Université Paris–Sud
Centre d'Orsay

S2SM
Mathématiques
2003/2004

Corrigé du devoir 4

Exercice 1.

a) Par définition de F_λ, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est génératrice de F_λ. Elle est une base de F_λ si et seulement si elle est libre. Etudions l'indépendance linéaire de $\{u, v, w_\lambda\}$.

Déterminons les triplets de réels (a, b, c) tels que $au + bv + cw_\lambda = 0$, c'est-à-dire ceux qui sont solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+b-3c=0 \\ 2a+4c=0 \\ 2a+2b+\lambda c=0 \end{cases}.$$

On applique la méthode du pivot :

$$(S) \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ \quad 2b-2c=0 \\ -2b+2c=0 \\ (\lambda-2)c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ \qquad b-c=0 \\ (\lambda-2)c=0 \end{cases}$$

Si $(\lambda - 2) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq 2$, (S) est un système de 3 inconnues et de rang 3. Il possède une unique solution qui est $(0, 0, 0)$ ((S) est homogène). Si $\lambda = 2$, (S) est de rang 2. L'ensemble des solutions est $\{(-2c, c, c), c \in \mathbf{R}\}$.

Par conséquent, si $\lambda \neq 2$, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est libre. Elle forme une base de F_λ.

Si $\lambda = 2$, la famille $\{u, v, w_\lambda\}$ est liée et $-2u + v + w_2 = 0$ (en considérant la solution où $c = 1$). Ainsi, w_2 est combinaison de u et v : la famille $\{u, v\}$ est encore génératrice de F_2. Elle est libre car u et v ne sont pas colinéaires. Donc, $\{u, v\}$ est une base de F_2.

On en déduit immédiatement : $\dim F_\lambda = 3$ si $\lambda \neq 2$; $\dim F_\lambda = 2$ si $\lambda = 2$.

Pour obtenir un système d'équations cartésiennes de F_λ, il suffit de déterminer les conditions de compatibilité du système d'inconnues a, b, c

$$(S') \quad \begin{cases} a+b+c=x \\ -a+b-3c=y \\ 2a+4c=z \\ 2a+2b+\lambda c=t \end{cases}$$

en fonction des paramètres x, y, z, t.

En reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$(S') \iff \begin{cases} a+b+c=x \\ \quad 2b-2c=y+x \\ \qquad 0=z-x+y \\ (\lambda-2)c=t-2x \end{cases}.$$

Par conséquent, si $\lambda \neq 2$, il y a une seule condition de compatibilité, à savoir $z - x + y = 0$. Ceci est une équation cartésienne de F_λ.

Si $\lambda = 2$, les conditions de compatibilité de F_2 sont $\begin{cases} z-x+y=0 \\ \quad t-2x=0 \end{cases}$. Ceci forme un système d'équations cartésiennes de F_2.

b) On a : $(x, y, z, t) \in G \iff x = -y + 2z - 2t \iff (x, y, z, t) = y(-1, 1, 0, 0) + z(2, 0, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1)$.
Donc $\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ est une famille génératrice de G. Elle est libre car le système d'équations $a(-1, 1, 0, 0)+b(2, 0, 1, 0)+c(-2, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire $(-a+2b-2c, a, b, c) = (0, 0, 0, 0)$, a pour unique solution $(0, 0, 0)$. Ainsi, la famille $\{(-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)\}$ est une base de G et G est de dimension 3.

