Notes du Cours
Analyse et Convergence II
Math203

Thierry Ramond
Mathématiques
Université Paris Sud
e-mail: thierry.ramond@math.u-psud.fr

version du 6 février 2015

Table des matières

Préambule

Chapitre 1

Suites de fonctions

1.1 Quelques rappels sur les suites numériques

1.1.1 Notion de limite

On se rappelle qu'une suite numérique est une liste infinie de nombres, réels ou même complexes. De manière plus précise

Définition 1.1.1 Une **suite numérique** est une fonction de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des nombres réels (ou complexes), définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$. Si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une suite, on note u_n le n-ième élément de la liste, c'est-à-dire le nombre $u(n)$ image de n par u. On note aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou même simplement (u_n), la suite u.

Ces "objets mathématiques" apparaissent lorsque l'on veut modéliser des phénomènes qui évoluent étape par étape, ou souvent lorsque l'on veut étudier étape par étape un phénomène qui évolue continument (c'est parfois plus facile, et parfois aussi suffisant). On peut penser par exemple

- au capital placé à un taux mensuel τ : après n mois, le capital est $u_n = (1+\tau)^n u_0$ (suite géométrique de raison $1+\tau$ et de premier terme u_0.
- au nombre d'individus d'une population de lapins : Fibonacci a imaginé que la population u_n au bout de n mois vérifie la relation de récurrence à deux termes $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$
- ...

L'étude mathématique d'une suite numérique consiste essentiellement à décrire son comportement asymptotique : que devient u_n quand n devient grand ? La notion essentielle est celle de limite d'une suite de nombre

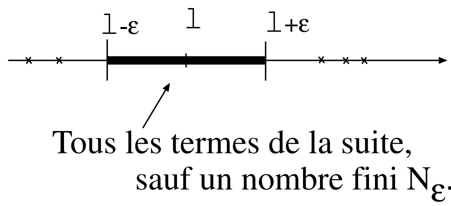


FIGURE 1.1 – Limite d'une suite

Définition 1.1.2 On dit qu'une suite (u_n) de nombres réels a pour limite un réel ℓ donné, ou **tend vers** ℓ, ou encore **converge vers** ℓ lorsque

$$\text{pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que} \quad n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors :

$$\lim(u_n) = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$$

1.1.2 Comment montrer qu'une suite numérique converge ?

On dispose d'un arsenal assez étendu pour démontrer qu'une suite converge. On peut citer pour mémoire

- les théorèmes d'opération avec les limites : si $u_n \to \ell$ et $v_n \to \ell'$, alors $u_n + v_n \to \ell + \ell'$, $u_n v_n \to \ell\ell'$,...
- le théorème des gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si $v_n, w_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$.
- le théorème sur les suites monotones : toute suite croissante et majorée est convergente.
- le critère de Cauchy (on y reviendra plus loin) : la suite (u_n) converge si et seulement si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\epsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

On notera que les deux derniers résultats permettent d'affirmer qu'une suite converge sans qu'il soit nécessaire de disposer de renseignement sur sa limite. Il y a plein d'autres façon de procéder, plus ou moins spécifique à un type de suite particulier. On peut par exemple penser aux suites géométriques, ou encore aux suites adjacentes ...

1.2 Notion de suite de fonctions

Les suites de fonctions sont essentiellement un outil interne aux mathématiques, et sont donc probablement plus difficile à appréhender que les suites de nombres. Par contre c'est un outil indispensable, par exemple pour approcher la fonction f solution d'un problème et en déduire des propriétés de f - parfois même en déduire l'existence d'une telle solution ! Le but de ce cours est de vous les rendre familières.

Définition 1.2.1 Soit $I \subset \mathbb{R}$. Une **suite de fonctions** (f_n) sur I est une liste infinie de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Pour illustrer (une partie de) l'intérêt de ces objets, on va s'intéresser ici à l'équation différentielle $f' = f$. Tout le monde sait que les solutions de cette équation sont les fonctions $f(x) = Ce^x$ où $C \in \mathbb{R}$ (voir $C \in \mathbb{C}$ si l'on s'intéresse aux solutions à valeurs complexes). Pour simplifier la discussion, on va se restreindre au problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1, \end{cases}$$

dont la solution est la fonction $f : x \mapsto e^x$.

