Université Paris-Sud S2SM, 2003–2004

Corrigé de l'examen partiel de mathématiques du 26 mars 2004

Exercice 1. En utilisant les formules de duplication des lignes trigonométriques, on obtient

$$4\cos^2 x\,\sin 2x = 2(1+\cos 2x)\sin 2x = 2\sin 2x + \sin 4x, \tag{1}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 x\,\sin 2x\,\mathrm{d}x = \Big[-\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x\Big]_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Pour établir l'identité (1) on aurait aussi pu procéder ainsi :

$$\begin{aligned}
4\cos^2 x\,\sin 2x &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^2(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})\\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}}\,(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x})\\
&= \sin 4x + 2\sin 2x.
\end{aligned}$$

Exercice 2. L'équation caractéristique est $r^2+r-2=0$. Ses racines sont 1 et -2. Les solutions de l'équation homogène $y''+y'-2y=0$ sont donc les fonctions $\lambda\mathrm{e}^x+\mu\mathrm{e}^{-2x}$, où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

On sait que les solutions de l'équation proposée s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

On sait que, vu la forme du second membre ($P(x)\mathrm{e}^{sx}$, où P est un polynôme), on peut rechercher une solution particulière sous la forme $Q(x)\mathrm{e}^{sx}$, où Q est un polynôme, de même degré que P si s n'est pas racine de l'équation caractéristique, et sinon, de degré égal au degré de P augmenté de 1 si s est racine simple et de 2 si s est racine double.

Ici, nous avons deux cas à distinguer (ne pas oublier que le paramètre s est supposé positif).

1. $s \neq 1$.
   On cherche une solution sous la forme $y=(ax+b)\mathrm{e}^{sx}$. On a alors $y'=(asx+a+bs)\mathrm{e}^{sx}$ et $y''=\big(s(asx+a+bs)+as\big)\mathrm{e}^{sx}$, d'où $y''+y'-2y=\big(a(s^2+s-2)\,x+b(s^2+s-2)+a(2s+1)\big)\mathrm{e}^{sx}$.

Les coefficients a et b sont donc déterminés par les équations $a(s^2+s-2) = 2$ et $b(s^2+s-2)+a(2s+1) = 0$. En définitive,

$$a = \frac{2}{(s^2+s-2)} \quad \text{et} \quad b = -\frac{2(2s+1)}{(s^2+s-2)^2}.$$

2. $s = 1$
   Comme il s'agit d'une racine simple, on cherche une solution sous la forme $y = (ax^2+bx)\mathrm{e}^x$. On a

$$\begin{aligned} y &= (ax^2+bx)\mathrm{e}^x, \\ y' &= \big(ax^2+(b+2a)x+b\big)\mathrm{e}^x, \\ y'' &= \big(ax^2+(b+4a)x+2b+2a\big)\mathrm{e}^x, \end{aligned}$$

   d'où

$$y''+y'-2y = (6ax+2a+3b)\mathrm{e}^x.$$

   En définitive, on obtient $a = \dfrac{1}{3}$ et $b = -\dfrac{2}{9}$.

Exercice 3.

1. La décomposition de cette fraction est de la forme

$$\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+1}, \tag{2}$$

   où α, β et γ sont des nombres réels (il n'y a pas de partie polynomiale, car le degré du numérateur est strictement pus petit que celui du dénominateur).
   Pour obtenir α, on multiplie les deux membres de (2) par x, on effectue les simplifications et on remplace x par 0. On obtient $\alpha = 1$.
   Pour obtenir β et γ, on multiplie les deux membres de (2) par x^2+1, on effectue les simplifications et on remplace x par i. On obtient $\mathrm{i}\beta+\gamma = -1/\mathrm{i}$. Comme β et γ sont réels, cela donne $\beta = 1$ et $\gamma = 0$.
2. Occupons-nous d'abord de l'équation homogène. On sait qu'une telle équation possède des solutions définies sur chaque intervalle où les coefficients a et b de y' et y sont continus et où a ne s'annule pas et que ces solutions sont de la forme $C\,\mathrm{e}^{-F(x)}$, où C est une constante et F une primitive de $-b/a$ sur l'intervalle en question.
   Ici, $a(x) = x(x^2+1)$ et $b(x) = -(2x^2+1)$, de sorte que l'équation est à étudier sur chacune des demi-droites $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On a, compte tenu du résultat de la première question,

$$F(x) = \int \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \ln\Big(|x|\sqrt{x^2+1}\Big) + \text{Cte}.$$

   Ainsi les solutions de l'équation homogène sont les fonctions qui s'écrivent $Cx\sqrt{x^2+1}$.
   Nous savons que, sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$, on obtient toutes les solutions de l'équation proposée en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène associée.

