Differential geometry and gauge theory
M2 ICFP, year 2024/2025

Homework

(expected March 11th)

Exercise 1

1. Show that $\mathbb{S}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ is a submanifold of $\mathbb{R}^3$.
2. Give a parametrization of the (open) northern hemisphere, $\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{S}^2 \,|\, x_2 > 0\}$.
3. Deduce from the above parametrization the tangent space to $\mathbb{S}^2$ at point P with coordinates $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, as an affine subspace of $\mathbb{R}^3$.

Exercise 2

On $\mathbb{R}^2$ endowed with its standard coordinates (x, y), consider the vector fields $X = y\frac{\partial}{\partial x}$ and $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$, and the differential 1-form $\omega = f\,dx + g\,dy$ for f and $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Compute $[X, Y]$ and show that

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\,.$$

Exercise 3

Recall that the real projective space $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ is the set of lines of $\mathbb{R}^{n+1}$: for any $w \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, we denote by $x = \mathbb{R}w$ the line generated by w, seen as an element of $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Let γ_n be the rank 1 vector bundle, said *totaulogical bundle*, over $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$:

$$\mathrm{pr}_1 : E_{\gamma_n} = \{(x, v) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, v \in x\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \quad \text{where } \mathrm{pr}_1(x, v) = x\,.$$

1. Let s be a continuous section of γ_n. Show that there exists a continuous map $t : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ such that $s(\mathbb{R}v) = (\mathbb{R}v, t(v)v)$ for all $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
2. Show that the vector bundle γ_n is not trivializable.

*For **Exercises 4 and 5** below, the de Rham cohomology of spheres seen in class can be used without justification.*

Exercise 4

1. Consider the product manifold $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^q$ for some integer $q \geq 1$. Compute all its de Rham cohomology groups $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$, assuming that $H^{q+1}_{\mathrm{dR}}(M) \simeq \mathbb{R}$.
2. Suggest a strategy in order to compute the de Rham cohomology of $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ for any integer p.

Exercise 5

We consider the sphere $\mathbb{S}^{n-1}$ as the boundary of the ball $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$.

1. Show that there do not exist continuous maps $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ whose restriction to $\mathbb{S}^{n-1}$ is the identity.
2. Deduce from the previous question that any continuous map $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ admits a fixed point, *i.e.* that there exists $x_0 \in \mathbb{B}^n$ such that $f(x_0) = x_0$.

version française $\longrightarrow$

Géométrie différentielle et théorie de jauge
M2 ICFP, année 2024/2025

Devoir maison

(attendu le 11/03)

Exercice 1

1. Prouver que $\mathbb{S}^2 = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner un paramétrage de l'hémisphère nord (ouvert), $\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{S}^2 \,|\, x_2 > 0\}$.
3. Déduire du paramétrage ci-dessus l'espace tangent à $\mathbb{S}^2$ au point P de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, comme sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2

Sur $\mathbb{R}^2$ muni de ses coordonnées usuelles (x, y), considérons les champs de vecteurs $X = y\frac{\partial}{\partial x}$ et $Y = x\frac{\partial}{\partial y}$ et la 1-forme différentielle $\omega = f\,dx + g\,dy$ où f et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Calculer $[X, Y]$ et montrer que

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])\,.$$

Exercice 3

On rappelle que l'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$: étant donné $w \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$, on dénote par $x = \mathbb{R}w$ la droite engendrée par w, vue comme un élément de $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Soit γ_n le fibré vectoriel de rang 1, dit *fibré tautologique*, sur $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$:

$$\mathrm{pr}_1 : E_{\gamma_n} = \{(x, v) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \,|\, v \in x\} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n \quad \text{où } \mathrm{pr}_1(x, v) = x\,.$$

1. Soit s une section continue de γ_n. Montrer qu'il existe une application continue $t : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que $s(\mathbb{R}v) = (\mathbb{R}v, t(v)v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
2. Montrer que le fibré vectoriel γ_n n'est pas trivialisable.

*Pour les **Exercices 4 et 5** ci-dessous, on pourra utiliser sans justification la cohomologie de de Rham des sphères vue en cours.*

Exercice 4

1. On considère la variété produit $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^q$ pour un entier $q \geq 1$. Calculer tous ses groupes de cohomologie de de Rham, $H^*_{\mathrm{dR}}(M)$, en admettant que $H^{q+1}_{\mathrm{dR}}(M) \simeq \mathbb{R}$.
2. Proposer une stratégie pour calculer la cohomologie de de Rham de $\mathbb{S}^p \times \mathbb{S}^q$ pour tout entier p.

Exercice 5

On considère la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ comme le bord de la boule $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ dont la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ soit l'identité.
2. Déduire de la question précédente que toute fonction continue $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ admet un point fixe, *i.e.* qu'il existe $x_0 \in \mathbb{B}^n$ tel que $f(x_0) = x_0$.

English version $\longrightarrow$