Notes du Cours
Introduction à l'étude des Equations aux Dérivées Partielles
Math206

Thierry Ramond
Université Paris Sud
e-mail : thierry.ramond@math.u-psud.fr

27 mars 2015

Table des matières

Cours 1

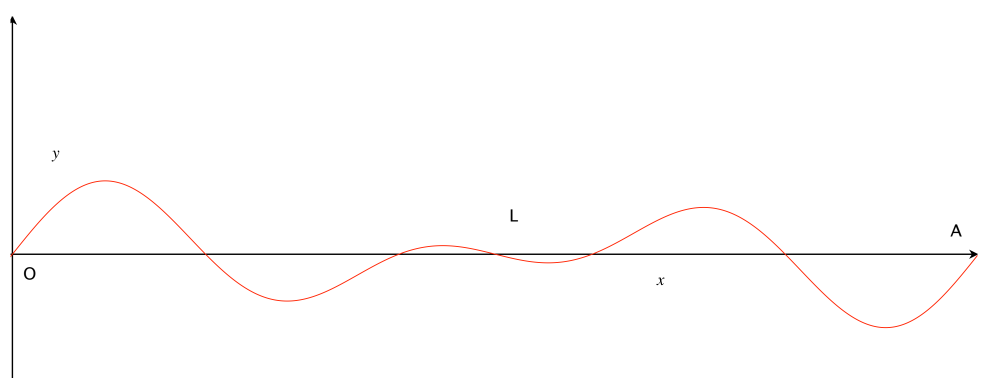
Les cordes vibrantes

1.1 Modélisation

L'étude des cordes vibrantes telle qu'on va la présenter est due à D'Alembert, Euler et Bernoulli au milieu du XVIIIème siècle. Bien entendu, ce dispositif a attiré l'attention des gens curieux de tous temps, et son étude par Pythagore au Vème siècle avant JC est à l'origine de la musique occidentale.

Un son est une variation périodique de la pression de l'air. Cette variation peut être perçue par l'oreille humaine et transformé en signal électrique, compréhensible par le cerveau humain, grâce à l'oreille interne (tympan, cochlée). Dans un instrument de musique, un son est produit par une force mécanique appelée attaque sur un système mécanique vibrant. Ce dispositif vibrant est souvent relié à une caisse de résonance, qui amplifie le son et le rend audible par l'auditoire. L'attaque d'un son est différente selon les instruments. Par exemple on peut recenser trois familles d'instruments à cordes : les cordes pincées (guitare, harpe, clavecin,...), les cordes frappées (piano, célesta,...) et les cordes frottées (violon, violoncelle,...).

On va se concentrer sur un "instrument" très simple : une corde élastique, tendue entres ses deux extrémités O et A que l'on suppose immobiles.

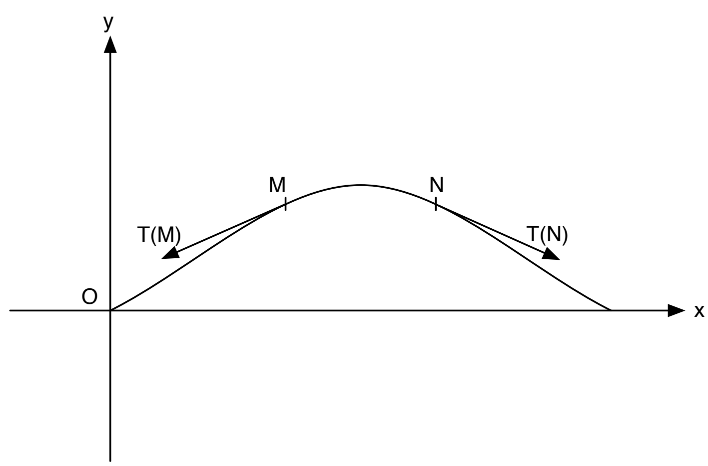


On note

- L la longueur de la corde au repos (en cm),
- ρ la masse par unité de longueur, ou masse linéique (en g/cm),
- τ la tension de la corde, liée aussi au matériau - nylon ou acier par exemple - (en Newton).

On s'intéresse aux petites oscillations de la corde au cours du temps. On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est l'une des extrémités de la corde et $(O, \vec{i})$ la direction de la corde au repos. L'axe $(O, \vec{j})$ est perpendiculaire à $(O\vec{i})$ et les mouvements de la cordes sont supposés avoir lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $h(t, x)$ la hauteur de la corde à l'instant t au-dessus du point d'abscisse $x \in [0, L]$.

On considère un petit morceau de corde délimité par les points $M(x, h(t, x))$ et $N(x + \delta x, h(t, x + \delta x))$, à un instant t fixé.



On néglige les effets de la pesanteur. Les forces extérieures qui s'exercent sur le petit morceau de corde sont donc seulement la tension $\vec{T}(M)$ exercée par la partie gauche de la corde au point M, et la tension $\vec{T}(N)$ exercée par la partie droite de la corde au point N. Ces forces sont supposées tangentes à la corde au point considéré (les physiciens disent que la corde est élastique). Notant $\theta(x)$ l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et $\vec{T}(M)$, et $\theta(x + \delta x)$ l'angle entre $\vec{i}$ et $\vec{T}(N)$, on a donc

$$\tan\theta(x) = -\partial_x h(t, x) \quad \text{et} \quad \tan\theta(x + \delta x) = \partial_x h(t, x + \delta x).$$

On projette les 2 forces sur les axes et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = \|\vec{T}(M)\| \cos(\theta(x))\vec{i} + \|\vec{T}(M)\| \sin(\theta(x))\vec{j} \\ \vec{T}(N) = \|\vec{T}(N)\| \cos(\theta(x + \delta x))\vec{i} + \|\vec{T}(N)\| \sin(\theta(x + \delta x))\vec{j} \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que les points de la corde ne se déplacent pas horizontalement, ce qui se traduit par le fait que la norme du vecteur tension est constante le long de la corde. On la note τ. Autrement dit

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = \tau \cos(\theta(x))\vec{i} + \tau \sin(\theta(x))\vec{j} \\ \vec{T}(N) = \tau \cos(\theta(x + \delta x))\vec{i} + \tau \sin(\theta(x + \delta x))\vec{j} \end{cases}$$

On applique maintenant la loi de Newton, qui dit que la masse $m = \rho\delta x$ du morceau de corde que multiplie l'accélération du morceau de corde, est égale à la somme des forces extérieures. En projetant cette relation sur l'axe vertical, on obtient :

$$\rho\ \delta x\ \partial_t^2 h(t,x) = \tau \sin(\theta(x)) + \tau \sin(\theta(x+\delta x))$$

Dernière hypothèse, on ne veut considerer que de très petites oscillations de la corde autour de sa position horizontale. En particulier, les angles $\theta(x)$ et $\theta(x+\delta x)$ sont supposés très petits, et l'on utilise l'approximation au premier ordre

$$\sin(\theta(x)) = \tan(\theta(x)) = \theta(x), \quad \sin(\theta(x+\delta x)) = \tan(\theta(x+\delta x)) = \theta(x+\delta x).$$

On obtient donc

$$\partial_{tt}^2 h(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\ \frac{\partial_x h(t,x+\delta x) - \partial_x h(t,x)}{\delta x},$$

puis en faisant tendre $\delta x \to 0$, on obtient l'équation des cordes vibrantes

$$\partial_t^2 h(t,x) = c^2 \partial_x^2 h(t,x),$$

où l'on a noté $c = \sqrt{\tau/\rho}$. Cette constante, liée à la nature de la corde, sera identifiée plus loin comme étant la vitesse de propagation de l'onde.

Il est clair que le mouvement de la corde dépend de la façon dont on la frappe (ou pince, ou frotte…) à l'instant initial $t = 0$. Disons que l'on connaît la position initiale de la corde $u(x)$, et sa vitesse initiale $v(x)$. Avec ces notations, la fonction $h(t,x)$ doit être entièrement déterminé par les conditions

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} h(t,x) = c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} h(t,x) = 0 \\ h(t,0) = h(t,L) = 0, \text{ pour tout } t \\ h(0,x) = u(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} h(0,x) = v(x), \end{cases}$$

1.2 Dérivées partielles

On introduira au fur et à mesure quelques notions nécessaires sur les fonctions de plusieurs variables réelles. On se limite pour les énoncés au cas de fonctions de deux variables, mais les notions qui suivent se généralisent facilement aux fonctions de n variables réelles, où n est un entier supérieur à 2 quelconque.

