Cours 6

13/02/2012

6.1 Forme normale de Jordan

On a donc rempli la première partie du programme : en choisissant une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ qui est la réunion de bases $\mathcal{B}_j$ de chaque G_j, la matrice de A dans cette base s'écrit sous la forme diagonale par bloc (5.2.1), où chaque bloc A_j est la restriction de A au sous-espace G_j. Posant

$$N_j = A_j - \lambda_j I,$$

on a d'ailleurs $N_j^{m_j} = 0$. Autrement dit $A_j = \lambda_j I + N_j$ avec N_j matrice nilpotente d'ordre $\leq m_j$.

6.1.1 Matrices nilpotentes

Définition 6.1.1 Une matrice $N \neq 0$ est nilpotente lorsqu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^s = 0$. Le plus petit entier $s \geq 1$ tel que $N^s = 0$ est l'ordre de nilpotence de N.

Proposition 6.1.2 Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les assertions suivantes sont équivalentes

i) N est nilpotente.

ii) La seule valeur propre de N est 0.

iii) Le polynôme caractéristique de N est $P_N(x) = x^n$.

Preuve: Supposons que N est nilpotente d'odre p. Si λ est une valeur propre de N, associée au vecteur propre $U \in \mathbb{C}^n$, on a

$$0 = N^p u = N^{p-1} N u = \lambda N^{p-1} u = \cdots = \lambda^p u,$$

donc $\lambda = 0$. Le polynôme caractéristique de P_N est un polynôme scindé dans $\mathbb{C}^n[x]$, de degré n, dont 0 est la seule racine. On a donc $P_N(x) = cx^n$ pour un certain $c \in \mathbb{C}$. Or $P_N(x) = \det(xI - N)$, donc $c = 1$. On a prouvé que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$. Réciproquement, si $P_N(x) = x^n$, le théorème de Cayley-Hamilton donne $N^n = P_N(N) = O$. Donc N est nilpotente d'ordre inférieur ou égal à n. □

Remarque 6.1.3 – L'ordre de nilpotence de $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours inférieur à n.
– Si N est une matrice nilpotente et diagonalisable, alors N est semblable à la matrice nulle, donc est nulle.

L'exponentielle d'une matrice nilpotente est, en principe, facile à calculer. C'est en particulier un polynôme en t, puisque

Si N est nilpotente d'ordre p,

$$e^{tN} = I + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \cdots + \frac{t^{(p-1)}}{(p-1)!}N^{(p-1)}.$$

6.1.2 Forme normale de Jordan

Puisque l'on peut toujours triangulariser une matrice (sur $\mathbb{C}$), et qu'alors la diagonale contient les valeurs propres de la matrice (cf. la Proposition 5.4.1), on voit que toute matrice nilpotente est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & * \\ 0 & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où les $*$ désignent un coefficient complexe dont on ignore tout à priori. On peut cependant démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.1.4 Soit $N \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. La matrice N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & & & & \\ & N_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N_r \end{pmatrix}, \tag{6.1.1}$$

où chaque bloc $N_\ell \in \mathcal{M}_{k_\ell}(\mathbb{R})$, avec $1 \leq k_\ell \leq k$, et $k_1 + \cdots + k_r = k$, est de la forme

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Revenant à la matrice A initiale, on obtient sa forme normale de Jordan :

Proposition 6.1.5 Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_d \end{pmatrix},$$

avec $A_j \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$ donnée par

$$A_j = \begin{pmatrix} T_1^j & & & & \\ & T_2^j & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & T_{r_j}^j \end{pmatrix},$$

et $T_\ell^j \in \mathcal{M}_{k_\ell}(\mathbb{C})$ donnée par

$$T_\ell^j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

On notera les deux cas extrêmes : on peut avoir $r_j = 1$ (la matrice N_j est d'un seul bloc), et dans ce cas

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

On peut aussi avoir $r_j = m_j$ (la matrice N_j est constitué de m_j blocs de taille 1), ce qui signifie que A_j s'écrit

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_j & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.1.6 Dresser la liste de tous les blocs A_j possibles pour $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, puis pour $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.

