École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2020/2021

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie (Joël Riou)

Corrigé du DM n°1

Ce devoir à la maison doit être préparé individuellement par chaque étudiant. **Il doit être remis à votre chargé de TD le 16 octobre au plus tard.**

La précision des raisonnements et la qualité de la rédaction compteront de façon significative dans la notation. Il est bien sûr important d'obtenir des résultats et calculs corrects, mais il est au moins aussi important que les justifications essentielles soient données et que les symboles mathématiques soient utilisés correctement.

Exercice I

On note $\mathscr{D}_1$ la droite d'équation $4x + 3y = 21$.

On note $\mathscr{D}_2$ la droite donnée par le paramétrage $M(t) = (-3 + 3t, 1 + t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

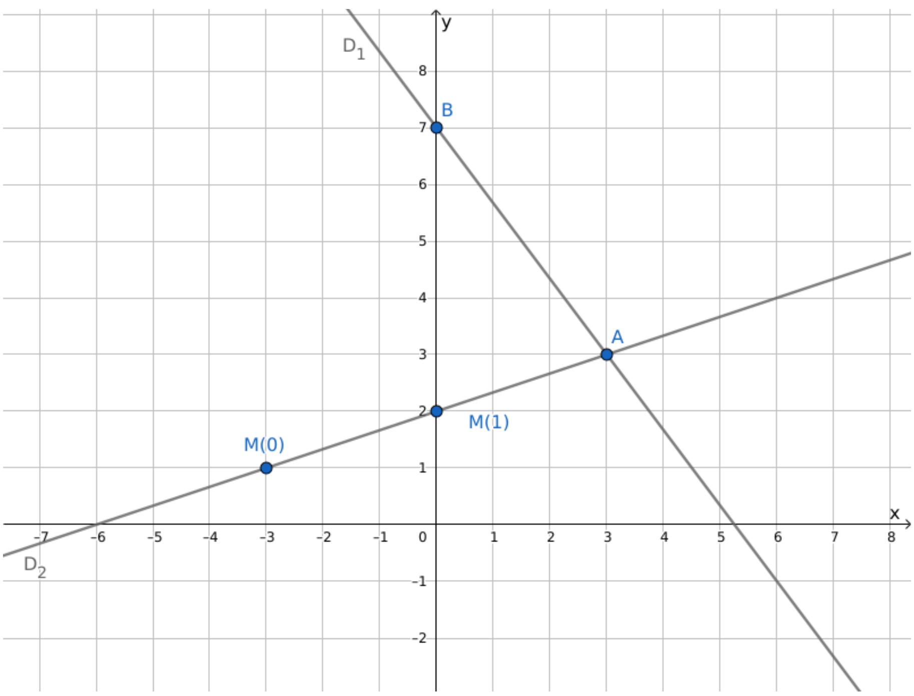
(1) Déterminer l'équation réduite de $\mathscr{D}_1$.

> Il est immédiat que l'équation réduite de $\mathscr{D}_1$ est $y = -\frac{4}{3}x + 7$.

(2) Calculer $M(0)$ et $M(1)$.

> En substituant t par 0 ou par 1 dans la définition de $M(t)$, on obtient $M(0) = (-3, 1)$ et $M(1) = (0, 2)$.

(3) Faire une figure (avec les axes) représentant $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et leur point d'intersection A.



> (Note : l'équation réduite $y = -\frac{4}{3}x + 7$ de $\mathscr{D}_1$ permet de placer le point $B = (0, 7) \in \mathscr{D}_1$ grâce à l'ordonnée à l'origine 7, et pour tracer $\mathscr{D}_1$, on utilise aussi le coefficient directeur $-\frac{4}{3}$.)

(4) En regardant la figure, quelles semblent être les coordonnées du point A ?

> D'après la figure, il semble plausible que $A = (3,3)$.

(5) Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}_2$.

> Si $(x,y) \in \mathscr{D}_2$, alors il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $x = -3+3t$ et $y = 1+t$. On a alors $3y - x = 6$. (Ceci montre que $\mathscr{D}_2$ est contenue dans la droite d'équation $3y - x = 6$.) D'après le cours, on peut conclure que $\mathscr{D}_2$ est la droite d'équation cartésienne $3y - x = 6$.

(6) Vérifier que le point dont les coordonnées ont été observées sur la figure à la question (4) est effectivement le point d'intersection A de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

> Le point $(3,3)$ appartient à la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $4x + 3y = 21$ puisque $4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 21$, et il appartient aussi à la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $3y - x = 6$ puisque $3 \cdot 3 - 3 = 6$. Ainsi, $A := (3,3) \in \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$. (Il est par ailleurs évident que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes, donc A est bien le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.)

