Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S2SM
2003-2004

Mathématiques
Corrigé du devoir 5

Exercice 1 (a) La famille $\{1, X, X^2, X^3\}$ est une base de E, on a donc $\dim_{\mathbb{R}}(E) = 4$.

(b) Si $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\delta_a(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(a) = P(a) + \lambda Q(a)$ soit $\delta_a(P + \lambda Q) = \delta_a(P) + \lambda\delta_a(Q)$. L'application δ_a est donc linéaire.

(c) D'après la question précédente, les composantes de φ sont des applications linéaires, il en est donc de même de φ.
Pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on a $\varphi(X^i) = (a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i)$. La matrice de φ dans les bases canoniques est donc

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & a_0^3 \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \end{bmatrix}.$$

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a alors

$$P(a_0) = P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = 0.$$

Le polynôme P est de degré ≤ 3 et a quatre racines distinctes : il est nul. On a donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
D'après le théorème noyau-image, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(E) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\varphi))$$

donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(\varphi)) = 4$ d'après la question (a) et ce qui précède. On a donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^4$ et φ est surjective : c'est un isomorphisme.

(d) Soient $i, j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Si $i \neq j$, on a $\delta_{a_j}(L_i) = L_i(a_j) = 0$. Par ailleurs, on a $\delta_{a_i}(L_i) = L_i(a_i) = 1$. On a donc

$$\varphi(L_0) = (1, 0, 0, 0), \quad \varphi(L_1) = (0, 1, 0, 0), \quad \varphi(L_2) = (0, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(L_3) = (0, 0, 0, 1).$$

L'image par φ de la famille $\mathfrak{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Comme φ est un isomorphisme, la famille $\mathfrak{B}$ est une base de E.
Soit $P \in E$. On a $\varphi(P) = \big(P(a_0), P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big)$. Le calcul des $\varphi(L_i)$ montre alors que

$$\big(P(a_0), P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) = P(a_0)\varphi(L_0) + P(a_1)\varphi(L_1) + P(a_2)\varphi(L_2) + P(a_3)\varphi(L_3).$$

Par linéarité de φ, on a

$$P(a_0)\varphi(L_0) + P(a_1)\varphi(L_1) + P(a_2)\varphi(L_2) + P(a_3)\varphi(L_3) = \varphi\big(P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3\big).$$

On a donc

$$\varphi(P) = \varphi\big(P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3\big).$$

Comme φ est un isomorphisme, on a bien

$$P = P(a_0)L_0 + P(a_1)L_1 + P(a_2)L_2 + P(a_3)L_3$$

(c'est l'écriture de P dans la base $\mathfrak{B}$).

Exercice 2 (a) La famille $\mathfrak{B}$ a trois éléments. Comme $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$, pour montrer que $\mathfrak{B}$ est une base, il suffit de montrer que c'est une famille génératrice.
Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $e_3 = u_1 - u_2$, donc $e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{B})$, d'où $e_1 = u_3 - 2e_3 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{B})$ et $e_2 = u_2 - e_1 \in \mathrm{Vect}(\mathfrak{B})$. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(\mathfrak{B})$ contient la base canonique : c'est $\mathbb{R}^3$. La famille $\mathfrak{B}$ est donc génératrice, et c'est une base.
Remarque : on peut aussi montrer que $\mathfrak{B}$ est une base en vérifiant que c'est une famille libre (en résolvant un système).

(b) D'après la question (a), on a $e_3 = u_1 - u_2$, $e_1 = u_3 - 2e_3 = -2u_1 + 2u_2 + u_3$ et $e_2 = u_2 - e_1 = 2u_1 - u_2 - u_3$. On a donc

$$\begin{aligned} g(e_1) &= -2g(u_1) + 2g(u_2) + g(u_3) \\ &= -2(2u_1 + u_2) + 2(3u_1 - u_2 + u_3) + (-u_1 + 4u_2 + 2u_3) \\ &= u_1 + 4u_3 \\ &= (e_1 + e_2 + e_3) + 4(e_1 + 2e_3) \\ &= 5e_1 + e_2 + 9e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_2) &= 2g(u_1) - g(u_2) - g(u_3) \\ &= 2(2u_1 + u_2) - (3u_1 - u_2 + u_3) - (-u_1 + 4u_2 + 2u_3) \\ &= 2u_1 - u_2 - 3u_3 \\ &= 2(e_1 + e_2 + e_3) - (e_1 + e_2) - 3(e_1 + 2e_3) \\ &= -2e_1 + e_2 - 4e_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(e_3) &= g(u_1) - g(u_2) \\ &= (2u_1 + u_2) - (3u_1 - u_2 + u_3) \\ &= -u_1 + 2u_2 - u_3 \\ &= -(e_1 + e_2 + e_3) + 2(e_1 + e_2) - (e_1 + 2e_3) \\ &= e_2 - 3e_3 \end{aligned}$$

La matrice de g dans la base canonique est donc

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Calcul de $\mathrm{Ker}(g)$ et de $\mathrm{Im}(g)$.
On a $xu_1 + yu_2 + zu_3 \in \mathrm{Ker}(g)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x & +3y & -z & = 0 & (L1) \\ x & -y & +4z & = 0 & (L2) \\ & y & +2z & = 0 & (L3) \end{cases} \iff \begin{cases} x & -y & +4z & = 0 & (L2) \\ & y & +2z & = 0 & (L3) \\ & & -19z & = 0 & (L1) - 2(L2) - 5(L3) \end{cases}$$

et donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, soit $\mathrm{Ker}(g) = \{0\}$.
D'après le théorème noyau-image, on a

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(g)) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(g)),$$

donc $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Im}(g)) = 3$, *i.e.* $\mathrm{Im}(g) = \mathbb{R}^3$.