Correction de la question 4 de l'exercice 2 de la feuille 2

On considère les équations différentielles

$$\begin{array}{lrcl} (E) & (1-x^2)y' + (2x+1)y & = & 1 \\ (H) & (1-x^2)y' + (2x+1)y & = & 0 \end{array}$$

Les 3 premières questions donnent:

- sur $]-\infty,-1[$, les solutions de (H) sont $z_1(x) = \lambda\sqrt{(1-x)^3(-1-x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E) sont $y_1(x) = P(x) + \lambda\sqrt{(1-x)^3(-1-x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- sur $]-1,1[$, les solutions de (H) sont $z_2(x) = \mu\sqrt{(1-x)^3(1+x)}$, $\mu \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E) sont $y_2(x) = P(x) + \mu\sqrt{(1-x)^3(1+x)}$, $\mu \in \mathbb{R}$
- sur $]1,+\infty[$, les solutions de (H) sont $z_3(x) = \nu\sqrt{(x-1)^3(1+x)}$, $\nu \in \mathbb{R}$ et les solutions de (E) sont $y_3(x) = P(x) + \nu\sqrt{(x+1)^3(1+x)}$, $\nu \in \mathbb{R}$

avec $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Dans la question **4.**, on veut trouver, s'il en existe, des solutions de (H) et (E) sur $]-\infty,1[$ et $]-1,+\infty[$.

En $x=-1$, l'équation (E) nous donne $y(-1) = -1$ et en $x = 1$, on obtient $y(1) = \frac{1}{3}$. Pour l'équation (H), on obtient $y(-1) = 0$ et $y(1) = 0$ (*).

Tout d'abord, on peut remarquer que la fonction nulle est solution de (H) sur $\mathbb{R}$ et que P est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Elles sont donc des solutions sur $]-\infty,1[$ et sur $]-1,+\infty[$.

. Solution de (H) sur $]-\infty,1[$**:**

Supposons par l'absurde que Ψ est une solution de (H) sur $]-\infty,1[$ et que Ψ est différente de la fonction nulle. Alors Ψ est dérivable et vérifie (H). $\Psi_{|]-\infty,-1[}$ est donc solution de (H) sur $]-\infty,-1[$. D'après la question **1.**, il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ telle que

$$\forall x \in]-\infty,-1[\quad \Psi(x) = \lambda\sqrt{(1-x)^3(-1-x)}$$

Or Ψ est dérivable en $x=-1$, c'est à dire que la limite en $x=-1$ de $\frac{\Psi(x)-\Psi(-1)}{x+1}$ existe dans $\mathbb{R}$. Or $\Psi(-1) = 0$ d'après (*), donc $\frac{\Psi(x)-\Psi(-1)}{x+1} = -\lambda\sqrt{\frac{(1-x)^3}{(-1-x)}}$ pour $x < -1$ et cette fraction n'admet pas de limite finie en $x=-1$, d'où une contradiction avec l'hypothèse de dérivabilité. Il n'existe donc pas d'autre solution de (H) sur $]-\infty,1[$ que la fonction nulle.

. Solution de (E) sur $]-\infty,1[$**:**

Si ζ est solution de (E) sur $]-\infty,1[$, $\zeta - P$ et solution de (H) sur $]-\infty,1[$, donc d'après ce qui précède, $\zeta - P = 0$. P est donc la seule solution de (E) sur $]-\infty,1[$.

. **Solution de (H) sur** $]-1,+\infty[$**:**

- Soit Ψ une solution de (H) sur $]-1,+\infty[$.
  Ψ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
  $\Psi_{|]-1,1[}$ est solution de (H) sur $]-1,1[$, donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]-1,1[\quad \Psi(x) = \mu\sqrt{(1-x)^3(1+x)}.$$

  D'après (*), $\Psi(1) = 0$.
  Enfin, $\Psi_{|]1,+\infty[}$ est solution de (H) sur $]1,+\infty[$, donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad \Psi(x) = \nu\sqrt{(x-1)^3(1+x)}.$$

- Réciproquement, une fonction ainsi définie est-elle solution de (H)?
  Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{R}$ quelconques.
  On pose

$$\Phi(x) = \begin{cases} \mu\sqrt{(1-x)^3(1+x)} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \nu\sqrt{(x-1)^3(1+x)} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

  On sait déjà que la fonction vérifie l'équation (elle a été construite pour cela!), il ne nous reste qu'à montrer qu'elle est dérivable.
  On remarque tout d'abord que Φ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-1,1[\cup]1,+\infty[$.
  Φ est-elle dérivable en 1?
  On calcul la limite de l'accroissement fini de Φ en 1:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\Phi(x)-\Phi(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \mu\sqrt{1-x^2} = 0$$

  et

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\Phi(x)-\Phi(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \nu\sqrt{x^2-1} = 0$$

  Donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{\Phi(x)-\Phi(1)}{x-1} = 0$$

  Φ est dérivable en 1, donc Φ est dérivable sur $]-1,+\infty[$.

En conclusion, les solutions de (H) sur $]-1,+\infty[$ sont les fonctions

$$\Phi(x) = \begin{cases} \mu\sqrt{(1-x)^3(1+x)} & \text{si } x \in]-1,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \nu\sqrt{(x-1)^3(1+x)} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

pour tout μ et ν dans $\mathbb{R}$.

. **Solution de (E) sur** $]-1,+\infty[$**:**

Comme précedemment, le solutions de (E) sont les $P + \Phi$ avec Φ comme ci-dessus.