Très bien. Maintenant on se pose la question suivante : comment tracer la courbe représentative de f ?

On veut tracer la courbe représentative de f, disons $\mathcal{C}_f$, sur l'intervalle $[0,1]$ par exemple. Voici une méthode attribuée à Euler et qui porte son nom.

- Les seuls renseignements donnés par le problème sont $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. On peut alors penser que $\mathcal{C}_f$ est proche, sur $[0,1]$ de sa tangente au point $A_0 = (0,1)$, c'est à dire de la droite $y = x + 1$. De cette manière on obtient en particulier l'approximation $e = f(1) \sim 2$. Bof.

- On se dit que $\mathcal{C}_f$ est proche de sa tangente en (0,1) mais pas sur tout l'intervalle $[0,1]$. On coupe alors [0,1] en deux sous-intervalles de longueur 1/2. Sur $[0,1/2]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en A_0. On obtient en particulier $f(1/2) \sim 3/2$ et $f'(3/2) \sim 3/2$.

Sur $[1/2,1]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par sa tangente en $A_1 = (1/2, f(1/2))$. Petit problème : on ne connait ni $f(1/2)$ ni $f'(1/2)$. Qu'à cela ne tienne, on les remplace par les valeurs approchées qu'on vient d'obtenir. Sur $[1/2,1]$, on approche $\mathcal{C}_f$ par le segment d'équation $y - 3/2 = 3/2(x - 1/2)$.

Au total, on pense que la courbe $\mathcal{C}_f$ est proche, sur $[0,1]$ de la fonction affine par morceaux f_1 définie par

$$f_1(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{pour } x \in [0,1/2] \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} & \text{pour } x \in [1/2,1] \end{cases}$$

On a en particulier $e = f(1) \sim f_1(1) = 9/4 = 2,25$. Rebof.

- On recommence : on découpe l'intervalle en n morceaux, et on approche $\mathcal{C}_f$ par la courbe représentative $\mathcal{C}_n$ de la fonction affine par morceaux f_n construite de proche en proche.

Il reste une question. Quel sens donner à l'assertion "la courbe $\mathcal{C}_n$ est proche de la courbe $\mathcal{C}_f$" ? Ou encore "la courbe $\mathcal{C}_n$ converge vers la courbe $\mathcal{C}_f$" ?