Definition 1.2.1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle applications partielles associées à f en (t_0, x_0), les deux fonctions d'une seule variable obtenues en en figeant une :

$$f_1 : t \mapsto f(t, x_0) \text{ et } f_2 : x \mapsto f(t_0, x).$$

La notion de dérivée partielle de f en un point (t_0, x_0) est alors particulièrement simple : il s'agit des dérivées des applications partielles associées à f en (t_0, x_0).

Definition 1.2.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, et f_1,f_2 les deux applications partielles associées à f en (t_0, x_0). On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en (t_0, x_0) lorsque f_1 est dérivable en t_0. On note alors

$$f_1'(t_0) = \partial_1 f(t_0, x_0) = \partial_t f(t_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(t_0, x_0).$$

De la même manière, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en (t_0, x_0) lorsque f_2 est dérivable en x_0, et on note

$$f_2'(x_0) = \partial_2 f(t_0, x_0) = \partial_x f(t_0, x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(t_0, x_0).$$

Exercice 1.2.3 Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes au point (t_0, x_0), lorsqu'elles existent.

$$f(t,x) = t^2 + x^3,\ f(t,x) = t^2 x^4,\ f(t,x) = xt\cos(x) + x^2 + 2,$$

et

$$f(t,x) = |t| + \frac{x}{t^2 + x^2}.$$

Les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont alors des fonctions de deux variables définies, partout où cela a un sens, par

$$\partial_1 f : (t,x) \mapsto \partial_1 f(t,x) \quad \text{et} \quad \partial_2 f : (t,x) \mapsto \partial_2 f(t,x).$$

On peut à nouveau avoir envie de connaitre les dérivées partielles de ces fonctions. On définit alors par récurrence les dérivées partielles d'ordre supérieur. Par exemple $\partial^2_{tt} u(t_0, x_0)$ désigne $\partial_t(\partial_t u)(t_0, x_0)$, c'est à dire la dérivée partielle par rapport à la première variable en (t_0, x_0) de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto \partial_t u(t,x)$.

Exercice 1.2.4 Calculer $\partial^2_{tt} u(t_0, x_0)$, $\partial^2_{xx} u(t_0, x_0)$, $\partial^2_{tx} u(t_0, x_0)$,$\partial^2_{xt} u(t_0, x_0)$ et $\partial^2_{txt} u(t_0, x_0)$, pour les trois premières fonctions de l'exercice précédent.

On observe dans l'exercice que $\partial^2_{xy} u = \partial^2_{yx} u$. Il se trouve que ce n'est pas toujours le cas, sauf lors que les fonctions que l'on considère sont suffisamment "gentilles". Pour préciser tout cela (entre autres !), on doit introduire la notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions de plusieurs variables.

Definition 1.2.5 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est dite (de classe) $\mathcal{C}^1$ sur Ω lorsque ses dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont définies et continues en chaque point de Ω. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ si toutes les dérivées partielles d'ordre k sont de classe $\mathcal{C}^1$. Enfin f est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le résultat suivant, que l'on admettra, rend compte du phénomène mentionné ci-dessus.

Proposition 1.2.6 (Theorème de Schwartz) Si f est de classe C^2 dans Ω, alors on a :

$$\forall (t,x) \in \Omega,\ \partial_t(\partial_x f(t,x)) = \partial_x(\partial_t f(t,x)). \tag{1.1}$$

Cours 2

L'équation des ondes sur un axe infini

On va résoudre l'équation des ondes sur $\mathbb{R}$, où si l'on veut, décrire le mouvement d'une corde de longueur infinie, c'est à dire trouver les fonctions $u(t,x)$, définies et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient

$$c^2\partial_{xx}^2 u(t,x) = \partial_{tt}^2 u(t,x), \tag{2.1}$$

On peut remarquer que, si $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie (2.1), on a aussi

$$0\partial_{tt}^2 u(t,x) - c^2\partial_{xx}^2 u(t,x) = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u(t,x).$$

Autrement dit, la fonction $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution de l'équation des ondes si et seulement si la fonction $w(t,x) = (\partial_t + c\partial_x)u(t,x)$ vérifie l'équation

$$\partial_t w - c\partial_x w = 0. \tag{2.2}$$

Si l'on est capable de trouver toutes les solutions de cette équation, on récupèrera toutes les solutions de l'équation des ondes en cherchant les fonctions u telles que

$$\partial_t u + c\partial_x u = w(t,x), \tag{2.3}$$

pour toutes les fonctions w solutions de (2.2). Les équations (2.2) et (2.3) sont des EDP d'ordre 1, donc peut-être plus simples à résoudre que l'équation des ondes, qui est d'ordre 2. Ce type d'EDP porte le nom d'équation de transport, homogène pour (2.2) et inhomogène pour (2.3), et il se trouve qu'effectivement, on peut facilement écrire explicitement toutes leurs solutions.

2.1 Les équations de transport : modélisation

On considère un tube horizontal cylindrique, dans lequel coule de l'eau par exemple, à la vitesse constante c (en m/s). Un polluant (du pétrole) est en suspension dans l'eau. On note $u(t,x)$ la concentration (en gr/m) de polluant à l'instant t et à l'abscisse x.

La fonction u vérifie l'EDP

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0. \tag{2.4}$$

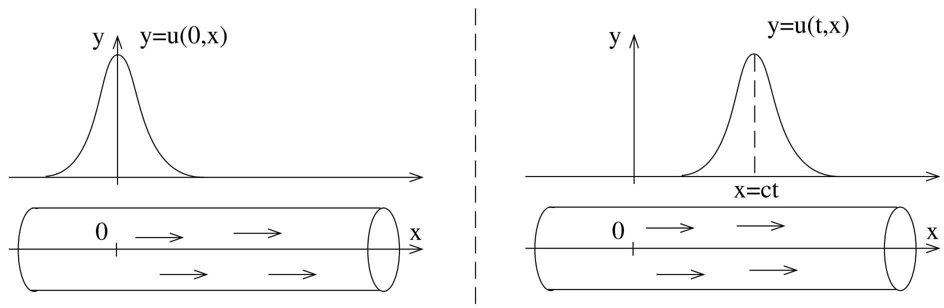


Fig. 2.1 : Transport d'un polluant dans un tube

En effet, à l'instant t, la quantité de polluant entre les points d'abscisse 0 et x est

$$Q(t,x) = \int_0^x u(t,y)dy.$$

Entre l'instant t et l'instant $t+h$, le polluant s'est deplacé à la vitesse c de ch mètres. La quantité de polluant entre les points d'abscisse ch et $x+ch$ est donc celle qui se trouvait à l'instant t entre 0 et x. On a donc aussi

$$Q(t,x) = \int_{ch}^{x+ch} u(t+h,y)dy.$$

Nous voulons dériver l'égalité obtenue par rapport à x. Pour ce faire nous effectuons le changement de variable $y' = y - ch$ dans la deuxième intégrale. Nous obtenons

$$Q(t,x) = \int_0^x u(t+h,y'+ch)dy',$$

et donc, en prenant la dérivée partielle par rapport à x,

$$u(t,x) = u(t+h,x+ch)\ . \tag{2.5}$$

Cette équation est vérifiée pour tous t, h et x.

Nous voulons enfin dériver par rapport à h l'égalité (2.5). On utilisera très souvent le résultat suivant (dérivée d'une fonction composée).

Proposition 2.1.1 (Dérivée d'une fonction composée) Soit φ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit aussi u_1 et u_2 deux applications de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$F(s) = \varphi(u_1(s), u_2(s))$$

est $\mathcal{C}^1$, et

$$F'(s) = \partial_1\varphi(f_1(s), f_2(s))u_1'(s) + \partial_2\varphi(u_1(s), u_2(t))u_2'(s).$$

Preuve.— Puisque φ est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une fonction ε telle que $\varepsilon(a, kb) \to 0$ quand $\|(a,b)\| \to 0$, et

$$\varphi(x+a, y+b) = \varphi(x,y) + a\partial_1\varphi(x,y) + b\partial_2\varphi(x,y) + \|(a,b)\|\varepsilon(a,b).$$

oit $s \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on calcule

$$F(s+h) = \varphi(u_1(s+h), u_2(s+h)) = \varphi(u_1(t) + hu_1'(s) + h\varepsilon_1(h), u_2(t) + hu_2'(s) + h\varepsilon_2(h))$$

Notant $a = hu_1'(s) + h\varepsilon_1(h)$ et $b = hu_2'(s) + h\varepsilon_2(h)$ on a donc

$$\begin{aligned}
F(s+h) = F(s) & \\
& + h\left(u_1'(s) + \varepsilon_1(h)\right)\partial_1\varphi(u_1'(s), u_2'(s)) + h\left(u_2'(s) + \varepsilon_2(h)\right)\partial_2\varphi(u_1'(s), u_2'(s)) \\
& + h^2\|(u_1'(s) + \varepsilon_1(h), u_2'(s) + \varepsilon_2(h))\|\varepsilon(u_1'(s) + \varepsilon_1(h), u_2'(s) + \varepsilon_2(h)) \\
= \; & F(s) \\
& + hu_1'(s)\partial_1\varphi(u_1'(s), u_2'(s)) + hu_2'(s)\partial_2\varphi(u_1'(s), u_2'(s)) \\
& + h\tilde{\varepsilon}(h),
\end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}(h) \to 0$ quand $h \to O$. □

Si maintenant, on applique ce lemme à l'équation (2.5), on retrouve bien en dérivant par rapport à h, puis en prenant $h = 0$ l'équation (2.4).