Reste donc à obtenir une solution particulière. On la cherche sous la forme $y = \lambda(x)\, x\sqrt{x^2+1}$. On a alors

$$\begin{aligned}
&x(x^2+1)y' - (2x^2+1)y \\
&\quad = x(x^2+1)\left(x\,\lambda'(x)\sqrt{x^2+1} + \lambda(x)\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,\lambda(x)\right) \\
&\qquad\qquad - x\,\lambda(x)\,(2x^2+1)\sqrt{x^2+1} \\
&\quad = x^2(x^2+1)^{3/2}\lambda'(x) + \big(x(x^2+1) + x^3 - x(2x^2+1)\big)\;\lambda(x)\sqrt{x^2+1} \\
&\quad = x^2(x^2+1)^{3/2}\lambda'(x).
\end{aligned}$$

Reportant dans l'équation, on obtient $\lambda'(x) = x\sqrt{x^2+1}$, soit $\lambda(x) = \frac{1}{3}\,(x^2+1)^{3/2} + \text{Cte}$.
Ainsi, les solutions cherchées sont les fonctions

$$\frac{1}{3}\,x(x^2+1)^2 + C\,x\sqrt{x^2+1},$$

où C est une constante arbitraire.

Exercice 4. On considère le système

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x+3y-z+5t &=& 4 \\
x+4y-2z+7t &=& -1 \\
-y+\lambda z-3t &=& 4 \\
x+3y+(\lambda-2)z+4t &=& \lambda+1
\end{array}\right.$$

En utilisant comme pivot le coefficient de x dans la première ligne, on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x+3y-z+5t &=& 4 \\
y-z+2t &=& -5 \\
-y+\lambda z-3t &=& 4 \\
(\lambda-1)z-t &=& \lambda-3
\end{array}\right.$$

En utilisant comme pivot le coefficient de y dans la seconde ligne, on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x+3y-z+5t &=& 4 \\
y-z+2t &=& -5 \\
(\lambda-1)z-t &=& -1 \\
(\lambda-1)z-t &=& \lambda-3
\end{array}\right.$$

En remplaçant la dernière ligne par la différence des quatrième et troisième lignes, on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcl}
x+3y-z+5t &=& 4 \\
y-z+2t &=& -5 \\
(\lambda-1)z-t &=& -1 \\
0 &=& \lambda-2
\end{array}\right.$$

Si $\lambda \neq 2$, le système est incompatible.

Lorsque $\lambda = 2$, on a à résoudre le système échelonné

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3y - z + 5t & = & 4 \\ y - z + 2t & = & -5 \\ z - t & = & -1 \end{array} \right.$$

On peut prendre x, y et z comme inconnues principales et t comme inconnue secondaire. Il vient $z = t - 1$, puis $y = (t-1) - 2t - 5$, soit $y = -t - 6$ et $x = 3(t+6) + (t-1) - 5t + 4$, soit $x = -t + 21$. Finalement, t est arbitraire, $x = -t + 21$, $y = -t - 6$ et $z = t - 1$.

Exercice 5.

1. La fonction $u \mapsto \dfrac{1}{1 + \cos^2 u}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$, c'est la primitive de $\frac{1}{1+\cos^2 u}$ qui s'annule au point 0.
2. La fonction tan est dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Si $|x| < \pi/2$, l'intervalle fermé d'extrémités 0 et x est contenu dans I ; le changement de variable $t = \tan u$ est donc licite. On a $\mathrm{d}t = (1 + \tan^2 u)\,\mathrm{d}u = (1 + t^2)\,\mathrm{d}u$, d'où
$$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)} = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tan x\right)$$
3. La fonction F, étant dérivable, est continue, en particulier au point $\dfrac{\pi}{2}$. On a donc
$$F(\frac{\pi}{2}) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} F(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 6. L'intégrande est impair et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0. L'intégrale est donc nulle. En effet, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin(x^{2001})}{2 + \sqrt{1 + x^4}}\, dx = \int_{1}^{-1} \frac{\sin((-t)^{2001})}{2 + \sqrt{1+t^4}}\,(-dt) = -\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t^{2001})}{2 + \sqrt{1+t^4}}\, dt.$$