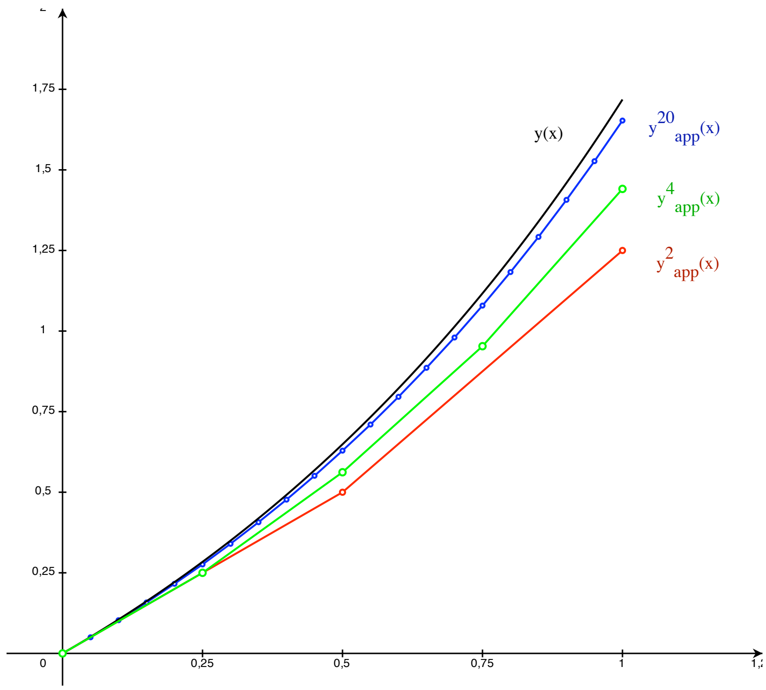


FIGURE 1.2 – Construction de la courbe représentative de l'exponentielle

1.3 Convergence uniforme

La notion naturelle de convergence pour une suite de fonctions (f_n) est celle que l'on a vue pour les courbes représentatives. On veut pouvoir dire que la suite de fonctions (f_n) converge vers f lorsque la courbe représentative de la fonction f_n se rapproche, quand n tend vers l'infini, de celle de f. Comme dans le cas des suites numériques, la notion de convergence pour les suites de fonctions est plus précise que cette assertion un peu vague.

1.3.1 Distance entre courbes

La première chose à faire est de définir une notion de distance entre les courbes représentatives de deux fonctions.

Proposition 1.3.1 Soient f et g deux fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle distance entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur I la quantité

$$d_I(f,g) = \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)|.$$

D'un point de vue pratique, on peut se demander comment calculer cette distance : il s'agit de calculer la borne supérieure de la fonction $|f - g|$ sur I. On verra des exemples un peu plus loin, mais on doit se souvenir du Théorème de Weierstrass :

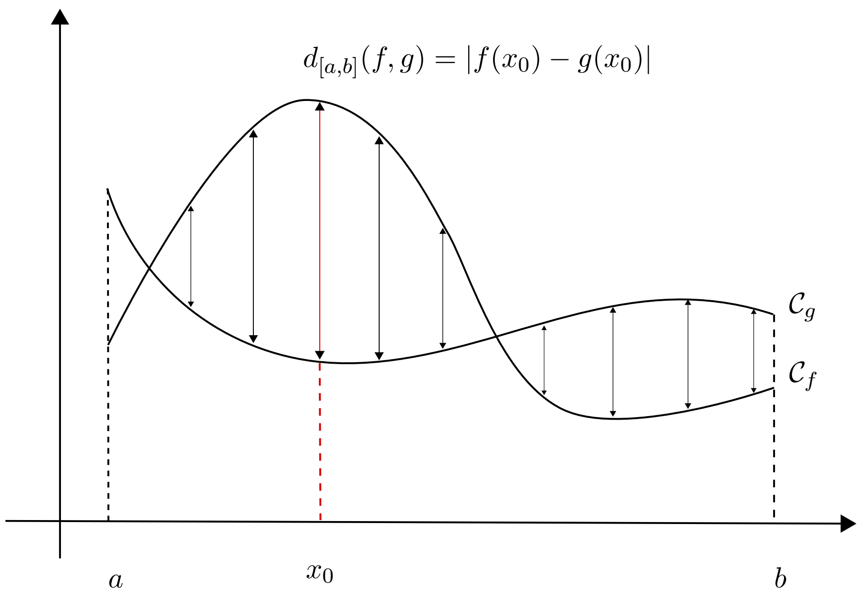


FIGURE 1.3 – Distance entre deux courbes

Proposition 1.3.2 Si $I = [a,b]$ est un intervalle fermé et borné, et si f et g sont continues sur I, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$d_I(f,g) = |f(x_0) - g(x_0)|$$

Autrement dit, dans les conditions de la proposition, cette borne supérieure est un maximum. Ce n'est pas toujours le cas :

— Pour $I = [0,1[$ et $f : x \mapsto x^2$, $d_I(f,0) = \sup_{x\in[0,1[} x^2 = 1 \neq f(x_0)$ pour tout $x_0 \in I$.

— Pour $I =]0,+\infty[$ et $f : x \mapsto 1/x$, $d_I(f,0) = \sup_{x\in]0,+\infty[} 1/x = +\infty$.

Revenons au cadre de la proposition. La quantité $d_I(f,g)$ est alors réellement une distance. Plus précisément

Proposition 1.3.3 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur l'intervalle fermé $I = [a,b]$. Pour $f \in E$ on note

$$\|f\|_\infty = d_I(f,0).$$

L'application de E dans $\mathbb{R}^+$ qui à f associe $\|f\|_\infty$ est une norme.