2.2 Les équations de transport : solutions

On considère l'équation aux dérivées partielles d'ordre 1

$$a\partial_t u(t,x) + b\partial_x u(t,x) = 0, \tag{2.6}$$

où a et b sont deux constantes réelles, dont l'une au moins n'est pas nulle. On cherche toutes les fonctions u définies sur $\mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ l'égalité (2.6) est vérifiée.

Pour se fixer les idées, on commence par le cas $a = 1$ et $b = 0$, c'est-à-dire

$$\partial_t u(t,x) = 0.$$

La fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est solution si et seulement si elle ne dépend t. Autrement dit, les solutions sont les fonctions u qui s'écrivent

$$u(t,x) = f(x)$$

pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On fait aussi une remarque d'ordre plus géométrique : les solutions $(t,x) \mapsto u(t,x)$ sont exactement les fonctions qui sont constantes le long des droites horizontales du plan (Otx), c'est-à-dire le long des droites dirigées par le vecteur $(a,b) = (1,0)$. C'est un phénomène général pour les équations (2.6).

Proposition 2.2.1 La fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ est solution de (2.6), si et seulement si u est constante le long de chaque droite de direction (a, b).

Preuve.— Soit (t, x) un point de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\sigma \mapsto \varphi(k) = u((t, x) + \sigma(a, b)) = u(t + \sigma a, x + \sigma b).$$

La fonction φ donne les valeurs de u en chaque point $(t', x') = (t, x) + \sigma(a, b)$ de la droite $\mathcal{D}$ de direction (a, b) passant par (t, x). Or, en utilisant à nouveau le Lemme 2.1.1, on a

$$\varphi'(\sigma) = \partial_1 u(t + \sigma a, x + \sigma b)a + \partial_2(t + \sigma a, x + \sigma b)b.$$

Donc φ est constante, et u l'est sur la droite $\mathcal{D}$, si et seulement si u est solution de (2.6). □

Definition 2.2.2
On appelle caractéristiques de l'équation (2.6) les droites de vecteur directeur (a, b). Ce sont toutes les droites $\mathcal{D}_c$ d'équation $bt - ax = c$, où c parcourt $\mathbb{R}$.

Notons maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction qui à un réel c associe la valeur de u sur la droite $\mathcal{D}_c$. Soit (t_0, x_0) un point de $\mathbb{R}^2$. Il existe une et une seule caractéristique qui passe par (t_0, x_0) : c'est la droite $\mathcal{D}_{c_0}$, où $c_0 = bt_0 - ax_0$. On a donc

$$u(t_0, x_0) = f(c_0) = f(bt_0 - ax_0).$$

Ce raisonnement étant valable pour tout (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$, on a finalement

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, u(t, x) = f(bt - ax). \tag{2.7}$$

On remarque au passage que, puisque u est $\mathcal{C}^1$, f l'est aussi (Exercice !).

On a donc démontré le résultat suivant.

Proposition 2.2.3 Les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation (2.6) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$u(t, x) = f(bt - ax)$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 2.2.4 Dans la proposition ci-dessus, on peut remplacer $\mathbb{R}^2$ par un convexe ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. La fonction f est alors définie sur un intervalle qui est l'image dans $\mathbb{R}$ de Ω par l'application $(t, x) \mapsto bt - ax$.

2.3 La formule de D'Alembert

On retourne enfin à l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt}u(t,x) = c^2\partial^2_{xx}u(t,x),$$

que l'on a vu être équivalente au système de deux équations de transport

$$\begin{cases} \partial_t w - c\partial_x w = 0, \\ \partial_t u + c\partial_x u = w(t,x). \end{cases}$$

La proposition 2.2.3 donne les solutions de la première équation. Il s'agit des fonctions de la forme

$$w(t,x) = h(x+ct),$$

où h est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il reste à trouver les solutions de la seconde équation, en remplaçant w par l'expression ci-dessus. On remarque alors que, notant f une primitive de h,

$$\partial_t(f(x+ct)) + c\partial_x(f(x+ct)) = cf'(x-ct) + cf'(x+ct) = 2ch(x+ct)$$

L'équation peut donc s'écrire

$$\partial_t(u(t,x) - \frac{1}{2c}F(x+ct)) + c\partial_x(u(t,x) - \frac{1}{2c}F(x+ct)) = 0.$$

Donc $u \in \mathcal{C}^2$ est une solution de l'équation des ondes si et seulement si il existe un fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la fonction

$$v : (t,x) \mapsto u(t,x) - F(x+ct)$$

est une solution de l'équation de transport, homogène,

$$\partial_t v + c\partial_x v = 0.$$

Compte tenu de la Proposition 2.2.3, on a donc l'équivalence : u est une solution de l'équation des ondes si et seulement si il existe deux fonctions F et g de classe $\mathcal{C}^2$ telles que

$$u(t,x) = F(x+ct) + g(x-ct).$$

On vient de voir que l'équation des ondes sur l'axe réel a de nombreuses solutions. Notre objectif ici est de montrer le résultat suivant, qui remonte à D'Alembert au milieu du 18ème siècle.

Théoreme 2.3.1
Soient ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. Alors le problème

$$\begin{cases} \partial^2_{tt}u(t,x) - c^2\partial^2_{xx}u(t,x) = 0 \ , \\ u(0,x) = \phi(x) \ , \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \ , \end{cases} \tag{2.8}$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Il s'agit de la fonction

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\phi(x+ct) + \phi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds$$

Preuve.— On a vu précédemment que les solutions générales de l'équation des ondes sont de la forme :

$$u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)\ ,$$

avec f et g de classe C^2. Les conditions initiales donnent alors :

$$\phi(x) = f(x) + g(x)\ ,\ \psi(x) = c\left(f'(x) - g'(x)\right)\ .$$

Cette deuxième version a l'avantage de donner aussi l'unicité. □

Exercice 2.3.2
Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = \sin x$ et $\psi(x) = 0$

Exercice 2.3.3
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = 0$ et $\psi(x) = \cos x$

Exercice 2.3.4
Résoudre le problème de cauchy pour l'équation des ondes avec $\phi(x) = e^x$ et $\psi(x) = \sin x$

2.4 Vitesse de propagation finie

On vient de voir que l'effet d'une position $\phi(x)$ à l'instant $t = 0$ est une paire d'ondes et qui se propagent dans les deux directions à vitesse c. Si l'on a une vitesse $\psi(x)$ à l'instant $t = 0$, on obtient une onde qui s'étale dans les deux directions, à une vitesse inférieure ou égale à c. Dans tous les cas rien ne se propage à vitesse plus grande que c. Autrement dit la valeur de la solution u au point (t,x) ne dépend que des valeurs de ϕ en $x-ct$ et en $x+ct$, et des valeurs de ψ sur l'intervalle $[x-ct, x+ct]$. Pour le voir il suffit de reprendre l'expression de la solution donnée dans le théorème de D'Alembert.

Proposition 2.4.1
Soient ϕ et ψ comme dans le Théorème 2.3.1, et u la solution du problème de Cauchy (2.8). Si ϕ et ψ sont nulles en dehors de l'intervalle $-R \leq x \leq R$, alors pour chaque t fixé, $u(t,x)$ est nulle quand $x \notin [-R-c|t|, R+c|t|]$.

Exercice 2.4.2
Le milieu d'un corde de piano de longueur ℓ, de tension τ et de densité ρ est frappé par un marteau de diamètre $2a$. Une puce dort sur la corde à la distance $\ell/4$ d'une extrémité. Quand la puce se réveillera-t-elle ?

