Corrigé de l'examen du 14 juin 2004

Exercice 1.

1. $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. La dimension de $\mathbb{R}_3[X]$ est 4.

2. Montrons que $\mathcal{B} = (X^3+1, X^3-1, X^2+X, X^2-X)$ est une famille libre.
Soit a, b, c, d des scalaires tels que $a(X^3+1)+b(X^3-1)+c(X^2+X)+d(X^2-X)=0$.
Ceci nous donne $(a+b)X^3+(c+d)X^2+(c-d)X+(a-b)=0$, ce qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 0 & \text{(L1)} \\ c+d & = & 0 & \text{(L2)} \\ c-d & = & 0 & \text{(L3)} \\ a-b & = & 0 & \text{(L4)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 0 & \text{(L1)} \\ c+d & = & 0 & \text{(L2)} \\ 2c & = & 0 & \text{(L3 + L2)} \\ 2a & = & 0 & \text{(L4 + L1)} \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes donnent $c=0$ et $a=0$, puis on trouve $b=d=0$. Donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. Comme elle a 4 éléments et que $\dim \mathbb{R}_3[X]=4$, on en déduit que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

3. Comme $\mathcal{B}$ est une base, on sait que X^3+2X+1 peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$, donc il existe des scalaires a, b, c, d tels que

$$X^3+2X+1 = a(X^3+1)+b(X^3-1)+c(X^2+X)+d(X^2-X).$$

En identifiant les coefficients, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 1 & \text{(L1)} \\ c+d & = & 0 & \text{(L2)} \\ c-d & = & 2 & \text{(L3)} \\ a-b & = & 1 & \text{(L4)} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} a+b & = & 1 & \text{(L1)} \\ c+d & = & 0 & \text{(L2)} \\ 2c & = & 2 & \text{(L3 + L2)} \\ 2a & = & 2 & \text{(L4 + L1)} \end{array}\right.$$

$$\text{donc} \left\{\begin{array}{lcr} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \\ d & = & -1 \end{array}\right.$$

Les coordonnées de X^3+2X+1 dans la base $\mathcal{B}$ sont donc $(1, 0, 1, -1)$.

Exercice 2.

1. a) On a $f(1,0,0)=(6,10,-2)$, $f(0,1,0)=(-2,-3,1)$ et $f(0,0,1)=(2,4,0)$ donc la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ est $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 10 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Calculons $\mathrm{Ker}(f)$.
$f(x,y,z)=(0,0,0)$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 6x & -2y & +2z & = & 0 & (\mathrm{L1}) \\ 10x & -3y & +4z & = & 0 & (\mathrm{L2}) \\ -2x & +y & & = & 0 & (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 6x & -2y & +2z & = & 0 & (\mathrm{L1}) \\ -2x & +y & & = & 0 & (\mathrm{L2} \leftarrow \mathrm{L2}-2\mathrm{L1}) \\ -2x & +y & & = & 0 & (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} 3x & -y & +z & = & 0 & (\frac{1}{2}\mathrm{L1}) \\ -2x & +y & & = & 0 & (\mathrm{L2}) \\ & & 0 & = & 0 & (\mathrm{L3}-\mathrm{L2}) \end{array}\right.$$

On exprime les inconnues principales y et z en fonction de l'inconnue secondaire x :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -y & +z & = & -3x \\ y & & = & 2x \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2x \\ z & = & -x \end{array}\right.$$

Donc $(x,y,z)=(x,2x,-x)=x(1,2,-1)$.
On en déduit que $(1,2,-1)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et que $\dim \mathrm{Ker}(f)=1$.

Par le théorème noyau-image, $\dim \mathbb{R}^3=\dim \mathrm{Ker}(f)+\dim \mathrm{Im}(f)$, donc $\dim \mathrm{Im}(f)=3-1=2$.

