# Corrigé de l'interrogation écrite n° 1

Il y avait 2 sujets, avec les mêmes questions mais dans un ordre différent. La numérotation du corrigé ne correspond pas forcément au sujet que vous avez eu.

**1. Question de cours.**
On considère un intervalle symétrique $[-a, a]$ (avec $a > 0$) et une fonction continue $f$ sur $[-a, a]$. L'intégrale $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ est toujours égale à 0 si $\boldsymbol{f}$ **est impaire**.

**2.** Soit $I_1 = \int_0^1 \frac{t\, dt}{\sqrt{1+3t^2}}$.
On reconnaît une dérivée de composée (du type $u'u^\alpha$), donc $I_1 = \left[\frac{1}{3}\sqrt{1+3t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.

**3.** Soit $I_2 = \int_0^1 x\mathrm{Arctan}x\, dx$. On fait une intégration par parties avec $u = \mathrm{Arctan}x$, $v' = x$, $u' = \frac{1}{x^2+1}$, $v = \frac{1}{2}x^2$, d'où

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[x^2\mathrm{Arctan}x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx.$$

$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$ donc $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = [x - \mathrm{Arctan}x]_0^1$.
Finalement, $I_2 = \frac{1}{2}\left[x^2\mathrm{Arctan}x - x + \mathrm{Arctan}x\right]_0^1 = \mathrm{Arctan}1 - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

**4.** Soit $I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$. Sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, $x \mapsto \tan\frac{x}{2}$ est une bijection (car strictement croissante) donc on peut faire le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$.
On a $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $du = \frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})dx$ donc $dx = \frac{2du}{1+u^2}$.
On écrit $\frac{dx}{2-\cos x} = \frac{2du}{(1+u^2)\left(2-\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \frac{2du}{2+2u^2-(1-u^2)} = \frac{2du}{1+3u^2}$.
Les bornes deviennent $\tan 0 = 0$ et $\tan(\pi/4) = 1$. Donc $I_3 = \int_0^1 \frac{2du}{1+3u^2}$.
$I_3 = \int_0^1 \frac{2du}{1+(\sqrt{3}u)^2} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}u)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

**5.** Soit $F(x) = \dfrac{2x^2+1}{(x+1)^2(x-2)}$. Le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, donc la décomposition en éléments simples de $F(x)$ est de la forme
$\dfrac{2x^2+1}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+1}$.

On mutiplie des 2 côtés par $x-2$ et on prend $x=2$ : on trouve $1 = A$.
On mutipliple des 2 côtés par $(x+1)^2$ et on prend $x=-1$ : on trouve $-1 = B$.
On prend $x = 0$ : on trouve $-\frac{1}{2} = -\frac{A}{2} + B + C$, d'où $C = 1$.
Finalement, la décomposition en éléments simples s'écrit $F(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1}$.

**6.** On considère l'équation différentielle $(E)\quad y' = -2xy + x$.
L'équation homogène associée est $(H)\quad y' + 2xy = 0$. Comme $x^2$ est une primitive de $2x$, la solution de (H) est : $y_H(x) = \lambda e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Variation de la constante : soit $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x^2}$. On a $y_0'(x) = \lambda'(x)e^{-x^2} - 2x\lambda(x)e^{-x^2}$, donc $y_0'(x) + 2xy_0(x) - x = \lambda'(x)e^{-x^2} - x$. Donc $y_0$ est une solution particulière de (E) si et seulement si $\lambda'(x) = xe^{x^2}$. Or $\lambda(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive de $xe^{x^2}$, donc $y_0(x) = \lambda(x)e^{-x^2} = \frac{1}{2}$ est une solution particulière de $(E)$.
On en déduit que la solution générale de (E) est $y(x) = \lambda e^{-x^2} + \frac{1}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La condition initiale $y(1) = 0$ implique que $\lambda e^{-1} + \frac{1}{2} = 0$, donc $\lambda = -\frac{e}{2}$.
On a donc $y(2) = \lambda e^{-4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-3})$.