2.4.1 Energie

Definition 2.4.3
Soit u une solution de l'équation des ondes. On appelle énergie de u la quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx$$

Il faut noter que, pour ce qui concerne les constantes ρ et τ qui sont strictement positives, nous avons gardé ici la définition physique de l'énergie de la corde vibrante :
la première intégrale est la partie énergie cinétique ("$\frac{1}{2}mv^2$"), et la deuxième est la partie énergie potentielle, qui correspond à la tension τ multipliée par l'allongement de la corde élastique :

$$\sqrt{1+(\partial_x u)^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 \ .$$

Là encore l'hypothèse de petitesse des oscillations permet de simplifier considérablement l'étude !

Nous allons démontrer rigoureusement un phénomène très important, particulier aux équations du même type que celle des ondes - les équations hyperboliques : l'énergie est constante au cours du temps.

Théoreme 2.4.4
Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, avec $\phi \in \mathcal{C}^2$ et $\psi \in \mathcal{C}^1$. On suppose que ϕ et ψ sont nulles en dehors d'un intervalle borné $|x| \leq R$. Soit u l'unique solution du problème (2.8):

$$\begin{cases} \tau\partial^2_{xx}u(t,x) - \rho\partial^2_{tt}u(t,x) = 0 \ ; \\ u(0,x) = \phi(x) \ ; \\ \partial_t u(0,x) = \psi(x) \ . \end{cases}$$

Alors la a quantité

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2}\int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx$$

est une fonction constante de t.

Pour prouver ce résultat, on va dériver l'expression donnant $E(t)$ par rapport à t, et montrer que cette dérivée est nulle. Il nous faut donc dériver une intégrale dépendant d'un paramètre (voir quelques rappels à la fin du chapitre).
Posons $f(t,x) = (\partial_t u(t,x))^2$ et

$$A(t) = \frac{\rho}{2}\int_{\mathbb{R}} f(t,x)dx.$$

On veut dériver la fonction $t \mapsto A(t)$. Notons d'abord que, pour tout t fixé, l'intégrale $A(t)$ est en fait une intégrale sur un intervalle borné puisque la fonction $f(t,x)$, qui est continue, est nulle en dehors de l'intervalle
$\{|x| \leq R + ct\}$. De plus, pour tout intervalle $]t_1, t_2[$ fixé, on a donc $A(t)$ défini par une intégrale qu'on peut supposer définie sur un intervalle borné indépendant de t dans cet intervalle. On a maintenant

$$\partial_t f(t,x) = 2\partial_t u(t,x)\partial^2_{tt}u(t,x) \ ,$$

et on obtient ainsi

$$A'(t) = \rho\int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x)\partial^2_{tt}u(t,x)\, dx \, .$$

Comme u est solution de l'équation des ondes, on obtient finalement :

$$A'(t) = \tau \int_{\mathbb{R}} \partial_t u(t,x) \partial^2_{xx} u(t,x)\, dx\ .$$

Maintenant on intègre par parties cette intégrale, où l'intégrand est nul en dehors d'un intervalle borné :

$$A'(t) = -\tau \int_{\mathbb{R}} \partial^2_{xt} u(t,x) \partial_x u(t,x) dx = -\frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t (\partial_x u(t,x))^2 dx.$$

Notant alors $B(t) = \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx$, on montre de la même manière que

$$B'(t) = \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} \partial_t (\partial_x u(t,x))^2 dx,$$

et puisque $E(t) = A(t) + B(t)$, on a bien $E'(t) = 0$. □

Remarque 2.4.5
On peut retrouver l'unicité en utilisant la méthode d'énergie. Soient u_1 et u_2 deux solutions. La fonction $v = u_1 - u_2$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial^2_{tt} u(t,x) - c^2 \partial^2_{xx} u(t,x) = 0 \\ u(0,x) = 0 \\ \partial_t u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Puisque l'énergie de v est constante, on a pour tout t,

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t u(t,x))^2 dx + \frac{\tau}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_x u(t,x))^2 dx = E(0) = 0\ .$$

Donc $\partial_x v$ et $\partial_t v$ sont toujours nulles, donc v est constante.
Puisque $v(0,x) = 0$, v est identiquement nulle et $u_1 = u_2$.

Cours 3

L'equation des ondes sur un segment

On reprend le problème physique obtenu dans la première partie, qui est censé permettre de décrire à tout instant t la hauteur $h(t, x)$ d'une corde élastique de longueur ℓ, maintenue immobile en ses deux extrémités, connaissant sa position initiale $u(x)$ et sa vitesse initiale $v(x)$. Ce problème s'écrit

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 h(t,x) = c^2 \partial_x^2 h(t,x) = 0 \\ h(t,0) = h(t,L) = 0, \text{ pour tout } t \\ h(0,x) = u(x) \\ \partial_x h(0,x) = v(x), \end{cases}$$

où l'on a noté $c = \sqrt{\tau/\rho}$.

Notre objectif est de le résoudre, c'est à dire de trouver toutes les fonctions $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0, \ell])$ qui vérifient chacune de ces équations. Bien entendu, l'intuition physique qui nous a conduit à $(\mathcal{P})$ nous laisse à penser qu'il y a une et une seule solution, mais cela reste à prouver.

3.1 Séparation des variables

Il doit être d'abord bien clair que la formule de D'Alembert ne peut pas nous être utile : elle décrit une fonction qui n'est pas nulle en dehors de $[0, \ell]$, contrairement à ce que l'on cherche.

L'idée la plus naturelle est de chercher une solution $h(t, x)$ non-nulle, qui soit à variables séparées, c'est à dire de la forme

$$h(t, x) = T(t) \times X(x),$$

où T et X sont des fonctions $\mathcal{C}^2$. Si une telle fonction est solution de $(\mathcal{P})$, on doit avoir en particulier

$$T''(t)X(x) = c^2 T(t)X''(x).$$

On divise cette équation par $c^2 T(t)$, en supposant que T ne s'annule pas. On obtient alors

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} X(x) = X''(x).$$

Le membre de gauche ne dépend donc pas de t. En particulier $\frac{T''(t)}{c^2T(t)}$ est une constante $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$. Du coup, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$T''(t) = \lambda c^2 T(t) \text{ et } X''(x) = \lambda X(x).$$

Il est clair que si X et T vérifient ces équations (et même si T s'annule), alors h vérifie la première équation de $(\mathcal{P})$.

Les solutions de l'équation différentielles $y'' = qy$ sont bien connues. Le signe de q joue un rôle important :

- Si $q < 0$, les solutions sont les fonction $s \mapsto y(s) = a\cos(\sqrt{-q}s) + b\sin(\sqrt{-q}s)$.
- Si $q > 0$, les solutions sont les fonction $s \mapsto y(s) = ae^{\sqrt{q}s} + be^{\sqrt{q}s}$.

Maintenant on se souvient que la corde est immobile à ses extrémités. Donc que $h(t,0) = h(t,\ell) = 0$ pour tout t. Pour la fonction T, cela signifie que $T(0) = T(\ell) = 0$.

Or si $\lambda > 0$, $T(t) = ae^{\sqrt{\lambda}t} + be^{\sqrt{\lambda}t}$, ce qui entraine $a = b = 0$, et $h = T = 0$, ce qui est contraire à nos hypothèses.

Donc nécessairement, il existe $\omega > 0$ tel que $\lambda = -\omega^2$, et

$$T(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t),$$

avec $a = T(0) = 0$. Donc $T(t) = b\sin(\omega t)$.

3.2 En avant la musique !

L'un des objectifs de ce qui va suivre, est de démontrer que le problème des cordes vibrantes $(\mathcal{P})$ ci-dessus admet une unique solution $h(t,x)$ qui s'écrit comme superposition (d'un nombre éventuellement infini) d'ondes sinusoïdales. Dans le cas où la corde est pincée à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire $v = 0$), cette solution s'écrit

$$h(t,x) = \sum_{n\geq 1} A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Le membre de droite de cette égalité porte le nom de décomposition de h en série de Fourier.

