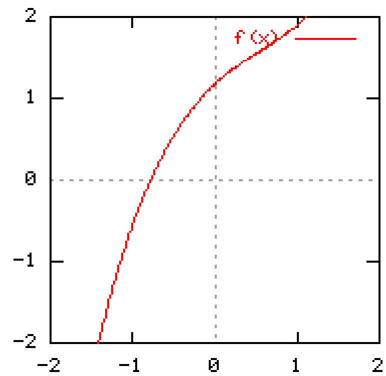
Corrigé de l'interrogation écrite n° 1

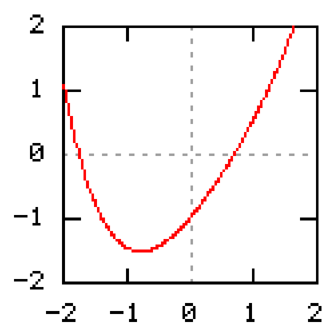
Il y avait 2 sujets, avec les mêmes questions mais dans un ordre différent. La numérotation du corrigé ne correspond pas forcément au sujet que vous avez eu.

1. Question de cours.
On considère un intervalle symétrique $[-a, a]$ (avec $a > 0$) et une fonction continue f sur $[-a, a]$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ est toujours égale à 0 si ***f* est impaire**.

2. Voici le graphe d'une fonction continue $f(x)$.



f est négative sur le premier tiers de l'intervalle (environ) donc sa primitive est décroissante sur cet intervalle. Ensuite, f est positive sur le reste de l'intervalle donc sa primitive est croissante. Le dessin suivant est le seul qui puisse être le graphe d'une primitive de f :



3. Soit $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1+3t^2}}$.

On reconnaît une dérivée de composée (du type $u'u^\alpha$), donc $I_1 = \left[\dfrac{1}{3}\sqrt{1+3t^2}\right]_0^1 = \dfrac{1}{3}$.

4. Soit $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} x\sin x\,dx$. On fait une intégration par parties ($u = x$, $v' = \sin x$) :

$$I_2 = [-x\cos x]_0^{\pi/3} + \int_0^{\pi/3} \cos x\,dx = [-x\cos x + \sin x]_0^{\pi/3} = -\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Soit $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{3+\cos^2 x}dx$. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $x \mapsto \cos x$ est une bijection (car strictement décroissant) donc on peut faire le changement de variable $u = \cos x$. On a $du = -\sin x\, dx$. On écrit $\dfrac{\sin^3 x}{3+\cos^2 x}dx = \dfrac{-\sin^2 x}{3+\cos^2 x}(-\sin x\, dx) = \dfrac{\cos^2 x - 1}{3+\cos^2 x}(-\sin x\, dx) = \dfrac{u^2-1}{3+u^2}du.$

Les bornes deviennent $\cos 0 = 1$ et $\cos(\pi/2) = 0$. Donc $I_3 = \displaystyle\int_1^0 \frac{u^2-1}{u^2+3}du.$

On calcule la partie entière de la fraction rationnelle : $\dfrac{u^2-1}{u^2+3} = 1 - \dfrac{4}{u^2+3}.$

$$I_3 = \int_1^0 \left(1 - \frac{4}{u^2+3}\right) du = [u]_1^0 - \int_1^0 \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = -1 - \left[\frac{4}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^0$$

$$I_3 = -1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - 1$$

6. Soit $F(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}$. Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, donc la décomposition en éléments simples de $F(x)$ est de la forme

$$\frac{2x^2+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+1}.$$

On mutiplie des 2 côtés par $x-2$ et on prend $x = 2$: on trouve $1 = A$.
On mutiplie des 2 côtés par $(x+1)^2$ et on prend $x = -1$: on trouve $-1 = B$.
On prend $x = 0$: on trouve $-\frac{1}{2} = -\frac{A}{2} + B + C$, d'où $C = 1$.
Finalement, la décomposition en éléments simples s'écrit $F(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1}.$

7. On considère l'équation différentielle $(E) \quad y' + 2xy + x = 0.$
L'équation homogène associée est $(H) \quad y' + 2xy = 0$. Comme x^2 est une primitive de $2x$, la solution de (H) est : $y_H(x) = \lambda e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Variation de la constante : soit $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$. On a $y_0'(x) = \lambda'(x)e^{-x^2} - 2x\lambda(x)e^{-x^2}$, donc $y_0'(x) + 2xy_0(x) + x = \lambda'(x)e^{-x^2} + x$. Donc y_0 est une solution particulière de (E) si et seulement si $\lambda'(x) = -xe^{x^2}$. Or $\lambda(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de $-xe^{x^2}$, donc $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}$ est une solution particulière de (E).
On en déduit que la solution générale de (E) est $y(x) = \lambda e^{-x^2} - \frac{1}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2}$, donc y a pour limite $-\frac{1}{2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Le graphe qui correspond à une solution de (E) est :