ sont constants sur I_k. Pour $x \in I_1$ ou $x \in I_2$, on a

$$\frac{|x|}{|x-2|^3} = \frac{x}{(x-2)^3},$$

et pour $x \in I_2$, on a
$$\frac{|x|}{|x-2|^3} = -\frac{x}{(x-2)^3}.$$
En posant $D_1 = C_1, D_2 = -C_2$ et $D_3 = C_3$, on peut récrire les solutions sans valeurs absolues. Finalement, sur I_k (k=1,2 ou 3), l'ensemble des solutions est donné par

$$\mathcal{S}_k^{(E_0)} = \left\{ \begin{array}{rl} y : I_k \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto D_k \frac{x}{(x-2)^3} & ; \; D_k \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Si y_3 est une solution de (E_0) sur I_3, et que la constante D_3 n'est pas nulle, alors

$$\lim_{x \to 2^+} |y_3(x)| = +\infty.$$

De même, si y_2 est une solution de (E_0) sur I_2, et que la constante D_2 n'est pas nulle, alors

$$\lim_{x \to 2^-} |y_2(x)| = +\infty.$$

Les solutions non nulles de (E_0) définies sur I_2 et I_3 divergent quand x tend vers 2.
En revanche, une solution y_2 de (E_0) sur I_2 a une limite à droite en 0 et

$$\lim_{x \to 0^+} y_2(x) = 0.$$

De même, si $y_1 \in \mathcal{S}_1^{(E_0)}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} y_1(x) = 0$. On peut donc espérer pouvoir prolonger des solutions en 0 pour obtenir des solutions de (E_0) sur $]-\infty, 2[$. À partir de deux solutions

$$\begin{array}{rl} y_1 : I_1 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto D_1 \frac{x}{(x-2)^3} \end{array} \qquad \begin{array}{rl} y_2 : I_2 \to \mathbb{R} \\ x \mapsto D_2 \frac{x}{(x-2)^3} \end{array}$$

on définit une fonction y sur $]-\infty, 2[$ par

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ y_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

y_1 et y_2 sont continues et dérivables sur I_1 et I_2 respectivement. Le fait que y_1 et y_2 tendent vers 0 quand x tend vers 0 montrent que y est continue en 0. Donc y est continue sur tout son intervalle de définition. En revenant à la définition, on peut montrer que y admet des nombres dérivés à gauche et à droite en 0, et que

$$y'_g(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{y_1(h) - 0}{h} = -\frac{D_1}{8} \qquad y'_d(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{y_2(h) - 0}{h} = -\frac{D_2}{8}$$

La fonction y est donc dérivable en 0 si et seulement si $D_1 = D_2$. Dans ce cas, y est dérivable sur son ensemble de définition et satisfait en tout point de cet intervalle l'équation (E_0). On peut donc recoller en 0 des solutions sur I_1 et I_2 à la condition que $D_1 = D_2$.

2. Soit $k = 1, 2$ ou 3. On cherche une solution particulière de l'équation (E) sur I_k par la méthode de la variation de la constante sous la forme

$$y(x) = D_k(x) \frac{x}{(x-2)^3}.$$

La dérivée de la fonction D_k doit vérifier

$$D'_k(x) = \frac{(6x-1)}{x(x-2)} \frac{(x-2)^3}{x} = 6x - 25 + \frac{28}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

On peut donc prendre pour D_k la fonction donnée par

$$D_k(x) = 3x^2 - 25x + 28 \ln |x| + \frac{4}{x}.$$

Une solution particulière y sur I_k de l'équation différentielle (E) est donc définie par

$$y(x) = \frac{x}{(x-2)^3} \left(3x^2 - 25x + 28 \ln |x| + \frac{4}{x} \right).$$

Les solutions de (E) sur l'intervalle I_k sont la somme de la solution particulière ci-dessus et d'une solution générale de l'équation homogène associée (E_0).
L'ensemble $\mathcal{S}_k^{(E)}$ des solutions de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle I_k est donc

$$\mathcal{S}_k^{(E)} = \left\{ \begin{array}{rl} y : I_k \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto \frac{x}{(x-2)^3} \left(3x^2 - 25x + 28 \ln |x| + \frac{4}{x} + A_k \right) \end{array} ; \ A_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 2.