(7) Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}_1$.

> Comme l'équation réduite de $\mathscr{D}_1$ est $y = -\frac{4}{3}x + 7$, on peut en quelque sorte choisir la coordonnée x comme paramètre. On peut ainsi définir $N(t) := (t, -\frac{4}{3}t + 7)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, et $N(t)$ est un paramétrage affine de la droite $\mathscr{D}_1$.

Exercice II

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on note Δ la droite d'équation cartésienne $5x + 13y = 40$ et Δ' celle d'équation $8x - 7y = 10$.
(1) Montrer que les points $A = (-5,5)$ et $B = (8,0)$ appartiennent à Δ.

> Le calcul $5 \cdot (-5) + 13 \cdot 5 = -25 + 65 = 40$ montre que $A \in \Delta$. De même, le calcul $5 \cdot 8 + 13 \cdot 0 = 40$ montre que $B \in \Delta$.

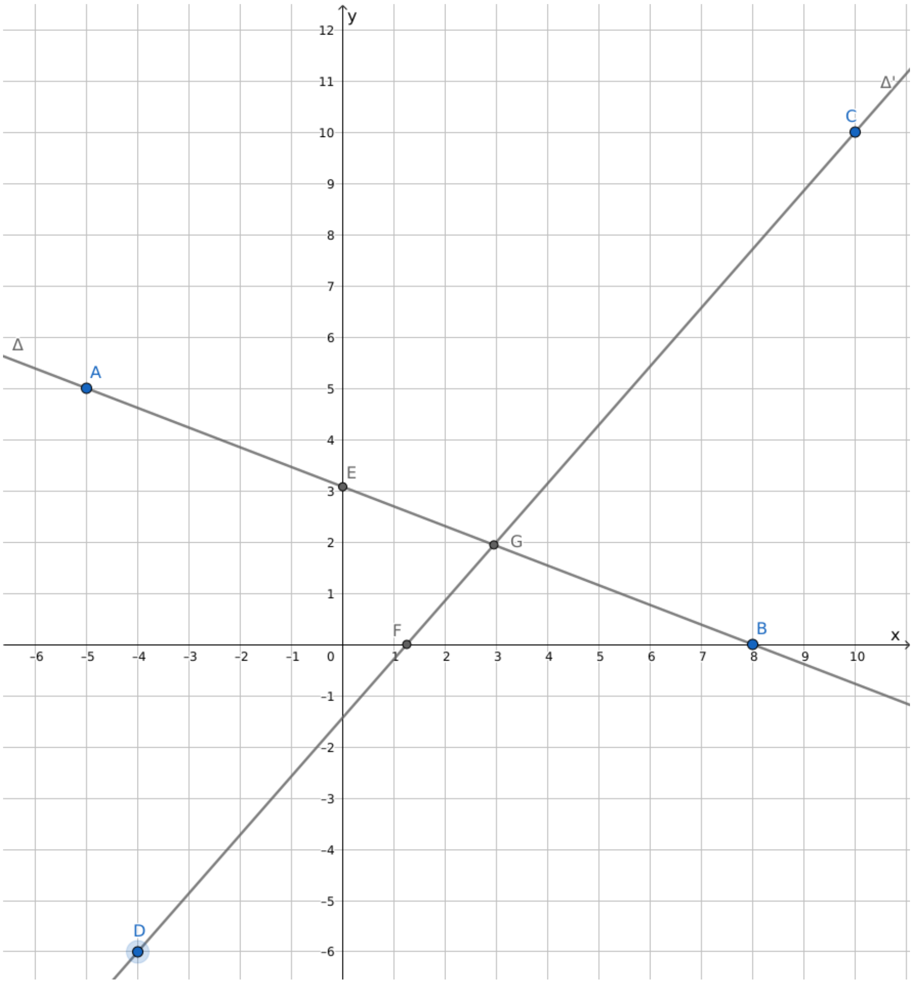
(2) Montrer que les points $C = (10,10)$ et $D = (-4,-6)$ appartiennent à Δ'.

> On procède comme dans la question précédente : les calculs $8 \cdot 10 - 7 \cdot 10 = 80 - 70 = 10$ et $8 \cdot (-4) - 7 \cdot (-6) = -32 + 42 = 10$ montrent que C et D appartiennent à Δ'.

