Corrigé du problème 1

Exercice 1.

a) Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est définie continue sur $]0,+\infty[$, elle admet donc une unique primitive qui s'annule en 1.

b) On calcule F_1 par intégration par parties :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F_1(x) = \int_1^x \ln t \ dt$$

En posant, pour $t \in]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = \ln t \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{1}{t} \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[, \qquad F_1(x) &= \int_1^x u'(t)v(t) \ dt \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)dt \\ &= [t\ln t]_1^x - \int_1^x dt \\ &= x\ln x - x + 1 \end{aligned}$$

c) Pour $n \geq 1$, on peut faire une intégration par partie :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F_{n+1}(x) = \int_1^x (\ln t)^{n+1} \ dt$$

En posant, pour $t \in]0,+\infty[$:

$$\begin{array}{ll} u'(t) = 1 & v(t) = (\ln t)^{n+1} \\ u(t) = t & v'(t) = \dfrac{n+1}{t}(\ln t)^n \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,+\infty[, \qquad F_n(x) &= \int_1^x u'(t)v(t) \ dt \\ &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)dt \\ &= \left[t(\ln t)^{n+1}\right]_1^x - (n+1)\int_1^x (\ln t)^n dt \\ &= x(\ln x)^{n+1} - (n+1)F_n(x) \end{aligned}$$

d) On peut montrer par récurrence : $\forall n \geq 1, \quad (H_n) : \lim\limits_{x\to 0^+} F_n(x) = (-1)^{n+1} n!$.

- Pour $n = 1$, on a :

  $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F_1(x) = x\ln x - x + 1$$

  mais $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F_1(x) = 1$ et l'identité H_1 est vérifiée.

- Supposons que la formule H_n soit vérifiée pour $n \geq 1$ fixé : $\lim\limits_{x\to 0^+} F_n(x) = (-1)^{n+1} n!$. Mais alors,

  $$\forall x \in]0,+\infty[, \quad F_{n+1}(x) = x(\ln x)^{n+1} - (n+1)F_n(x)$$

  or $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^{n+1} = 0$ et donc on obtient bient le résultat H_{n+1}.

- En conclusion :

  $$\begin{cases} H_1 \text{ est vraie} \\ \text{Pour } n \geq 1 \ H_n \text{ implique } H_{n+1} \end{cases}$$

  et donc, par récurrence

  $$\forall n \geq 1, \quad \lim_{x\to 0^+} F_n(x) = (-1)^{n+1} n!$$

Exercice 2.

a) On remarque que

$$(X^4-1)=((X^2)^2-1)=(X^2-1)(X^2+1)=(X-1)(X+1)(X^2+1)$$

On a donc une décomposition en éléments simples du type :

$$R(X)=\frac{1}{X^4-1}=\frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{A}{X-1}+\frac{B}{X+1}+\frac{CX+D}{X^2+1}$$

- Si on multiplie $R(X)$ par $X-1$ puis on fait $X=1$, alors : $A=1/4$.
- Si on multiplie $R(X)$ par $X+1$ puis on fait $X=-1$, alors : $B=-1/4$.
- Si on calcule $R(0)$, alors $-1=-A+B+D$ et donc $D=-1/2$.
- Si on multiplie par X et qu'on fait tendre X vers $+\infty$, alors $0=A+B+C$ et donc $C=0$.

On a finalement :

$$R(X)=\frac{1}{X^4-1}=\frac{1}{(X-1)(X+1)(X^2+1)}=\frac{1/4}{X-1}-\frac{1/4}{X+1}-\frac{1/2}{X^2+1}$$

b) Le dénominateur de f s'annule si et seulement si $\cos x=\pm\sqrt{2}/2$, et il est facile de voir que cela n'arrive pas sur $I=]-\pi/4,\pi/4[$. La fonction f est donc définie continue sur I : Elle admet des primitives, définies à une constante près, sur I.

c) La fonction $x\mapsto\tan x$ est définie, dérivable sur I et sa dérivée ne s'annule pas : $\tan' x=1+\tan^2 x$. On peut donc effectuer le changement de variable $u=\tan x$ sur I. On remarque que

$$du=(1+\tan^2 x)dx=(1+u^2)dx$$

et donc

$$dx=\frac{1}{1+u^2}du$$

De plus

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+u^2}$$

donc

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}dx &= \int\frac{1/(1+u^2)}{1-2/(1+u^2)}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= \int\frac{1}{(1+u^2)-2}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= \int\frac{1}{(u^2-1)(u^2+1)}du\\ &= \int R(u)du\end{aligned}$$

Grâce à la décomposition en éléments simples de R, on trouve

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}dx &= \int R(u)du\\ &= \int\left(\frac{1/4}{u-1}-\frac{1/4}{u+1}-\frac{1/2}{u^2+1}\right)du\\ &= \frac{1}{4}\ln|u-1|-\frac{1}{4}\ln|u+1|-\frac{1}{2}\arctan u+C\\ &= \frac{1}{4}\ln|\tan x-1|-\frac{1}{4}\ln|\tan x+1|-\frac{1}{2}\arctan(\tan x)+C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle.

Comme sur I, $-1<\tan x<1$ et $\arctan(\tan x)=x$, on trouve finalement

$$\int\frac{\cos^2 x}{1-2\cos^2 x}dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)-\frac{x}{2}+C$$