Un système d'équations paramétriques est : $x = -y + 2z - 2t, y, z, t \in \mathbf{R}$.

c) On obtient un système d'équations cartésiennes de $G \cap F_0$ en rassemblant un système d'équations cartésiennes de G et un de F_0, soit $\begin{cases} x + y - 2z + 2t = 0 \\ z - x + y = 0 \end{cases}$. Ce système est de rang 2 (prendre t comme première inconnue et z comme deuxième). La dimension de $G \cap F_0$ est donc dim $\mathbf{R}^4 - 2 = 2$: $G \cap F_0$ est bien un plan vectoriel.

d) On sait que : dim $(G + F_0) =$ dim $G +$ dim $F_0 -$ dim $(G \cap F_0)$. Donc, par ce qui précède, la dimension de $(G + F_0)$ est 4. Comme $G + F_0$ est un sous-espace de $\mathbf{R}^4$ de dimension 4, c'est $\mathbf{R}^4$.
Les sous-espaces G et F_0 ne sont pas supplémentaires puisque leur intersection est un plan.

e) Si F_λ et G sont supplémentaires, la somme de leur dimension est 4. Or ceci n'est jamais le cas d'après a) et b). Il n'existe pas de valeur de λ pour lesquelles G et F_λ soient supplémentaires.

f) Choisissons deux vecteurs de $\mathbf{R}^4$ parmi ceux de la base canonique qui ne satisfont pas le système d'équations cartésiennes de $G \cap F_0$, par exemple $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Posons $H = \text{Vect}\ ((0,0,1,0),(0,0,0,1))$. C'est un plan vectoriel d'équations cartésiennes $x = y = 0$. Alors $(G \cap F_0) \cap H$ a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2t - 2z + y + x = 0 \\ z + y - x = 0 \\ y \qquad = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

système homogène à 4 inconnues, de rang 4. Donc $(G \cap F_0) \cap H$ est réduit à 0.
De plus, la somme des dimensions de $(G \cap F_0)$ et de H est 4 : $(G \cap F_0)$ et H sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

Exercice 2.

a) Montrons tout d'abord que la famille $\{A, B, C\}$ est libre.
Soient α, β, γ trois nombres complexes tels que $\alpha A + \beta B + \gamma C = 0_E$, c'est-à-dire tels que

$$\alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-c)(x-a) + \gamma(x-a)(x-b) = 0_E$$

ou encore, en développant,

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2 - (\alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b))x + (\alpha bc + \beta ca + \gamma ab) = 0_E.$$

Nécessairement, (α, β, γ) est solution du système homogène à 3 inconnues :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = 0 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = 0 \end{cases}$$

Résolvons-le par la méthode du pivot.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = 0 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = 0 \\ \beta c(a-b) + \gamma b(a-c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = 0 \\ \gamma(b-c)(a-c) = 0 \end{cases}.$$

Comme a, b, c sont deux à deux distincts, ce système est de rang 3. Il a pour unique solution $(0,0,0)$.
Donc la famille (A, B, C) est libre. Comme l'espace vectoriel E est de dimension 3, elle forme une base de E.

b) Soit $P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$ un élément de E ($p_0, p_1, p_2 \in \mathbf{C}$). Soit (α, β, γ) ses coordonnées dans la base (A, B, C). On a alors une autre expression de P :

$$P(x) = \alpha(x-b)(x-c) + \beta(x-c)(x-a) + \gamma(x-a)(x-b).$$

En reprenant les calculs précédents, on obtient le système (d'inconnues α, β, γ) :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = p_2 \\ \alpha(b+c) + \beta(c+a) + \gamma(a+b) = -p_1 \\ \alpha bc + \beta ca + \gamma ab = p_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = p_2 \\ \beta(a-b) + \gamma(a-c) = -p_1 - (b+c)p_2 \\ \gamma(b-c)(a-c) = p_0 + cp_1 + c^2 p_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \\ \beta = \frac{P(b)}{(a-b)((c-b)} \\ \gamma = \frac{P(c)}{(b-c)(a-c)} \end{cases}.$$

Ainsi,
$P(x) = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot (x-b)(x-c) + \frac{P(b)}{(a-b)((c-b)} \cdot (x-c)(x-a) + \frac{P(c)}{(b-c)(a-c)} \cdot (x-a)(x-b)$,
et par suite,

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{P(a)}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{1}{x-a} + \frac{P(b)}{(a-b)(c-b)} \cdot \frac{1}{x-b} + \frac{P(c)}{(b-c)(a-c)} \cdot \frac{1}{x-c}.$$