Preuve.— Tout d'abord, puisque f est continue sur $I = [a,b]$, il existe $x_0 \in I$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Cela prouve en particulier que $\|f\|_\infty$ est bien défini et dans $\mathbb{R}^+$. On vérifie les trois propriétés qui caractérisent une norme :

i) $\|f\|_\infty = 0$ si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$, i.e. f est la fonction nulle.

ii) Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Autrement dit $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $|f(x) + g(x)|$ sur I. Puisque la borne supérieure est le plus petit des majorants, on a

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

ce qui est l'inégalité triangulaire.

iii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in I$, on a $|\lambda f(x)| \leq |\lambda|\ |f(x)| \leq |\lambda|\ \|f\|_\infty$. Donc, en raisonnant comme ci-dessus,

$$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\ \|f\|_\infty.$$

Pour $a = 1/\lambda$ et $g = af$, cette inégalité donne

$$\|f\|_\infty = \|ag\|_\infty \leq |a|\ \|g\|_\infty = \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda f\|_\infty.$$

On a donc bien $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\ \|f\|_\infty$ pour tout $\lambda \neq 0$. Cette égalité est bien sûr également vraie pour $\lambda = 0$.

□

1.3.2 Définition de la convergence uniforme

Définition 1.3.4 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$, et f une autre fonction définie sur I. On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque la suite numérique $(d_I(f_n, f))$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

$$d_I(f_n, f) = \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Pour montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur I, il s'agit de montrer que la suite numérique (u_n) définie par $u_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0. Autrement dit, (f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Puisque

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \Longleftrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

on arrive à la caractérisation suivante :

(f_n) converge uniformément vers f sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Il est peut-être plus facile d'interpréter graphiquement cette propriété sous la forme

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\epsilon \Longrightarrow \forall x \in I, f_n(x) \in [f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon].$$

1.4 Convergence simple

1.4.1 Un exemple : la suite de fonctions $(x^n)_n$

On étudie la suite de fonctions (f_n), où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = x^n$. On veut

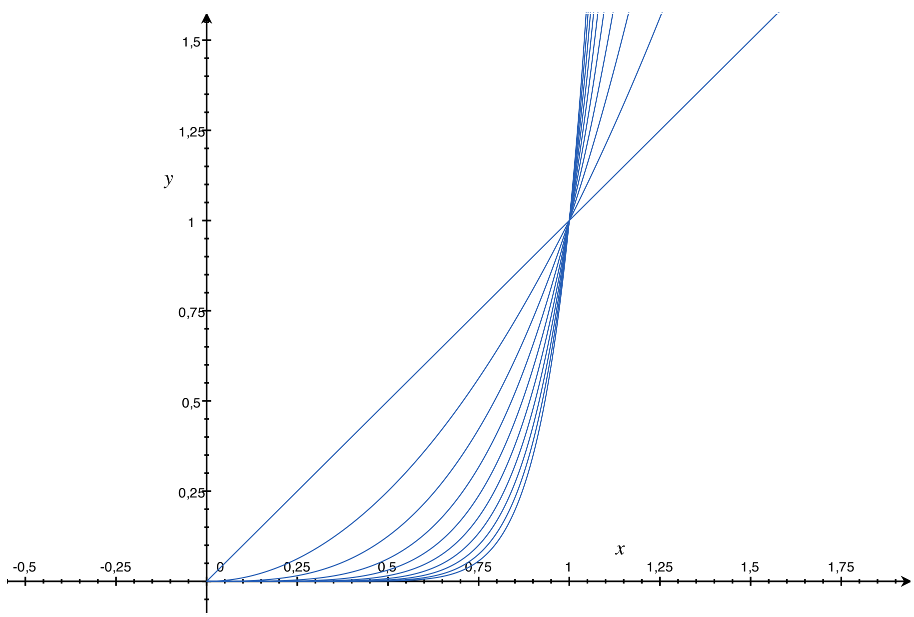


Figure 1.4 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^n$, pour $n \in \{1, \ldots, 10\}$

savoir si la suite (f_n) converge uniformément sur $I = [0,1]$ vers une certaine fonction f. La première chose à faire est de trouver une fonction f qui soit un candidat plausible. Pour cela, on a tracé dans la figure ci-contre les premières courbes représentatives des fonctions de la suite (f_n). Il semble que ces courbes se rapprochent de plus en plus de celle de la fonction nulle.