(3) Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de Δ avec l'axe (Oy) et celles du point d'intersection F de Δ' avec l'axe (Ox).

> Pour déterminer le point E, on observe que l'appartenance à (Oy) se traduit par le fait que E soit de la forme $(0,y)$ avec $y \in \mathbf{R}$, l'appartenance à Δ se reformule en $13y = 40$, c'est-à-dire $y = \frac{40}{13}$. Ainsi, $E = (0, \frac{40}{13})$.
>
> De même, pour F, que $F \in (Ox)$ se reformule en énonçant que F est de la forme $(x, 0)$ avec $x \in \mathbf{R}$, et l'appartenance à Δ' se traduit par l'équation $8x = 10$, c'est-à-dire $x = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$. On a donc $F = (\frac{5}{4}, 0)$.

(4) Représenter graphiquement les points A, B, C, D, E et F et les droites Δ et Δ'.



(Note : j'ai représenté en plus le point d'intersection G des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Les coordonnées semblent très proches de $(3, 2)$, mais nous verrons dans la question suivante que $G \neq (3, 2)$.)

(5) Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ qui sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 13y = 40 \\ 8x - 7y = 10 \end{cases}$$

Si on considère les équations ci-dessus comme des lignes (L_1 et L_2), on peut faire l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{8}{5}L_1$ pour obtenir un système d'équations équivalent :

$$\begin{cases} 5x + 13y = 40 \\ (-7 - \frac{8 \cdot 13}{5})y = 10 - \frac{8 \cdot 40}{5} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 5x + 13y = 40 \\ -\frac{139}{5}y = -54 \end{cases}$$

Ceci est un système triangulaire : il possède une unique solution $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On détermine d'abord y, puis x :

$$\begin{cases} y = \frac{54 \cdot 5}{139} = \frac{270}{139} \\ x = \frac{40 - 13y}{5} = 8 - \frac{13 \cdot 5 \cdot 54}{5 \cdot 139} = 8 - \frac{13 \cdot 54}{139} = \frac{8 \cdot 139 - 13 * 54}{139} = \frac{410}{139} \end{cases}$$

L'unique solution est donc $\left(\frac{410}{139}, \frac{270}{139}\right)$: ce sont les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.

(Note : en valeurs approchées, $\frac{410}{139} \simeq 2.95$ et $\frac{270}{139} \simeq 1.94$, ce qui explique que le point G soit proche du point $(3, 2)$.)

Exercice III

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère les points $A := (2,3,4)$ et $B := (-3,0,2)$. On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-z=-4$.

(1) Déterminer un paramétrage $M(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite (AB).

> Il s'agit de déterminer des fonctions affines $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ telles que, par exemple, $M(0) = A$ et $M(1) = B$.
>
> On peut ainsi poser, pour tout $t \in \mathbf{R}$:
>
> $$\begin{cases} X(t) & = & 2-5t \\ Y(t) & = & 3-3t \\ Z(t) & = & 4-2t \end{cases}$$

(2) À quelle condition sur $t \in \mathbf{R}$ est-ce que $M(t) \in \mathscr{P}$.

> Soit $t \in \mathbf{R}$. On a $M(t) \in \mathscr{P}$ si et seulement si $M(t)$ satisfait l'équation cartésienne $x+y-z=-4$ de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire si $X(t)+Y(t)-Z(t) = -4$.
>
> On fait le calcul :
>
> $$X(t)+Y(t)-Z(t) \quad = \quad (2-5t)+(3-3t)-(4-2t) = 1-6t$$
>
> Le point $M(t)$ appartient donc à $\mathscr{P}$ si et seulement si $1-6t=-4$, c'est-à-dire $6t=5$, autrement dit $t=\frac{5}{6}$.

(3) Déterminer l'intersection $(AB) \cap \mathscr{P}$.

> D'après le résultat de la question précédente, l'intersection $(AB) \cap \mathscr{P}$ est le singleton $\{M(\frac{5}{6})\}$, où $M(\frac{5}{6}) = (2-\frac{25}{6}, 3-\frac{5}{2}, 4-\frac{5}{3}) = (-\frac{13}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{3})$.
>
> (Note : pour vérifier ses calculs, il peut être intéressant de vérifier au brouillon que le point obtenu appartient bien à $\mathscr{P}$, ce qui revient à calculer $-\frac{13}{6}+\frac{1}{2}-\frac{7}{3} = \frac{-13+3-14}{6} = \frac{-24}{6} = -4$.)