Corrigé de l'interrogation écrite n° 2

1. On applique la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} x & +y & -z & = & 1 & (L1) \\ 2x & -y & -3z & = & 2 & (L2) \\ 2x & -7y & -5z & = & 2 & (L3) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrcll} x & +y & -z & = & 1 & (L1) \\ & -3y & -z & = & 0 & (L2 \leftarrow L2-2L1) \\ & -9y & -3z & = & 0 & (L3 \leftarrow L3-2L1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} x & +y & -z & = & 1 & (L1) \\ & -3y & -z & = & 0 & (L2) \\ & & 0 & = & 0 & (L3-3L2) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 1+z \\ & -3y & = & z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} x & +y & = & 1+z \\ & -3y & = & z \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+\frac{4}{3}z \\ y & = & -\frac{1}{3}z \end{array}\right.$$

Ce système a une infinité de solutions : $S = \{(1+\frac{4}{3}z, -\frac{1}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit a, b, c, d des scalaires tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = \vec{0}$. En regardant coordonnée par coordonnée, ceci est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrrcll} a & +2b & & +3d & = & 0 & (L1) \\ -a & +b & +3c & -6d & = & 0 & (L2) \\ -a & & +2c & -5d & = & 0 & (L3) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcll} a & +2b & & +3d & = & 0 & (L1) \\ & 3b & +3c & -3d & = & 0 & (L2 \leftarrow L2+L1) \\ & 2b & +2c & -2d & = & 0 & (L3 \leftarrow L3+L1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrcll} a & +2b & & +3d & = & 0 & (L1) \\ & b & +c & -d & = & 0 & (L2 \leftarrow \frac{1}{3}L2) \\ & b & +c & -d & = & 0 & (L3 \leftarrow \frac{1}{2}L3) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrcll} a & +2b & & +3d & = & 0 & (L1) \\ & b & +c & -d & = & 0 & (L2) \\ & & & 0 & = & 0 & (L3-L2) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl} a & +2b & = & -3d \\ & b & = & -c+d \end{array}\right. \quad \text{(inconnues principales : } a, b \text{ -- inconnues secondaires : } c, d\text{)}$$

On en déduit que (u_1, u_2) est une base de F, donc $\dim F = 2$.
Plus précisément, si on prend $c = 1$ et $d = 0$, on trouve $b = -1, a = 2$ donc $2u_1 - u_2 + u_3 = \vec{0}$, autrement dit $u_3 = -2u_1 + u_2$. De même, si on prend $c = 0$ et $d = 1$, on trouve $u_4 = 5u_1 - u_2$. On a donc $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, si on prend $c = d = 0$, le système équivaut à résoudre $au_1 + bu_2 = \vec{0}$, on trouve $a = b = 0$ donc (u_1, u_2) est libre.

3. Soit a, b, c des scalaires tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$. On a $av_1 + bv_2 + cv_3 = (a+b, a+c, b+c, a)$ donc $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} a & +b & & = & 0 & (L1) \\ a & & +c & = & 0 & (L2) \\ & b & +c & = & 0 & (L3) \\ a & & & = & 0 & (L4) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} b & = & 0 & (L1-L4) \\ c & = & 0 & (L2-L4) \\ b+c & = & 0 & (L3) \\ a & = & 0 & (L4) \end{array}\right.$$

La seule solution est $a = b = c = 0$, donc la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre. Comme cette famille a 3 éléments et que $\dim \mathbb{R}^4 = 4 > 3$, elle ne peut pas engendrer $\mathbb{R}^4$.

4. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x,y,z) \in G \iff \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y-z=-x \\ z=-2x \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y=-3x \\ z=-2x \end{array}\right. \quad \iff \quad (x,y,z) = (x, -3x, -2x) = x(1, -3, -2).$$

On en déduit que $(1, -3, -2)$ est une base de G et $\dim G = 1$.