On sait que l'image d'une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel F est une partie génératrice de $f(F)$, donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))$. Ces vecteurs ont été calculés à la question 1.a).

La matrice des vecteurs $f(e_2)$, $f(e_3)$ est $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
on voit qu'elle est échelonnée en partant du bas, donc $f(e_2)$ et $f(e_3)$ sont linéairement indépendants.
Comme $\dim \mathrm{Im}(f)=2$, on en déduit que $((-2,-3,1),(2,4,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

c) Soit $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$. L'égalité $f(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$ est équivalente au système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 6x & -2y & +2z & = & x \\ 10x & -3y & +4z & = & y \\ -2x & +y & & = & z \end{array}\right.$$

On fait passer toutes les inconnues à gauche :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 5x & -2y & +2z & = & 0 \\ 10x & -4y & +4z & = & 0 \\ -2x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

On permute les lignes pour obtenir :

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} -2x & +y & -z & = & 0 & (\mathrm{L1}) \\ 5x & -2y & +2z & = & 0 & (\mathrm{L2}) \\ 10x & -4y & +4z & = & 0 & (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcll} -2x & +y & -z & = & 0 & (\mathrm{L1}) \\ x & & & = & 0 & (\mathrm{L2}+2\mathrm{L1}) \\ 2x & & & = & 0 & (\mathrm{L3}+4\mathrm{L1}) \end{array}\right.$$

On obtient donc $\left\{\begin{array}{l} y-z=0 \\ x=0 \end{array}\right.$

Donc $(x, y, z) = (0, z, z) = z(0, 1, 1)$.
L'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u}$ tels que $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$ est donc le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(0, 1, 1)$.

2. a) Montrons que les vecteurs $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ sont linéairement indépendants. Soit a, b, c des scalaires tels que $au_1 + bu_2 + cu_3 = (0, 0, 0)$. Ceci est équivalent au système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & & +c & = & 0 \quad (\mathrm{L1}) \\ 2a & +b & +2c & = & 0 \quad (\mathrm{L2}) \\ -a & +b & & = & 0 \quad (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} a & & +c & = & 0 \quad (\mathrm{L1}) \\ & b & & = & 0 \quad (\mathrm{L2} \leftarrow \mathrm{L2} - 2\mathrm{L1}) \\ -a & +b & & = & 0 \quad (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

L2 donne $b = 0$, puis L3 donne $a = 0$ et L1 donne $c = 0$. On en déduit que $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ est une famille libre. Comme elle a trois éléments et que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) $f(u_1) = (0, 0, 0)$, $f(u_2) = (0, 1, 1) = u_2$, $f(u_3) = (2, 4, 0) = 2u_3$ donc

$$\left\{\begin{array}{lll} f(u_1) & = & 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 \\ f(u_2) & = & 0u_1 + 1u_2 + 0u_3 \\ f(u_3) & = & 0u_1 + 0u_2 + 2u_3 \end{array}\right.$$

et la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est $\mathsf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque : On a vu à la question 1.b) que $\boldsymbol{u}_1$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et à la question 1.c) que $\boldsymbol{u}_2$ est une base de l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{u}$ tels que $f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$. Les vecteurs $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ ont donc été choisis de sorte que $f(\boldsymbol{u}_1) = (0, 0, 0)$ et $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_2$.

c) La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Comme P est une matrice de changement de base, elle est inversible. Calculons P^{-1}.