La note produite par la corde est donc une superposition (somme infinie) d'ondes sinusoïdales h_k de fréquence temporelle $\nu k = kc/2L$, où

$$h_k(t,x) = A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Ces ondes sinusoïdales sont appelées k-ième harmonique de la note produite. La première, h_1 est appelée fondamentale. Le nombre A_k est l'amplitude de cette k-ième harmonique dans la note. Cette amplitude est reliée aux données initiales u et v (on rappelle qu'on traite ici le cas $v = 0$, pour simplifier). Lors de la production d'une note, l'oreille humaine perçoit avant tout la fondamentale. Ce que l'on appelle hauteur de la note est la fréquence nu_1. Cependant l'oreille entend aussi quelques unes des premières harmoniques : le timbre d'un instrument est directement relié aux harmoniques qu'il peut émettre ainsi qu'à leur intensité. Le son produit par une corde a pour fréquence (fondamentale)

$$\nu_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

On retrouve donc ainsi le fait qu'on obtient un son plus aigu en en augmentant la tension τ de la corde, ou bien en diminuant la masse linéique de la corde (par exemple en diminuant son diamètre), ou en diminuant la longueur L de la corde, ce que l'on fait sur une guitare en posant ses doigts sur le manche. Au passage, on voit qu'on obtient une note de fréquence double en divisant la longueur de la corde par 2 : l'écart entre ces deux notes est appelé octave !

Pour terminer, signalons que les physiciens définissent l'énergie de la corde vibrante comme étant le nombre

$$E = \sqrt{\sum_{k\geq 0} A_k^2}.$$

C'est aussi cette quantité que l'on appelle intensité du son produit. Les amplitudes A_k de chacune des harmoniques doivent donc tendre vers 0 assez vite quand $k \to +\infty$ pour que la série converge et que l'énergie soit finie. En particulier, comme on l'a tous expérimenté, seules les premières harmoniques sont perceptibles par l'oreille humaine.

3.A Quelques théorèmes de base sur les intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre

Les deux théorèmes qui suivent servent dans de multiples circonstances et leurs hypothèses sont faciles à vérifier.

Théoreme 3.A.1
Soit $f : [x_1, x_2] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit* F *définie par :*

$$[x_1, x_2] \ni x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x, t)dt \ .$$

Alors F *est continue sur* $[x_1, x_2]$.

Pour la démonstration, le point essentiel est de remarquer que f est uniformément continue sur $[x_1, x_2] \times [a, b]$.

Pour ce qui concerne la dérivabilité de F on dispose du critère suivant

Théoreme 3.A.2
Soit $f : [x_1, x_2] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que f admet une dérivée partielle $\partial_x f$ par rapport à sa première variable, qui est continue sur $[x_1, x_2] \times [a, b]$. Alors l'application F définie par

$$[x_1, x_2] \ni x \mapsto \int_a^b f(x, t)\, dt$$

est continument dérivable sur $[x_1, x_2]$, et

$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(x, t)\, dt.$$

3.B Exercices

Exercice 3.B.1 Montrer que si u est une solution de l'équation des ondes

$$\partial^2_{tt} u(t, x) - \partial^2_{xx} u(t, x) = 0,$$

alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les fonctions $v_\lambda : (t, x) \mapsto u(t, x - \lambda)$ et $w_\lambda : (t, x) \mapsto u(\lambda t, \lambda x)$ sont aussi solutions.

Exercice 3.B.2 *i)* On considère l'équation des ondes amorties

$$\partial^2_{tt} u(x, t) = \partial^2_{xx} u(x, t) - r \partial_t u(x, t), \tag{1}$$

où r est un réel positif ou nul (qui mesure la résistance de l'air). On suppose que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui vérifie l'équation (1), et l'on pose

$$\begin{cases} e(t, x) = \frac{1}{2}(\partial_t u(t, x))^2 + \frac{1}{2}(\partial_x u(t, x))^2 \\ p(t, x) = \partial_t u(t, x) \partial_x u(t, x). \end{cases}$$

A. **On suppose dans cette partie que** $r = 0$.

a. Montrer que $\partial_t e(t, x) = \partial_x p(t, x)$ et que $\partial_x e(t, x) = \partial_t p(t, x)$. En déduire que e et p sont également solution de (1) (toujours avec $r = 0$).

b. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, $u(t, x)$ et $\partial_t u(t, x)$ sont nulles pour tout $x \notin [-R, R]$.

b1) Rappelez pourquoi, pour chaque t, il existe un réel $R(t)$ telle que $u(t, x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$.

b2) Montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t, x) dx = 0.$$

3. Quel théorème du cours évoque ce résultat ?

II. **On suppose maintenant que** $r > 0$.

1. Montrer que $\partial_t e(t,x) = -r(\partial_t u(t,x))^2 + \partial_x p(t,x)$.

2. En supposant encore une fois que $u(t,x)$ est nulle pour tout $x \notin [-R(t), R(t)]$, montrer que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t e(t,x) dx \leq 0.$$

3. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Cours 4

L'équation de Laplace et principe du maximum

4.A Extrema d'une fonction de deux variables

4.A.1 Fonctions d'une variable

On commence par la formule de Taylor avec reste intégral pour les fonctions d'une variable réelle.

Théoreme 4.A.1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$*. Pour tout* $k \leq n$ *on a*

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2}f''(0) + \ldots + \frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + \int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)du$$

Preuve :
Par récurrence. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons qu'elle le soit pour l'entier $k-1$, c'est-à-dire

$$\int_0^s \frac{(s-u)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(u)du = f(s) - f(0) - sf'(0) - \ldots - \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0).$$

On intègre par parties

$$\int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)du = -\frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + \int_0^s \frac{(s-u)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(u)du,$$

et donc avec l'hypothèse de récurrence

$$\int_0^s \frac{(s-u)^k}{k!}f^{(k+1)}(u)du =$$

$$-\frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + f(s) - f(0) - sf'(0) - \ldots - \frac{s^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0).$$

On voit donc que la formule est vraie pour l'entier k. □

On utilise cette formule également sous la forme

$$f(s) = f(0) + sf'(0) + \ldots + \frac{s^k}{k!}f^{(k)}(0) + \frac{s^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-u)^k f^{(k+1)}(su)du. \tag{4.1}$$

Definition 4.A.2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et s_0 un point de $\mathbb{R}$. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) local en s_0 s'il existe un intervalle $]s_0-\alpha, s_0+\alpha[$ pour tout s duquel on ait $f(s) \leq f(s_0)$ (resp. $f(s) \geq f(s_0)$).

Voici d'abord une condition nécessaire d'extremum local.

Proposition 4.A.3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un extremum local en s_0, alors $f'(s_0) = 0$.

Preuve :
On prend $s_0 = 0$ pour simplifier. Puisque f est dérivable, il existe une fonction ϵ de limite nulle en 0 telle que

$$f(s) = f(0) + s(f'(0) + \epsilon(s)).$$

Supposons que $f'(0) \neq 0$, par exemple que $f'(0) > 0$. Puisque ϵ tend vers 0 en 0, il existe un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ pour tout s duquel $f'(0) + \epsilon(s) > 0$. Mais alors $f(s) > f(0)$ pour $\alpha > s > 0$ et $f(s) < f(0)$ pour $-\alpha < s < 0$, ce qui contredit le fait que 0 est un extremum local pour f. □

Remarque 4.A.4
Attention ! Dans le cas où la fonction f est définie sur un intervalle fermé $[a, b]$, le critère ci-dessus ne vaut que pour les extrema de f dans $]a, b[$. On le voit dans la démonstration ci-dessus puisque l'on doit pouvoir calculer $f(s)$ pour des $s < 0$ et des $s > 0$. On peut aussi penser au cas d'une fonction strictement monotone, par exemple $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Cette fonction admet un maximum en $x = 1$, alors que $f'(1) = 1$.

La formule de Taylor permet d'énoncer une condition suffisante pour qu'une fonction (suffisamment régulière) admette un extremum local en s_0.

Proposition 4.A.5
Soit I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et s_0 un point de I. Si $f'(s_0) = 0$, et si $f''(s_0) \neq 0$, alors la fonction f admet un extremum local en s_0. C'est un maximum si $f''(s_0) < 0$ et un minimum si $f''(s_0) > 0$.

Preuve :
On reprend la formule de Taylor ci-dessus, sachant que $f'(0) = 0$:

$$f(s) - f(0) = \frac{s^2}{2}(f''(0) + \epsilon(s)) \,,$$

avec $\epsilon(s) = 2\int_0^1 (1-u)(f''(su) - f''(0))\, du$. L'hypothèse que f est de classe C^2 implique que $\lim_{s\to 0} \epsilon(s) = 0$.