Il est donc raisonnable d'essayer de montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle $f = 0$. Or

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = f_n(1) = 1,$$

donc (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle : le problème est que $f_n(1)$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$. On peut d'ailleurs remarquer que si (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors

$$\forall x \in I,\ f_n(x) \to f(x).$$

Voilà donc un moyen de repérer une limite uniforme f possible : dans notre exemple ($f_n(x) = x^n$), on a $f_n(x) \to 0$ pour $0 \leq x < 1$ et $f_n(1) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc si (f_n) converge uniformément vers f, la fonction f est nécessairement la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Cependant, pour cette fonction f, et puisque $f_n(1) - f(1) = 0$

$$\|f_n(x) - f(x)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1.$$

La suite (f_n) ne converge donc pas uniformément sur $[0, 1]$.

Exercice 1.4.1 Soit $0 < a < 1$. Montrer que la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_n$ converge uniformément sur $[0, a]$. Y-a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1[$?

1.4.2 Convergence simple

De l'exemple précédent, on retient une définition et une condition nécessaire de convergence uniforme.

Définition 1.4.2 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que la suite (f_n) converge simplement au point x_0 de I lorsque la suite numérique $(f_n(x_0))$ est convergente.

ii) On dit que la suite (f_n) converge simplement sur I lorsqu'elle converge simplement en tout point x_0 de I. Dans ce cas la fonction f définie sur I par

$$f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0)$$

est appelée limite simple de la suite (f_n).

Proposition 1.4.3 Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I.

En particulier, la première étape dans l'étude d'une suite de fonctions est toujours le calcul de son éventuelle limite simple. Celle-ci peut d'ailleurs ne pas exister : penser au cas de la suite de fonctions $(x \mapsto x^n)_n$ sur $]1, +\infty[$. Résumons :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = x^n$. La suite (f_n)
- — diverge sur $]1, +\infty[$.
- — converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
- — ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.
- — converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $0 < a < 1$.

1.5 Exemples

1.5.1 Des triangles glissants

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ les fonctions dont la courbe représentative est indiquée sur la Figure 1.5.

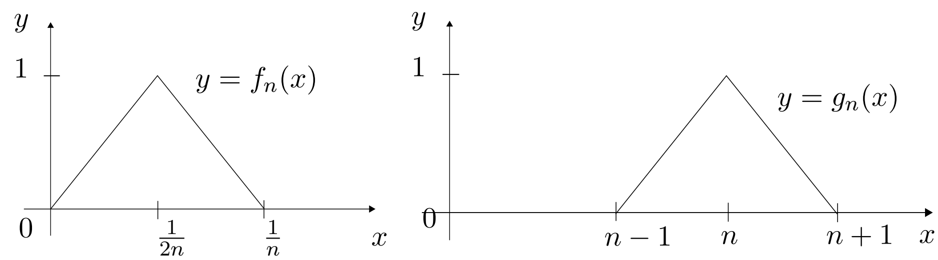


FIGURE 1.5 – Un triangle qui s'écrase sur l'axe des ordonnées, et un qui part à l'infini

- — Convergence simple :
  La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. En effet pour chaque $x > 0$ fixé, $f_n(x) = 0$ pour tout $n > 1/x$, donc $\lim f_n(x)_{n \to +\infty} = 0$, et on a aussi $f_n(0) = 0$ pour tout n, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$.
  La suite de fonctions (g_n) converge simplement elle aussi vers la fonction nulle. En effet pour chaque $x \geq 0$ fixé, $f_n(x) = 0$ pour tout $n > x$, donc $\lim f_n(x)_{n \to +\infty} = 0$.
- — Convergence uniforme : Par contre aucune de ces deux suites ne converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, puisque $\|f_n\|_\infty = \|g_n\|_\infty = 1$ pour tout n.