L'équation $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est équivalente au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & & +z & = & a \quad (\mathrm{L1}) \\ 2x & +y & +2z & = & b \quad (\mathrm{L2}) \\ -x & +y & & = & c \quad (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & & +z & = & a & (\mathrm{L1}) \\ & y & & = & b - 2a & (\mathrm{L2} \leftarrow \mathrm{L2} - 2\mathrm{L1}) \\ -x & +y & & = & c & (\mathrm{L3}) \end{array}\right.$$

L2 donne $y = -2a + b$, puis L3 donne $x = -2a + b - c$ et L1 donne $z = 3a - b + c$, donc

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & -2a & +b & -c \\ y & = & -2a & +b & +0c \\ z & = & 3a & -b & +c \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \mathsf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

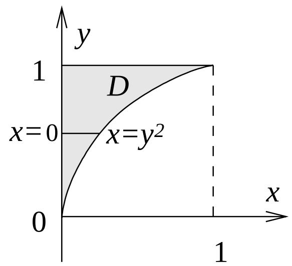
d) $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $(\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A})\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ce résultat était prévisible puisque la formule de changement de base dit que $\mathsf{A}' = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P}$, où A' est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ calculée au 2.a).

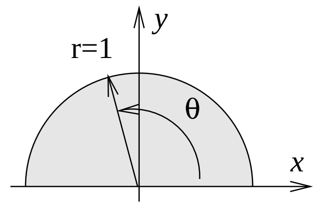
Exercice 3.

$$\iint_D y\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} y\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left[y\,\mathrm{e}^x \right]_{x=0}^{x=y^2} \mathrm{d}y = \int_0^1 (y\,\mathrm{e}^{y^2} - y)\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2} - \frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=1}$$

donc $\displaystyle\iint_D y\,\mathrm{e}^x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{e-2}{2}$.



Domaine d'intégration de l'exercice 3.



Domaine d'intégration de l'exercice 4.

Exercice 4.

On fait un changement de variables en coordonnées polaires : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Le domaine D est le demi-disque supérieur de centre 0 de rayon 1, donc $0 \le r \le 1$ et $0 \le \theta \le \pi$. Soit $\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi\}$.

On a $x^2 + y^2 = r^2$. La formule de changement de variables en coordonnées polaires nous donne

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \iint_\Delta \frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{1+r^2} = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2) \right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{\ln 2}{2}\mathrm{d}\theta$$

donc $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2} = \frac{\pi \ln 2}{2}$.

Exercice 5.

1. On résout tout d'abord l'équation homogène $y'' - 6y' + 9y = 0$. Son polynôme caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$, $\Delta = 0$, $\alpha = 3$ (racine double). Donc la solution générale de l'équation homogène est $y_H = (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y_0 = Ax^2\mathrm{e}^{3x}$.
On a $y_0' = (3Ax^2 + 2Ax)\mathrm{e}^{3x}$ et $y_0'' = (9Ax^2 + 12Ax + 2A)\mathrm{e}^{3x}$ donc $y_0'' - 6y_0' + 9y_0 = 2A\mathrm{e}^{3x}$. On prend donc $A = \frac{\alpha}{2}$ et $y_0 = \frac{\alpha}{2}x^2\mathrm{e}^{3x}$ est une solution de (E).

La solution générale de (E) est alors $y = y_H + y_0 = \left(\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

2. Si l'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace vectoriel, alors il contient la fonction nulle, autrement dit il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\left(\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{3x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathrm{e}^{3x} > 0$, on a nécessairement $\lambda + \mu x + \frac{\alpha}{2}x^2 = 0$ pour tout x. Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls donc $\lambda = \mu = \alpha = 0$. On en déduit que si $\alpha \neq 0$ l'ensemble des solutions de (E) n'est pas un sous-espace vectoriel.

Si $\alpha = 0$, l'équation (E) devient (E_0) : $y'' - 6y' + 9y = 0$.
– La fonction nulle est une solution de (E_0).
– Soit y_1, y_2 deux solutions de (E_0) et $A \in \mathbb{R}$ un scalaire. Si on pose $z = y_1 + Ay_2$ alors $z'' - 6z' + 9z = (y_1'' - 6y_1' + 9y_1) + A(y_2'' - 6y_2' + 9y_2) = 0$ donc z est aussi une solution de (E_0).

Conclusion : l'ensemble des solutions de (E_0) est un sous-espace vectoriel.