Supposons par exemple que $f''(0) > 0$. Prenant $\alpha > 0$ assez petit, on peut donc affirmer que pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$f''(0) + \epsilon(s) \geq \frac{1}{2} f''(0) > 0 \,.$$

Donc, pour tout $s \in]-\alpha, \alpha[$, on a $f(s) \geq f(0)$, ce qui montre que f admet un minimum local en 0. Le cas $f''(0) < 0$ se traite de la même manière. □

Remarque 4.A.6
On appelle souvent points critiques de f les points où f' s'annule. On vient de voir que les points critiques où la dérivée seconde de f ne s'annule pas sont des extrema de f. Les points critiques où la dérivée seconde de f s'annule sont dits dégénérés, et on peut par exemple utiliser la formule de Taylor à un ordre plus élevé pour connaitre l'allure du graphe de f au voisinage de ces points.

L'exercice suivant est sans doute utile pour mieux comprendre ultérieurement la démonstration correspondant au principe du Maximum

Exercice 4.A.7
Soit u une solution de classe $C^2([0,1])$ de $-u''(x) + q(x)u(x) = 0$ dans $[0,1]$, avec $u(0) = u(1) = 0$. On suppose que $q(x) > 0$ sur $]0,1[$. Montrer que $u = 0$. Pour cela, on montrera que $\pm u \leq 0$ en regardant ce qui se passe en un point x_0 où $\pm u$ est maximum.
Une autre approche est de multiplier par u l'équation et d'intégrer sur $[0,1]$. En utilisant une intégration par parties, montrer qu'alors

$$\int_0^1 u'(x)^2 dx + \int_0^1 q(x)u(x)^2 dx = 0 \,.$$

En déduire le théorème sous l'hypothèse plus faible $q \geq 0$.

4.A.2 Fonctions de deux variables

Definition 4.A.8
Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, et (x_0, y_0) un point de Ω. On dit que F admet un maximum (resp. minimum) local en (x_0, y_0) s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in \Omega$ vérifant $d((x, y), (x_0, y_0)) < \alpha$, on ait $F(x, y) \leq F(x_0, y_0)$ (resp. $F(x, y) \geq F(x_0, y_0)$).

Pour les fonctions de deux (plusieurs) variables, de classe C^1, les extrema sont également des points critiques.

Proposition 4.A.9
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si F admet un extremum local en (x_0, y_0), alors $(DF)_{(x_0,y_0)} = 0$. Autrement dit

$$(\partial_1 F)(x_0, y_0) = 0 \ , \ (\partial_2 F)(x_0, y_0) = 0 \ .$$

Preuve :
On prend $(x_0, y_0) = (0, 0)$ pour simplifier. Il suffit d'appliquer les résultats de dimension 1 à la fonction $t \mapsto F(tu_1, tu_2)$ où $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$ est fixé. On a ainsi montré que la dérivée de F dans la direction (u_1, u_2) est nulle. □

Remarque 4.A.10
Comme dans le cas des fonctions d'une variable, il est très important de remarquer que, dans la preuve de cette proposition, on utilise de manière cruciale le fait que F soit définie dans un voisinage de (x_0, y_0). Lorsque la fonction F est définie sur un domaine avec bord, cette proposition ne vaut donc que pour les extrema qui ne se trouvent pas sur le bord.

On veut maintenant trouver une condition suffisante pour qu'un point $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ soit un extremum local de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On se ramène au cas de $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (0, 0)$ en posant

$$u_1 = x_1 - \tilde{x}_1 \, , u_2 = x_2 - \tilde{x}_2 \, .$$

On suppose que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. En appliquant la formule de Taylor (4.1) à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(s) = F(s(u_1, u_2)),$$

et en prenant $s = 1$, on obtient la formule suivante :

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2) \quad &= \quad F(0,0) + u_1\partial_1 F(0,0) + u_2\partial_2 F(0,0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_1^2\partial_{11}^2 F(0,0) + 2u_1u_2\partial_{22}^2 F(0,0) + u_2^2\partial_{22}^2 F(0,0)) \\ &\quad + \frac{1}{2}s^2(\epsilon_{11}(u_1,u_2)u_1^2 + 2\epsilon_{12}(u_1,u_2)u_1u_2 + \epsilon_{22}(u_1,u_2)u_2^2) \, , \end{aligned} \tag{4.2}$$

avec

$$\epsilon_{ij}(u_1, u_2) := 2\int_0^1 (1-t)\left(\partial_{ij}^2 F(tu_1, tu_2) - \partial_{ij}^2 F(0,0)\right) dt \ .$$

Pour ce qui concerne le terme de reste, tout ce qui compte, c'est que, F étant de classe $\mathcal{C}^2$, les ϵ_{ij} tendent vers 0 quand (u_1, u_2) tend vers $(0, 0)$.
A la vue du cas des fonctions d'une variable, on comprend donc que le comportement de f au voisinage du point critique $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ ne va dépendre que du signe de la quantité

$$Q_F(u_1, u_2) = u_1^2\partial_{11}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + 2u_1u_2\partial_{22}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + u_2^2\partial_{22}^2 F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tag{4.3}$$

pour (u_1, u_2) proche de $(0, 0)$.
Une des méthodes les plus simples pour connaitre le signe de cette quantité consiste à l'écrire sous forme d'une somme ou différence de carrés : c'est la méthode de Gauss. On détermine ainsi la *signature de la forme quadratique* Q_F : c'est le couple (n_+, n_-), où n_+ (resp. n_-) est le nombre de valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) de la matrice M_F associée à Q_F.

Concrètement, la matrice M_F est donnée par :

$$M_F := \begin{pmatrix} \partial_{11}F(0,0) & \partial_{12}F(0,0) \\ \partial_{21}F(0,0) & \partial_{22}F(0,0) \end{pmatrix}$$

On notera que M_F aussi appelée $Hessien$ de F au point $(0, 0)$ est une matrice symétrique. Quand ses valeurs propres sont non nulles, on dit alors qu'elle est non dégénérée, l'analyse du signe de ses valeurs propres permet de déterminer le comportement de F près du point critique $(0, 0)$.

Proposition 4.A.11
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $(DF)_{(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)} = 0$ en un point $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ de Ω. Soit Q la forme quadratique associée à F en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ définie par (4.3) qu'on supposera non dégénérée. La fonction F admet un minimum (resp. maximum) local en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ si et seulement si $sgn(Q) = (2, 0)$ (resp. $sgn(Q) = (0, 2)$). Lorsque $sgn(Q) = (1, 1)$, le point critique $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ est un col. F n'est alors ni un maximum ni un minimum local.

Dans le cas où Q admet une valeur propre nulle, le point critique est dit dégénéré, et une étude plus approfondie est nécessaire. On garde toutefois comme condition nécessaire.

Proposition 4.A.12
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ admettant un maximum local en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ dans Ω. Alors les valeurs propres de la matrice Hessienne de F en $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ sont négatives (ou nulles).

4.B Généralités sur l'équation de Laplace

On s'intéresse dans ce chapitre à l'équation de Laplace (on se limite au cas de deux variables)

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \tag{4.4}$$

où Δ désigne l'opérateur aux dérivées partielles $\Delta = \partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}$, appelé *Laplacien*, et f est une fonction continue donnée.

Cette équation est très importante à la fois en physique et en mathématiques. Du côté physique, la solution de l'équation (4.4) est par exemple le potentiel électrique engendré dans le plan par la répartition de charges $\rho = -\frac{1}{4\pi} f$. L'équation de la chaleur ou des ondes pour deux variables d'espace s'écrivent

$$\partial_t u = k(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u) \quad \text{et} \quad \partial^2_{tt} u = c^2(\partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u).$$

On est donc aussi en présence de l'équation de Laplace lorsque l'on s'intéresse aux phénomènes stationnaires, c'est-à-dire indépendant du temps, pour lesquels $\partial_t u = 0$ et $\partial^2_{tt} u = 0$. On est aussi intéressé par des solutions de la forme $u(t,x,y) = \exp -\lambda t\, \phi(x,y)$ (avec $\lambda > 0$ pour la chaleur) ou $u(t,x,y) = \exp i\lambda t\, \phi(x,y)$ pour l'équation des ondes. Du point de vue des mathématiques, le Laplacien est un objet fondamental aussi bien en analyse qu'en géométrie. Les solutions de (4.4) pour $f = 0$ - qui doivent être des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ - sont par exemple appelées fonctions harmoniques, et l'on va décrire quelques unes de leurs propriétés.