1.5.2 $f_n(x) = \frac{x}{n+x}$

Pour $n \geq 1$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n + x}$.

- — Convergence simple : pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$ fixé, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

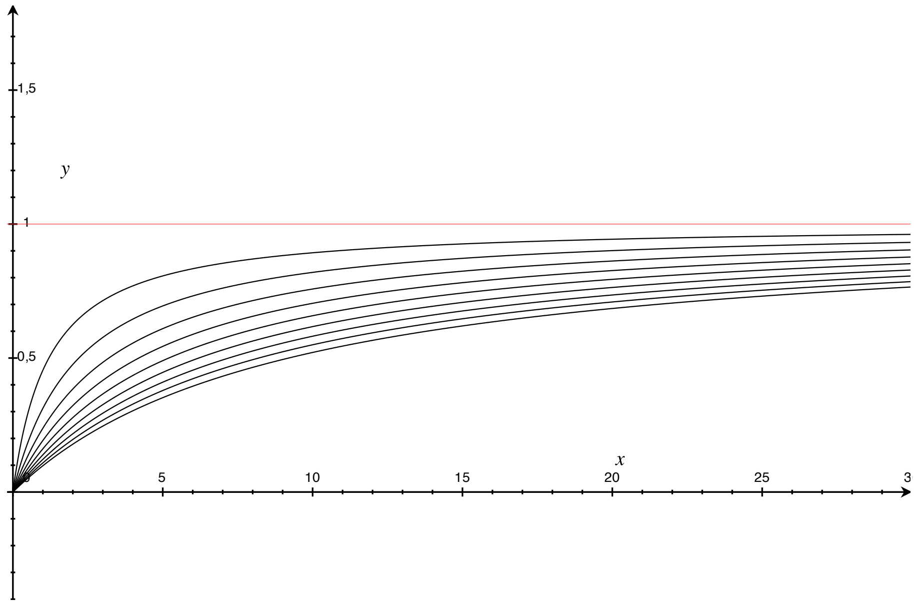


FIGURE 1.6 – Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{x}{x+n}$, pour $n \in \{1, \dots, 10\}$

— Convergence uniforme : supposons que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. Sa limite est alors forcément la fonction nulle. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on pourrait trouver un $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, \frac{x}{n+x} \leq \epsilon$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \geq N_\epsilon, \forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq n.$$

En particulier on aurait

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, x(1-\epsilon) \leq N_\epsilon,$$

ce qui est absurde : prendre $x = 2N_\epsilon/(1-\epsilon)$. Donc (f_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

On remarque au passage que pour chaque x fixé, on a trouvé un $N_\epsilon(x) = x(1-\epsilon)$ tel que

$$n \geq N_\epsilon(x) \to |f_n(x)| \leq \epsilon.$$

Ce n'est pas une surprise, puisque l'on sait que la suite numérique $(f_n(x))$ tend vers 0 pour chaque x. La différence entre la convergence simple et la convergence uniforme réside ici : pour la convergence simple le rang $N_\epsilon(x)$ peut dépendre de x, alors que le rang N_ϵ doit être le même pour tous les x dans le cas de la convergence uniforme.

1.5.3 $f_n(x) = xe^{-nx}$

— Convergence simple : Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$, donc $f_n(0) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) = xe^{-nx} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (l'exponentielle l'emporte). Donc la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

— Convergence uniforme : On veut estimer $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq 0} f_n(x)$. Comme les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, on va dresser leur tableau de variations. On a

$$f_n'(x) = e^{-nx}(1-nx),$$

d'où le tableau donné dans la Figure 1.7. On a donc $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1/ne$, donc

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$					
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	0

Figure 1.7 – Le tableau de variation de la fonction $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$

$\|f_n\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$, et la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

