Correction de l'exercice 4 de la feuille 2

On considère les équations différentielles

$$\begin{array}{lrcl} (E) & (x^2-3x+2)y'-y & = & x-2 \\ (H) & (x^2-3x+2)z'-z & = & 0 \end{array}$$

Comme $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, les solutions vont être définies sur $I_1=]-\infty,1[$, $I_2=]1,2[$ et $I_3=]2,+\infty[$.

1. <u>Solutions de (H)</u>:
Sur l'un des intervalles,

$$z'(x)=\frac{1}{(x-1)(x-2)}z(x)$$

Or $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int(-\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)})dx=\ln\left(\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\right)$, donc:

- sur I_1, $z(x)=\lambda\frac{2-x}{1-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
- sur I_2, $z(x)=\mu\frac{2-x}{x-1}$, $\mu\in\mathbb{R}$
- sur I_3, $z(x)=\nu\frac{x-2}{x-1}$, $\nu\in\mathbb{R}$

<u>Solution particulière de (E)</u> par la méthode de variation de la constante:
Sur l'un des intervalles ci-dessus, on pose $y(x)=\lambda(x)Z(x)$ où $Z(x)=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$.
Alors en remplaçant dans l'équation (E), on obtient

$$(x-1)(x-2)\lambda'(x)Z(x)+\lambda(x)\left((x^2-3x+2)Z'(x)-Z(x)\right)=x-2$$

et comme Z est solution de (H), cette équation équivaut à:

$$(x-1)(x-2)\lambda'(x)Z(x)=x-2$$

d'où $\lambda'(x)=\frac{1}{(x-1)Z(x)}$.

- sur I_1, $\lambda'(x)=\frac{1}{x-2}$ donc $\lambda(x)=\ln(|x-2|)=\ln(2-x)$ convient.
- sur I_2, $\lambda'(x)=\frac{1}{2-x}$ donc $\lambda(x)=-\ln(2-x)$ convient.
- sur I_3, $\lambda'(x)=\frac{1}{x-2}$ donc $\lambda(x)=\ln(|x-2|)=\ln(x-2)$ convient.

<u>Solutions de (E)</u>:

- sur I_1, $y(x)=(\ln(2-x)+\lambda)\frac{2-x}{1-x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$
- sur I_2, $y(x)=(-\ln(2-x)+\mu)\frac{2-x}{x-1}$, $\mu\in\mathbb{R}$
- sur I_3, $y(x)=(\ln(x-2)+\nu)\frac{x-2}{x-1}$, $\nu\in\mathbb{R}$

2. Solutions de (E) sur $]-\infty, 2[$:
En $x=1$, l'équation (E) donne $y(1)=1$.
Or sur I_1, pout tout λ, $\lim\limits_{x \to 1^-} y(x) = \pm\infty$ et pour tout μ, $\lim\limits_{x \to 1^+} y(x) = \pm\infty$.
Une solution de (E) sur I_1 ou I_2 ne peut donc pas être prolongée de façon continue.

3. Solutions de (E) sur $]1, +\infty[$:

- Soit Ψ une solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

En $x=2$, l'équation (E) donne $\Psi(2)=0$.
D'après la question **1.**, il existe μ et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in]1, 2[\quad \Psi(x) = (-\ln(2-x)+\mu)\frac{2-x}{x-1}$$

et

$$\forall x \in]2, +\infty[\quad \Psi(x) = (\ln(x-2)+\nu)\frac{x-2}{x-1}$$

- Si Ψ est définie ainsi, Ψ est-elle solution de (E)?

Il suffit de vérifier que Ψ est dérivable en 2.
Tout d'abord, Ψ est continue en 2 (car les puissances l'emportent sur les logarithmes par croissance comparée).
Ensuite,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\Psi(x)-\Psi(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (\ln(2-x)-\mu)\frac{1}{x-1} = -\infty$$

pour tout $\mu \in \mathbb{R}$.
La limite de l'accroissement fini n'est pas finie, Ψ n'est donc pas dérivable en 2 et ne peut donc pas être solution de (E).
Il n'y a donc pas de solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

4. On veut ici $y'(0) = \ln(2) - 1$.
Tout d'abord d'après ce qui précède, la solution y sera définie sur I_1 et en remplaçant dans (E) on trouve $y(0) = 2\ln(2)$. Il faut donc $\lambda = 0$, d'où $y(x) = \ln(2-x)\frac{2-x}{1-x}$.