4.C Principe du Maximum

Théoreme 4.C.1
Soit D un ouvert borné et connexe[1] *de $\mathbb{R}^2$. Soit u fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans D, continue dans $\bar{D} = D \cup \partial D$. Si u est solution dans D de*

$$\Delta u(x,y) = 0.$$

alors le maximum de u dans $\bar{D}$ est atteint sur le bord[2] *de D.*

Preuve :

Soit u une fonction harmonique, et $v_\epsilon(x,y) = u(x,y) + \epsilon(x^2+y^2)$. On a

$$\Delta v_\epsilon(x,y) = \Delta u(x,y) + \epsilon\Delta(x^2+y^2) = 0 + 4\epsilon > 0. \tag{4.5}$$

D'un autre côté, si (x_0,y_0) est un maximum pour v_ϵ dans D, on a

$$\Delta v_\epsilon(x_0,y_0) = \partial^2_{xx} v_\epsilon(x_0,y_0) + \partial^2_{yy} v_\epsilon(x_0,y_0) \leq 0\,. \tag{4.6}$$

En effet, $\Delta v_\epsilon(x_0,y_0)$ est la trace du Hessien de v_ϵ en (x_0,y_0) (c'est à dire la somme des valeurs propres) et on a vu à la proposition 4.A.12 qu'une condition nécessaire pour avoir un maximum local est que les valeurs propres soit négatives (ou nulles).
Il y a contradiction entre (4.5) et (4.6). Par conséquent v_ϵ ne peut pas avoir de maximum local en un point (x_0,y_0) de D.
Or, puisque v_ϵ est continue, elle doit atteindre son maximum sur le compact $\bar{D}$. Elle l'atteint donc en un point (x_0,y_0) du bord ∂D. On a donc, pour tout (x,y),

$$u(x,y) < v_\epsilon(x,y) \leq v_\epsilon(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) + \epsilon(x_0^2+y_0^2) \leq \max_{\partial D} u + \epsilon r^2,$$

où $r > 0$ est choisi pour que le disque centré à l'origine de rayon r contienne D. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient, pour tout $(x,y) \in \bar{D}$,

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y).$$

□

Encore une fois, ce théorème dit que la fonction harmonique u, supposée aussi continue sur le compact $\bar{D}$, atteint son maximum en au moins un point du bord de D. 0n a en fait un Principe du Maximum Fort : u n'a pas d'extremum dans D. On ne démontrera pas ce résultat.

Exercice 4.C.2
Montrer que la fonction $u(x,y) = (1-x^2-y^2)/(1-2x+x^2+y^2)$ est harmonique dans le disque $x^2+y^2<1$. Le principe du maximum est-il vérifié dans $D = \{x^2+y^2<1\}$ pour cette fonction ? Etudier le même problème dans un disque de rayon strictement inférieur à 1, dans une couronne ...

Corrigé :
u n'est pas définie en $(1,0)$, et ne se prolonge pas par continuité en ce point puisque

$$\lim_{x\to 1^-} u(x,0) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{(1-x)^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty.$$

On a

$$\partial_x u(x,y) = 2\frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}, \partial_y u(x,y) = 4\frac{y(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^2},$$

et donc

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = -4\frac{-1+3x-3x^2+3y^2+x^3-3xy^2}{(1-2x+x^2+y^2)^3} = -\partial^2_{yy} u(x,y),$$

ce qui montre que u est harmonique. On peut voir également que u n'a pas de point critique dans D, mais de toutes façons, on a bien

$$u(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) = +\infty \ .$$

Exercice 4.C.3
Enoncer et démontrer un principe du minimum.

Corrigé :
Si u est harmonique dans D et continue sur $\bar{D}$, $v=-u$ aussi. Le Principe du Maximum dit que, pour tout $(x,y)\in\bar{D}$,

$$v(x,y) \leq \max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y),$$

c'est-à-dire

$$u(x,y) \geq -\max_{(x,y)\in\partial D} -u(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial D} u(x,y).$$

On peut déduire du principe du maximum l'unicité de la solution du problème de Dirichlet pour le Laplacien.

Proposition 4.C.4
Soit D un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction continue sur $\bar{D}$, et g une fonction continue sur ∂D. Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = f(x,y), & (x,y)\in D \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y)\in\partial D \end{cases} \tag{4.7}$$

admet au plus une solution $\mathcal{C}^2$.

Preuve :
Si u_1 et u_2 sont solutions de (4.7), $w = u_1 - u_2$ vérifie $\Delta w = 0$ et est nulle sur ∂D. Par le principe du maximum (et celui du minimum) on obtient $w = 0$ sur D. □

4.D Propriétés d'invariance

Il est très important de noter les propriétés d'invariance de l'équation de Laplace. Nous allons montrer que cette équation est invariante sous l'action des translations et des rotations du plan. De manière plus explicite, il s'agit de montrer le résultat suivant.

Lemme 4.D.1
Si $u(x', y')$ est une solution de $\Delta u = f$ dans un domaine D, alors $v(x, y) = u(\tau(x, y)) = u(x - a, y - b)$ et $w(x, y) = u(\rho(x, y)) = u(x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ sont encore solutions, dans $\tau^{-1}(D)$ et $\rho^{-1}(D)$ respectivement.

Preuve :
On n'écrit la preuve que pour w, le cas de v étant beaucoup plus simple (c'est donc un excellent **Exercice**). On pose (anciennes coordonnées en fonction des nouvelles)

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta - y \sin\theta, \\ y' = x \sin\theta + y \cos\theta. \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{cases} \partial_x w(x, y) = \cos\theta(\partial_{x'} u)(x', y') + \sin\theta(\partial_{y'} u)(x', y') \\ \partial_y w(x, y) = -\sin\theta(\partial_{x'} u)(x', y') + \cos\theta(\partial_{y'} u)(x', y'), \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \partial^2_{xx} w(x, y) = \cos^2\theta(\partial^2_{x'x'} u)(x', y') + 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \sin^2\theta(\partial^2_{y'y'} u)(x', y') \\ \partial^2_{yy} w(x, y) = \sin^2\theta(\partial^2_{x'x'} u)(x', y') - 2\cos\theta\sin\theta\partial^2_{x'y'} + \cos^2\theta(\partial^2_{y'y'} u)(x', y'). \end{cases}$$

On a donc bien $(\Delta_{x,y} w)(x, y) = (\Delta_{x',y'} u)(x', y') = 0$. □

4.E Le Laplacien en coordonnées polaires

Le fait que le Laplacien possède cette invariance par rotation suggère que son expression en coordonnées polaires doit être relativement simple.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, il existe un unique couple (r, θ) dans $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ tel que

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Notant g la fonction définie sur $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ par

$$g(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

on voit d'abord facilement que

$$\begin{cases} \partial_r g(r,\theta) = \cos\theta \partial_x f(x,y) + \sin\theta \partial_y f(x,y) \\ \partial_\theta g(r,\theta) = -r\sin\theta \partial_x f(x,y) + r\cos\theta \partial_y f(x,y). \end{cases}$$

Ensuite, en formant les combinaisons linéaires adéquates, on obtient

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \cos\theta \partial_r g(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r} \partial_\theta g(r,\theta) \\ \partial_y f(x,y) = \sin\theta \partial_r g(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r} \partial_\theta g(r,\theta). \end{cases} \tag{4.8}$$

On peut alors démontrer le résultat suivant.

Lemme 4.E.1
Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a

$$\Delta u(r\cos\theta, r\sin\theta) = \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta)$$

Preuve :
Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Soit aussi $w(r,\theta) = \partial_x u(x,y)$. On a d'abord, en utilisant (4.8) pour $f(x,y) = \partial_x u(x,y) = w(r,\theta)$,

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = \partial_x(\partial_x u(x,y)) = \cos\theta \partial_r w(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta w(r,\theta).$$

On a ensuite, en utilisant (4.8) pour $f(x,y) = u(x,y) = v(r,\theta)$,

$$\begin{cases} \partial_r w(r,\theta) = \partial_r(\partial_x u(x,y)) = \partial_r(\cos\theta \partial_r v(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)) \\ \partial_\theta w(r,\theta) = \partial_\theta(\partial_x u(x,y)) = \partial_\theta(\cos\theta \partial_r v(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \partial_r w(r,\theta) = \cos\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\sin\theta}{r^2}\partial_\theta v(r,\theta)) - \frac{\sin\theta}{r}\partial^2_{r\theta} v(r,\theta) \\ \partial_\theta w(r,\theta) = \\ \quad -\sin\theta \partial_r v(r,\theta) + \cos\theta \partial^2_{r\theta} v(r,\theta) - \frac{\cos\theta}{r}\partial_\theta v(r,\theta)) - \frac{\sin\theta}{r}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta)). \end{cases}$$

On a donc finalement

$$\partial^2_{xx} u(x,y) = \cos^2\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta).$$

Un calcul identique donne

$$\partial^2_{yy} u(x,y) = \sin^2\theta \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta),$$

et l'on obtient le lemme en ajoutant ces deux dernières égalités. □

On peut par exemple utiliser cette expression pour déterminer toutes les fonctions harmoniques qui sont invariantes par rotation. Il s'agit des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $\Delta u(x,y) = 0$, et pour lesquelles, notant $v(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, on a $\partial_\theta v(r,\theta) = 0$ (v ne dépend pas de θ).