Chapitre 2

Propriétés de la limite

On s'intéresse maintenant à la régularité (continuité, dérivabilité...) de la limite d'une suite de fonctions. L'exemple de la suite (f_n) définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$ montre que même si chacune des fonctions f_n est très régulière (ici de classe $\mathcal{C}^\infty$), la fonction limite peut ne même pas être continue (ici $f(x) = 0$ pour $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$). D'un point de vue un peu formel, on peut d'ailleurs noter que, toujours dans le cas de cette suite

$$0 = \lim_{x\to 1^-} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to 1^-} f_n(x) = 1.$$

On est donc en présence d'un cas où l'on ne peut pas intervertir impunément l'ordre dans lequel on calcule deux limites successives.

Le point essentiel de ce chapitre est que ce genre de difficultés ne se présente pas lorsque la suite (f_n) converge uniformément. On précise ci-dessous ce principe trop vague pour l'instant.

2.1 Continuité

Proposition 2.1.1 Soit $I =]a,b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur I. Si la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f, alors f est continue sur I.

Preuve.— Soit $c \in I$. On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$|x - c| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \epsilon.$$

On fixe donc $\epsilon > 0$. Comme la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

On sait aussi que f_{N_ϵ} est continue au point c. Donc il existe $\alpha_\epsilon > 0$ tel que

$$|x - c| \leq \alpha_\epsilon \Rightarrow |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(c)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Du coup, si $|x-c| \leq \alpha_\epsilon$,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(c)| &\leq |f(x)-f_{N_\epsilon}(x)| + |f_{N_\epsilon}(x)-f_{N_\epsilon}(c)| + |f_{N_\epsilon}(c)-f(c)| \\ &\leq \|f_{N_\epsilon}-f\|_\infty + |f_{N_\epsilon}(x)-f_{N_\epsilon}(c)| + \|f_{N_\epsilon}-f\|_\infty \\ &\leq \frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

On peut donc prendre $\alpha(\epsilon)=\alpha_\epsilon$. Ce raisonnement marche pour tout $\epsilon>0$: on a donc prouvé la continuité de f au point c. □

On notera bien l'importance de la convergence uniforme dans cette preuve. Le point essentiel est que $|f(x)-f_{N_\epsilon}(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ pour tout $x \in I$.

Il faut remarquer aussi que la proposition ci-dessus donne une condition suffisante de continuité pour la limite de la suite (f_n). Par exemple la suite (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle, qui est évidemment continue, bien que la suite (f_n) ne converge pas uniformément : $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{\sin 1}{2} \not\to 0$.

On utilise en général cette proposition pour montrer la continuité d'une fonction, en l'approchant par une suite de fonctions continues qui converge uniformément. On peut aussi s'en servir pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément :

Exemple 2.1.2 Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

i) Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

ii) Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

Pour finir, on notera que la proposition ci-dessus dit que, lorsque ses hypothèses sont satisfaites,

$$\boxed{\lim_{x\to c}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to c} f_n(x).}$$

2.2 Intégrabilité

La limite f d'une suite (f_n) de fonctions intégrables sur $[a,b]$ est-elle intégrable ? Dans ce cas, est-ce que l'on peut utiliser la suite (f_n) pour obtenir une valeur approchée de l'intégrale de f ?

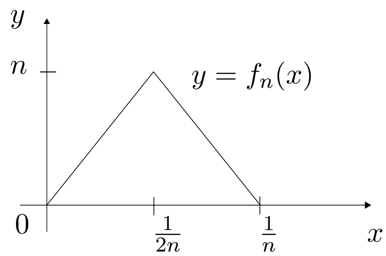


FIGURE 2.1 – Une bosse glissante de surface constante

Modifions un peu notre bosse glissante. Soit (f_n) la suite de fonctions affines par morceaux définie sur $[0,1]$ par la Figure 2.1. La suite (f_n) converge vers 0, mais l'intégrale de f_n sur $[0,1]$ vaut $1/2$ pour tout n. Pour cette suite de fonctions, on n'a donc pas le résultat espéré. Voilà cependant un cas (dont on pouvait se douter…) où la réponse à la question posée est positive.