1. En faisant la somme et la différence des deux équations du système différentiel, on obtient le système d'équations différentielles vérifiées par u et v :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' + \omega^2 u & = & 0 \\ v'' + 2v' + 3\omega^2 v & = & 0. \end{array} \right.$$

2. Résolvons d'abord l'équation différentielle vérifiée par u. L'équation caractéristique est

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Si $\omega = 0$, alors 0 est racine double de l'équation caractéristique et l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$\mathcal{S}^u = \left\{ \begin{array}{rl} u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ t \mapsto At + B \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $\omega \neq 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $i\omega$ et $-i\omega$. Dans ce cas l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}^u = \left\{ \begin{array}{rl} u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ t \mapsto A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \end{array} ; (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par v est

$$r^2 + 2r + 3\omega^2 = 0.$$

Si $|\omega| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, le discriminant du trinôme est strictement positif. L'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes :

$$-1 + \sqrt{1 - 3\omega^2} \text{ et } -1 - \sqrt{1 - 3\omega^2}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{rl} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ t \mapsto e^{-t}(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si $|\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, -1 est racine double de l'équation caractéristique. L'ensemble des solutions est alors

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto e^{-t}(Ct + D) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Si enfin $|\omega| > \frac{1}{\sqrt{3}}$, l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées

$$-1 + i\sqrt{3\omega^2 - 1} \text{ et } -1 - i\sqrt{3\omega^2 - 1}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}^v$ est alors égal à

$$\mathcal{S}^v = \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2 - 1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2 - 1})\right) \end{array} ; (C, D) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. Comme $y = (u + v)/2$ et $z = (u - v)/2$, on peut déterminer l'ensemble des solutions du système (S) en fonction de ω. Il est constitué des couples de fonctions (y, z) définies sur $\mathbb{R}$ par :
- si $\omega = 0$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A + tB + e^{-t}\left(Ce^{t} + De^{-t}\right) \\ z(t) &= A + tB - e^{-t}\left(Ce^{t} + De^{-t}\right) \quad ; \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \hat{A} + tB + De^{-2t} \\ z(t) &= \hat{C} + tB - De^{-2t} \quad ; \quad (\hat{A}, B, \hat{C}, D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

où on a posé $\hat{A} = A + C$ et $\hat{C} = A - C$.
- Si $0 < |\omega| < \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + e^{-t}\left(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}\right) \\ z(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - e^{-t}\left(Ce^{t\sqrt{1-3\omega^2}} + De^{-t\sqrt{1-3\omega^2}}\right) \quad ; \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

- si $|\omega| = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\frac{t}{\sqrt{3}}) + B\sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) + e^{-t}(Ct + D) \\ z(t) &= A\cos(\frac{t}{\sqrt{3}}) + B\sin(\frac{t}{\sqrt{3}}) - e^{-t}(Ct + D) \quad ; \quad (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \end{aligned}$$

- et enfin si $|\omega| > \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\begin{aligned} y(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2 - 1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2 - 1})\right) \\ z(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - e^{-t}\left(C\cos(t\sqrt{3\omega^2 - 1}) + D\sin(t\sqrt{3\omega^2 - 1})\right) \ ; \ (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Exercice 3. L'équation différentielle modélisant le refroidissement d'un liquide est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$T(t) = T_{ext} + Ae^{-kt}$$

où A est une constante. Si $T(0) = T_0$, alors en faisant $t = 0$ dans l'expression de $T(t)$, on obtient $A = T_0 - T_{ext}$. On tire donc de la résolution de l'équation différentielle le fait suivant : si un liquide est initialement à la température T_0, alors au bout d'un temps t, il est à la température

$$T(t) = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{-kt}.$$

Soit T_c la température initiale du café. Étudions d'abord la technique d'Alice. Alice attend d'abord 5 minutes. La température du café au bout de 5 minutes est, d'après la formule ci-dessus

$$T(5) = T_{ext} + (T_c - T_{ext})e^{-5k}.$$

Après le mélange avec le lait, la température du liquide à l'intérieur de la tasse est

$$T_A = \frac{(T_{ext} + (T_c - T_{ext})e^{-5k})V_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}} = T_{ext} + (T_c - T_{ext})\frac{V_{\text{café}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}e^{-5k}.$$

Analysons maintenant la technique de Bernard. Il mélange d'abord le lait avec le café de sa tasse. Il obtient un liquide à la température

$$\frac{T_c V_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}.$$

Il attend ensuite 5 minutes pour obtenir un liquide à la température

$$T_B = T_{ext} + \left(\frac{T_c V_{\text{café}} + T_{ext}V_{\text{lait}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}} - T_{ext}\right)e^{-5k} = T_{ext} + (T_c - T_{ext})\frac{V_{\text{café}}}{V_{\text{café}} + V_{\text{lait}}}e^{-5k}.$$

On a donc $T_A = T_B$. Finalement, les deux techniques mènent à la même température. Au moment de la dégustation, les cafés d'Alice et de Bernard sont aussi chauds l'un que l'autre.