Avec le Lemme 4.E.1, on doit alors avoir

$$0 = \Delta u(x,y) = \partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta).$$

On peut remarquer que cette équation s'écrit

$$0 = \partial_r(r\partial_r v(r,\theta)),$$

et donc que ses solutions sont

$$v(r,\theta) = C_1 \log(r) + C_2. \tag{4.9}$$

Remarque 4.E.2
On notera que l'on a pas précisé dans quel domaine on cherche de telles solutions invariantes par rotation. Ce domaine doit être lui-même invariant par rotation, et ne pas contenir $(0,0)$.

Exercice 4.E.3
Trouver toutes les fonctions u telles que $\Delta u = 1$ dans la couronne $a < r < b$ et qui s'annulent sur $r = a$ et sur $r = b$.

Corrigé :
La réponse est

$$v(r) = \frac{1}{4}(r^2 - a^2) - \frac{1}{4}(b^2 - a^2)\frac{\log r - \log a}{\log b - \log a}.$$

On cherche les solutions invariantes par rotation. Puisque l'on a unicité, si l'on trouve une solution de cette manière, on n'aura rien oublié. On doit résoudre $r = \partial_r(r\partial_r v(r,\theta))$ (attention : pas $1 = \ldots$) , c'est-à-dire $r\partial_r v(r,\theta) = r^2/2 + C_1$, donc $\partial_r v(r,\theta) = r/2 + C_1/r$, d'où $v(r,\theta) = r^2/4 + C_2 + C_1 \log r$...

4.F Solutions particulières : séparation des variables

On cherche des solutions $v(r,\theta)$ de

$$\partial^2_{rr} v(r,\theta) + \frac{1}{r}\partial_r v(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v(r,\theta) = 0 \tag{4.10}$$

qui sont à variables séparées, c'est-à dire qui s'écrivent

$$v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{4.11}$$

pour certaines fonctions R et Θ.

Pour ce type de fonctions v, l'équation (4.10) s'écrit

$$0 = R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta).$$

On cherche maintenant des solutions du type (4.11) pour lesquelles R et Θ ne s'annulent jamais (on verra plus tard qu'il faut ensuite oublier cette condition trop restrictive). En divisant l'équation ci-dessus par $R(r)/r^2$, on obtient

$$\{r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}\} = -\Theta''(\theta)/\Theta(\theta)\,.$$

Puisque le membre de droite ne dépend pas de r, le membre de gauche non plus : la fonction $r \mapsto r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)}$ est constante. Si une telle fonction v est solution, il existe donc un réel λ tel que

(4.12)
$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases}$$

On s'intéresse à la première de ces équations. Puisque l'on veut que u soit régulière, on cherche les fonctions Θ qui sont périodiques de période 2π. Or les solutions de

(4.13)
$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0$$

sont des combinaisons linéaires d'exponentielles pour $\lambda < 0$: de telles fonctions ne sont pas périodiques, donc nécessairement $\lambda \geq 0$, et dans ce cas les solutions de (4.13) sont

$$\Theta(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\theta).$$

Encore une fois la condition $\Theta(0) = \Theta(2\pi)$ ne peut être satisfaite que lorsque $\lambda = n^2$ pour un certain entier naturel n. On obtient finalement une famille de solutions

(4.14)
$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta).$$

On reprend maintenant la deuxième équation de (4.12), sachant que λ doit être un entier naturel :

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0.$$

Cette équation différentielle ordniaire porte le nom d'équation d'Euler, et présente la particularité que ses coefficients possèdent une singularité en $r = 0$. Il faut pour le voir ne pas oublier d'isoler le terme d'ordre le plus élevé, et écrire l'équation sous la forme

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \frac{\lambda}{r^2}R(r) = 0.$$

On peut étudier ce type d'équations de manière systématique : c'est l'objet de la théorie de Fuchs. On peut se contenter ici de chercher des solutions sous la forme $R(r) = r^\alpha$. On obtient alors *l'équation indicielle*

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - \lambda = 0,$$

et donc nécessairement $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$. Dans le cas où $\lambda = n^2 \neq 0$, on obtient deux solutions indépendantes $r \mapsto r^n$ et $r \mapsto r^{-n}$, et la solution générale s'écrit

(4.15)
$$R(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}.$$

Le cas où $\lambda = 0$ a déjà été vu (cf. (4.9)). Les solutions s'écrivent alors

$$R(r) = C_0 \log r + D_0. \tag{4.16}$$

Récapitulons : toutes les fonctions

$$v_n(r,\theta) = (C_n r^n + D_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta))$$

sont solutions de l'équation pour $n \in \mathbb{N}^*$; c'est aussi le cas de

$$v_0(r,\theta) = C_0 \log r + D_0.$$

Revenons au problème initial. Rappelons que l'on cherche des fonctions u de classe $\mathcal{C}^2$ dans tout le disque $\{x^2 + y^2 < \delta\}$, en particulier à l'origine. Parmi les fonctions ci-dessus, on élimine donc toutes celles qui n'ont pas de limite quand $r \to 0$. Il reste les fonctions

$$v_n(r,\theta) = (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) r^n, \tag{4.17}$$

où n est un entier positif ou nul.

4.G Exercices

4.G.1 Extrema

i) Déterminer les points critiques de chacune des applications suivantes et donner leur développement limité à l'ordre 2 en chacun de leurs points critiques. Existe-t-il des extrema locaux ? globaux ?
1. $f(x,y,z) = x^2/2 + xyz - y + z$. 2. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.
Dans le deuxième cas, montrer que f tend vers $+\infty$ lorsque $\sqrt{x^2+y^2} \to +\infty$.

ii) Etudier les points critiques des fonctions suivantes :

a) $f_1(x,y) = x^2 - y^3$ b) $f_2(x,y) = x + y + x^2 - xy + y^2 + 1$
c) $f_3(x,y,z) = xy + yz + xz + xyz$ d) $f_4(x,y,z) = x^2 + z^2 + x^2 y$
e) $f_5(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + \pi \cos x \cos y$

iii) Soit f_1 et f_2 les deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f_1(x,y) = y + 2 - (x+1)^2$ et $f_2(x,y) = y - 2 + (x-1)^2$. On pose $f = f_1 f_2$. Déterminer les points critiques de f, et déterminer pour chacun d'eux s'il s'agit d'un extremum. Tracer les courbes $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$, et étudier dans le complémentaire le signe de f. Placer les points critiques dans le dessin.

iv) Soit $f(x,y) = x^3 + 3x^2 y - 15x - 12y$. Trouver les extrema locaux de f. Lesquels sont des minima, lesquels sont des maxima ?

v) Soit a un réel positif. Quels sont les extrema locaux de $f : (x,y) \mapsto f(x,y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$?

4.G.2 Fonctions harmoniques

i) Déterminer toutes les fonctions harmoniques dans un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Prouver le principe du maximum dans ce cadre.

ii) Soit k un entier positif.

1. Montrer que les fonctions $u(x, y) = (x \pm iy)^k$ sont harmoniques dans $\mathbb{R}^2$.
2. A quelle condition sur a et b la fonction $u(x, y) = (ax + by)^k$ est-elle harmonique ?

4.G.3 Le principe du maximum

i) Soit Ω un disque du plan, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. On suppose que

$$\begin{cases} \Delta f(x) \geq f(x) - 1 & \text{pour tout } \ x \in \Omega \\ \nabla f(x) \cdot x = 0 & \text{pour tout } \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que $f \leq 1$ dans $\bar{\Omega}$. On pourra montrer que le maximum de f sur $\bar{\Omega}$ ne peut être strictement supérieur à 1.

ii) Etudier dans le cas du carré si on a des fonctions harmoniques de la forme $u(x)v(y)$.