6.1.3 Méthode pratique

Voici un algorithme pour calculer la forme de Jordan d'une matrice A :

1) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. Si la matrice A est diagonalisable, c'est fini. Sinon :

2) Déterminer une base adaptée de chacun des sous-espaces propres généralisés. Pour ce faire, on peut procéder ainsi : pour chaque valeur propre λ_j,

- On choisit un vecteur propre $e_{1,j}$ de A associé à la valeur propre λ_j (déterminé à l'étape 1). On cherche alors $e_{2,j}$ tel que (il s'agit de résoudre un système linéaire dont les inconnues sont les coordonnées de $e_{2,j}$)

$$(A - \lambda_j I)e_{2,j} = e_{1,j}.$$

Pour un tel vecteur on aura en effet

$$(A - \lambda_j I)^2 e_{2,j} = (A - \lambda_j I)e_{1,j} = 0,$$

donc $e_{2,j} \in G_j$. De plus $e_{1,j}$ et $e_{2,j}$ seront forcément linéairement indépendants : sinon $e_{2,j}$ serait aussi un vecteur propre associé à λ_j et $(A - \lambda_j I)e_{2,j} = 0$ ce qui est absurde. Enfin

$$Ae_{2,j} = e_{1,j} + \lambda_j e_{2,j},$$

ce qui est la forme cherchée.

- On répète ce procédé, au plus $m_j - 1$ fois : on cherche $e_{k+1,j}$ tel que $(A - \lambda_j I)e_{k+1,j} = e_{k,j}$. On peut alors être confronté au problème suivant : s'il existe $p < m_j$ tel que $(A - \lambda_j I)^p = 0$, le procédé s'arète après $p - 1$ étapes : on ne fabrique donc pas assez de vecteurs pour former une base de G_j. On doit alors recommencer le processus avec un autre vecteur propre pour la valeur propre λ_j.

Voici un exemple : Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Son polynôme caractéristique est $P_A(x) = ((x-1)^2 + 1)^2$ (développer par rapport à la première colonne par exemple). La matrice A a donc deux valeurs propres $\lambda_1 = 1 + i$ et $\lambda_2 = 1 - i$, de multiplicités algébriques respectives $m_1 = m_2 = 2$. Les sous-espaces propres associés sont de dimension 1, engendrés par $e_{1,1} = (1, 0, -i, 0)$ et $e_{2,1} = (1, 0, i, 0)$ respectivement. La matrice A n'est donc pas diagonalisable, et on veut l'écrire sous forme de Jordan.

- On cherche un vecteur $e_{1,2} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tel que $(A - \lambda_1)e_{1,2} = e_{1,1}$. Le système correspondant s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve $e_{1,2} = (0, 1, 0, -i)$. Puisque $m_1 = 2$ on sait que $(e_{1,1}, e_{1,2})$ est une base du sous-espace propre généralisés G_1 associé à λ_1.

- On procède de la même manière pour trouver une base de G_2. On cherche un vecteur $e_{2,2}$ tel que $(A - \lambda_1)e_{2,2} = e_{2,1}$. Tous calculs faits, on trouve $e_{2,2} = (0, 1, 0, i)$.

Finalement, notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & i \end{pmatrix},$$

on a

$$A = P \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il reste à calculer P^{-1} - par exemple avec la méthode de Gauss. On trouve

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

6.1.4 Application au calcul de e^{tA}

On va retenir la proposition précédente sous une forme un peu moins précise, mais adaptée au calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Proposition 6.1.7 (Décomposition de Dunford) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et un couple de matrices (D, N) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

i) D est diagonale, N est nilpotente.

ii) $DN = ND$.

iii) $A = P(D+N)P^{-1}$.

De plus, notant $P_A(x) = \prod_{j=1}^{d}(\lambda - \lambda_j)^{m_j}$ le polynôme caractéristique de A,

$$(6.1.2)\quad D+N = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_d \end{pmatrix} \text{ où } T_j = D_j + N_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & * & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_j & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & * \\ & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C}),$$

avec $D_j = \lambda_j I$ et $* = 0$ ou 1.

On obtient finalement le résultat suivant pour e^{tA} :

Corollaire 6.1.8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $t \in \mathbb{R}$. La matrice $\exp(tA)$ est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{tT_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tT_d} \end{pmatrix},$$

avec

$$e^{tT_j} = e^{tD_j}e^{tN_j} = e^{t\lambda_j}(I + tN_j + \frac{t^2}{2!}N_j^2 + \dots + \frac{t^{(m_j-1)}}{(m_j-1)!}N_j^{(m_j-1)}),$$

où les $T_j = D_j + N_j$ sont les matrices données dans la Proposition 6.1.7.

