Corrigé du devoir 1

Exercice 1 Pour tout entier $n \geq 0$, on note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \sin^n(x)$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, I_n est donc bien définie.

b) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$.
Par théorème de comparaison des intégrales, on obtient donc $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$.

c) On calcule I_{n+2} par une intégration par parties, en posant :

$$\begin{array}{rr} u'(x) = \sin(x) & v(x) = \sin^{n+1}(x) \\ u(x) = -\cos(x) & v'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x) \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)\,dx \\ &= [u(x)v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)\,dx \\ &= \left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^n(x)\,dx \end{aligned}$$

$\left[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$ et comme $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x))\sin^n(x)\,dx \\ &= (n+1)\,(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

De plus $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
Donc si n est pair, $I_n = \frac{(n-1)(n-3)...1}{n(n-2)...2}\frac{\pi}{2}$
et si n est impair, $I_n = \frac{(n-1)(n-3)...2}{n(n-2)...3}$.

d) La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie et dérivable de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, 1]$, on peut donc effectuer le changement de variable $u = \cos(x)$ sur [0,1].
On a alors $du = -\sin(x)dx$ et comme $\cos^2(x) - 1 = -\sin^2(x)$, on obtient :

$$\int_0^1 (u^2-1)^n du = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2(x) - 1)^n \sin(x)\,dx = (-1)^{n+1} I_{2n+1}.$$

Exercice 2

a) D'après le théorème de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples :

$$R(X) = \frac{4X}{(1+X)^2(1+X^2)} = \frac{a}{1+X} + \frac{b}{(1+X)^2} + \frac{cX+d}{1+X^2}.$$

Pour trouver les coefficients a, b, c et d, il y a plusieurs possibilités, par exemple :

- Si on multiplie $R(X)$ par $(1+X)^2$ puis on fait $X=-1$, on obtient $b=-2$.
- Si on multiplie par X et qu'on fait tendre X vers $+\infty$, on a $a+c=0$
- Si on calcule $R(0)$, on a $0=a+b+d$.
- Enfin, si on calcule $R(1)$, on obtient $\frac{1}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c+d}{2}$, c'est à dire $1=a+\frac{b}{2}+c+d$

Comme $a+c=0$ et $b=-2$, la dernière équation nous donne $d=2$, donc $a=0$ d'après la troisième équation et par conséquent $c=0$. On a finalement:

$$R(X)=\frac{-2}{(1+X)^2}+\frac{2}{1+X^2}$$

b) Le dénominateur de f s'annule si et seulement si $\sin(x)=-1$, c'est à dire si et seulement si $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{N}$. Donc f est bien définie et continue sur $I=]-\frac{\pi}{2},\pi[$. f admet donc des primitives sur I, définies à une constante près.

c) La fonction $\varphi : x\mapsto \tan(\frac{x}{2})$ est définie, dérivable sur I et sa dérivée ne s'annulle pas: $\varphi'(x)=\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))$. On peut donc effectuer le changement de variable $u=\tan(\frac{x}{2})$. Alors:

$$dx=\frac{2}{1+u^2}du$$

et

$$\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int \frac{2u}{1+u^2+2u}\frac{2du}{1+u^2}\\ &= \int \frac{4u}{(1+u)^2(1+u^2)}du\\ &= \int R(u)du\end{aligned}$$

On utilise alors la décomposition en éléments simples obtenue à la question **a)** :

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \left(\frac{-2}{(1+u)^2}+\frac{2}{1+u^2}\right)du\\ &= \frac{2}{1+u}+2\arctan(u)+C\\ &= \frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}+2\arctan(\tan(\frac{x}{2}))+C\end{aligned}$$

où C est une constante réelle.
Comme $x\in]-\frac{\pi}{2},\pi[$, $\frac{x}{2}\in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$, donc $\arctan(\tan(\frac{x}{2}))=\frac{x}{2}$. D'où

$$\int f(x)dx=\frac{2}{1+\tan(\frac{x}{2})}+x+C$$