Preuve.— On sait que dans une base bien choisie tA s'écrit sous la forme par blocs (6.1.2). Puisque le produit de matrices diagonales par blocs s'obtient en faisant le produit par blocs, il suffit de calculer e^{tT_j} pour un bloc quelconque. Puisque D_j et N_j commutent, on a

$$e^{tT_j} = e^{t(D_j+N_j)} = e^{tD_j}e^{tN_j},$$

et puisque $N_j \in \mathcal{M}_{m_j}(\mathbb{C})$ est nilpotente, $(N_j)^k = 0$ pour tout $k \geq m_j$, donc

$$e^{tT_j} = e^{t\lambda_j}(I + tN_j + \frac{t^2}{2!}N_j^2 + \dots + \frac{t^{(m_j-1)}}{(m_j-1)!}N_j^{(m_j-1)}).$$

$\square$

Reprenons l'exemple de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait que

$$A = P \left(\begin{array}{cc|cc} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1-i \end{array} \right) P^{-1},$$

et on va calculer séparément l'exponentielle des deux blocs diagonaux $T_1 = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ et $T_2 = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$. On a $T_1 = \lambda_1 I + N$ et $T_2 = \lambda_2 I + N$, et le seul calcul à faire est celui de $e^{tN} = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient

$$e^{tA} = P \left(\begin{array}{cc|cc} e^{(1+i)t} & e^{(1+i)t}t & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{(1-i)t} & e^{(1-i)t}t \\ 0 & 1 & 0 & e^{(1-i)t} \end{array} \right) P^{-1}.$$

6.2 Solutions des systèmes linéaires à coefficients constants

On revient maintenant à la résolution des systèmes linéaires à coefficients constants

$$Y' = AY(t) + B(t), \tag{6.2.3}$$

où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $t \mapsto B(t)$ est une application continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}^n$. On sait que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est l'ensemble des fonctions de la forme

$$Y(t) = e^{tA}Y_0 + Y_1(t),$$

où $Y_0 \in \mathbb{K}^n$, et $Y_1(t)$ est une solution de l'équation (6.2.3). Il reste deux problèmes :

i) calculer efficacement $e^{tA}Y_0$,

ii) trouver une solution Y_1.

6.2.1 Calcul effectif de $e^{tA}X_0$

Pour le point (i), on utilise évidemment les résultats de la section précédente : on trouve une base $\mathcal{B} = \{V_1, \ldots, V_n\}$ dans laquelle A s'écrit sous forme de Dunford (Jordan) $D + N$. Notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a

$$e^{tA}X_0 = Pe^{t(D+N)}P^{-1}X_0. \tag{6.2.4}$$

Cette formule permet en principe le calcul, mais il est plus efficace de procéder de la manière suivante. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ les coordonnées de X_0 dans la base $\mathcal{B}$. Autrement dit

$$X_0 = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_n V_n.$$

On a

$$e^{tA}X_0 = \alpha_1 e^{tA}V_1 + \cdots + \alpha_{1n}e^{tA}V_n.$$

Par ailleurs, le calcul de $e^{tA}V_k$ se fait à vue, compte tenu de la forme donnée dans le Corollaire 6.1.8 : si $V_k \in G_j$,

$$e^{tA}V_k = e^{\lambda_j t}(I + tN_j + \frac{t^2}{2!}N_j^2 + \cdots + \frac{t^{(m_j-1)}}{(m_j-1)!}N_j^{(m_j-1)})V_k. \tag{6.2.5}$$

On pourra noter que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sont les composantes du vecteur $P^{-1}X_0$, ce qui montre que cette approche ne diffère pas réellement de la formule (6.2.4). A ceci près qu'on n'a pas eu besoin de calculer P^{-1} !

Reprenons encore notre exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On sait que

$$e^{tA} = P \left(\begin{array}{cc|cc} e^{(1+i)t} & te^{(1+i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+i)t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{(1-i)t} & te^{(1-i)t} \\ 0 & 1 & 0 & e^{(1-i)t} \end{array}\right) P^{-1},$$

mais on supposons que l'on veuille seulement calculer $e^{tA}X_0$, avec $X_0 = (2, 0, -2i, -i)$. On peut bien sûr utiliser la formule ci-dessus, et commencer par calculer $P^{-1}X_0$. Cependant, notant que $X_0 = 2e_{1,1} - e_{2,2}$, on voit beaucoup plus rapidement que

$$e^{tA}X_0 = 2e^{tA}e_{1,1} - e^{tA}e_{2,2} = 2e^{(1+i)t}e_{1,1} - e^{(1-i)t}(te_{2,1} + e_{2,2}) = \begin{pmatrix} 2e^{(1+i)t} - te^{(1-i)t} \\ -e^{(1-i)t} \\ -2e^{(1+i)t} - ite^{(1-i)t} \\ -ie^{(1-i)t} \end{pmatrix}$$

De la formule (6.2.5), on peut tirer facilement le résultat de structure suivant, qui n'a pas beaucoup d'intérêt autre que théorique.

Proposition 6.2.1 Les solutions à valeurs complexes du système différentiel $Y' = AY$ s'écrivent comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{t\lambda_j} t^k u_{j,k},$$

où λ_j est une valeur propre de A, $k \leq m_j - 1$ un entier et $u_{j,k}$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$.

6.2.2 Solutions réelles

On peut avoir envie de ne considérer que les solutions réelles de $\mathcal{S}_H$. En particulier, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto e^{tA}X_0$ est à valeurs réelles : sa partie imaginaire $I(t)$ vérifie en effet le problème de Cauchy

$$\begin{cases} I' = AI, \\ I(0) = 0, \end{cases}$$

dont l'unique solution est la fonction nulle. Pourtant si les valeurs propres de A ne sont pas réelles, il n'est pas clair du tout que l'expression de $e^{tA}X_0$ donne une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On se souvient alors de la remarque suivante : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre complexe de A associée au vecteur propre $u \in \mathbb{C}^n$, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A associée au vecteur propre $\bar{u}$. On a en effet $Au = \lambda u$ donc $\overline{Au} = \bar{\lambda}\bar{u}$, et puisque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\overline{Au} = A\bar{u}$.

L'idée consiste alors a regrouper les valeurs propres complexes conjuguées, et de choisir pour $G_{\bar{\lambda}}$ la base complexe conjuguée de celle de G_λ . Considérerons l'exemple suivant : Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $b \neq 0$, et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda = a+ib$ et $\bar{\lambda}$. Dans $\mathbb{C}$, A est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$, et e^{tA} est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} e^{t(a+ib)} & 0 \\ 0 & e^{t(a-ib)} \end{pmatrix}.$$

Si $u = u_1 + iu_2$, avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, $\bar{u} = u_1 - iu_2$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$, et pour $Y_0 = \alpha_1 u + \alpha_2 \bar{u} \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, on obtient

$$e^{tA}Y_0 = \alpha_1 e^{t(a+ib)}u + \alpha_2 e^{t(a-ib)}\bar{u}.$$

On ne voit pas clairement sur cette expression que $Y(t) \in \mathbb{R}^2$. Mais en écrivant $u = u_1 + iu_2$, avec $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$, on obtient

$$e^{tA}X_0 = e^{ta}(c_1\cos(bt) - c_2\sin(bt))u_1 + e^{ta}(c_1\sin(bt) + c_2\cos(at))u_2 = e^{ta}$$

où $c_1 + ic_2 = \alpha_1 = \overline{\alpha_2}$.

Cet exemple est tout à fait général. En fait si $\lambda_j = a_j + ib_j$ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\bar{\lambda}_j$ aussi et le bloc e^{tT_j} associé à $E_{\lambda_j} \oplus E_{\bar{\lambda}_j}$ s'écrit, dans une base convenable

$$e^{tT_j} = e^{a_j t} \begin{pmatrix} R_j & tR_j & \frac{t^2}{2!}R_j & \dots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}R_j \\ 0 & R_j & tR_j & \dots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}R_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & tR_j \\ 0 & \dots & & & R_j \end{pmatrix},$$

où $R_j = \begin{pmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos b_j t \end{pmatrix}$. On pourra retenir la

Proposition 6.2.2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les solutions à valeurs réelles du système différentiel $Y' = AY$ s'écrivent comme combinaisons linéaires de fonctions de la forme

$$t \mapsto e^{ta_j} \cos(b_j t) t^k u_{j,k}, \quad t \mapsto e^{ta_j} \sin(b_j t) t^k v_{j,k},$$

où $\lambda_j = a_j + ib_j$ est une valeur propre de A, $k \leq m_j - 1$ un entier et $u_{j,k}, v_{j,k} \in \mathbb{R}^n$.

6.2.3 Variation de la constante

Comme pour les équations scalaires, il existe un algorithme pour trouver UNE solution $Y_1(t)$ de l'équation (6.2.3). Il consiste à chercher une solution $Y_1(t)$ de la forme

$$Y_1(t) = e^{tA} U(t).$$

En formant l'équation que doit satisfaire Y_1, on obtient

$$e^{tA} U'(t) = B(t),$$

ou encore (attention : le produit des matrices n'est pas commutatif),

$$U'(t) = e^{-tA} B(t).$$

On peut donc choisir

$$U(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s) ds,$$

et on obtient comme solution

$$Y_1(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA} B(s) ds.$$

Bien entendu, on est encore confronté au problème du calcul effectif de $e^{-tA}B(t)$. Là encore, la meilleure solution est d''écrire $B(t)$ dans la base $\mathcal{B} = \{V_1, \dots, V_n\}$ dans laquelle A s'écrit sous forme Dunford (Jordan) : $B(t) = \alpha_1(t)V_1 + \dots + \alpha_n(t)V_n$. On a alors comme ci-dessus

$$e^{-tA} B(t) = \alpha_1(t) e^{-tA} V_1 + \dots + \alpha_n(t) e^{-tA} V_n.$$