Proposition 2.2.1 Soit $I = [a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur $[a,b]$. Si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{2.2.1}$$

Preuve.— On laisse de côté la question de l'intégrabilité de la limite. Autre manière de dire, on prouve la proposition seulement dans le cas où les fonctions f_n sont continues sur $[a,b]$, donc intégrables sur $[a,b]$. Puisque (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, on sait que f est aussi continue sur $[a,b]$, donc intégrable sur $[a,b]$.

On a alors

$$|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0$$

quand $n \to +\infty$. □

On a compris que la convergence simple ne suffit pas à assurer le résultat, alors que la convergence uniforme, elle, suffit. Encore une fois, on peut néanmoins avoir la relation (2.2.1) pour des suites (f_n) qui ne convergent pas uniformément. C'est le cas par exemple de la suite (x^n) sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Là encore, on peut utiliser ce critère pour montrer qu'une suite ne converge pas uniformément :

Exercice 2.2.2 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \sin x.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)dx$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

2.3 Dérivabilité

Voici le résultat le plus difficile à appliquer. Sa démonstration est également délicate, et peut certainement être laissée pour une seconde lecture.

Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\cdot$$

Chacune des fonctions f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En effet $x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$, et la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. La suite (f_n) converge simplement vers $f : x \mapsto |x|$. On a même convergence uniforme de la suite (f_n) puisque, quand $n \to +\infty$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

Passons aux dérivées. La fonction f n'est pas dérivable (en 0), et en effet, la suite (f'_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisque la suite (f'_n) est donnée par

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}},$$

et ne converge pas simplement en 0. On retiendra que la convergence uniforme de la suite (f_n) n'est pas une condition suffisante pour la dérivabilité de la limite. C'est la convergence uniforme de la suite des dérivées (f'_n) qui marche :

Proposition 2.3.1 Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions définies sur I. Si

i) les fonctions f_n sont dérivables sur I,

ii) la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f,

iii) et la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction ϕ,

alors f est dérivable sur I, et $f' = \phi$.

Encore une fois, ce résultat peut être vu comme un théorème d'interversion de limite. Sous les conditions de la proposition, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f_n(x),$$

et il faut se souvenir que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ par exemple.

Preuve.— Soit $c \in I$. On veut montrer que f est dérivable au point c, de dérivée $\phi(c)$. Autrement dit, on veut montrer que

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \phi(c).$$

Soit alors g_n la fonction définie par

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(c)}{x-c} \text{ pour } \ x \neq c, \\ f_n'(c) \text{ pour } \ x = c. \end{cases}$$

La fonction g_n est continue sur I et la suite (g_n) converge simplement sur I vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{ pour } \ x \neq c, \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(c) = \phi(c) \text{ pour } \ x = c. \end{cases}$$

Il s'agit donc de montrer que la fonction g est continue au point c. Pour cela, il suffit de montrer que (g_n) converge uniformément vers g sur I. On va utiliser le critère de Cauchy uniforme :

Lemme 2.3.2 Pour qu'une suite (f_n) converge uniformément sur I, il faut et il suffit que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

On admet ce lemme, et on l'applique pour terminer la preuve de la proposition. Soit $\epsilon > 0$. Puisque la suite (f_n') converge uniformément sur I, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|f_p' - f_q'\|_\infty \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_p - f_q$, on a, pour $p, q \geq N_\epsilon$,

$$\forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(c) - f_q(c))| \leq \|f_p' - f_q'\|_\infty |x-c| \leq \epsilon |x-c|$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par $|x-c|$, et après réorganisation du membre de gauche, on obtient

$$\forall x \in I \setminus \{c\}, |g_p(x) - g_q(x)| \leq \epsilon.$$

Comme les fonctions g_n sont continues, cette inégalité reste vraie pour $x = c$. Autrement dit

$$p, q \geq N_\epsilon \Rightarrow \|g_p - g_q\|_\infty \leq \epsilon.$$

Donc la suite (g_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge uniformément. □

Chapitre 3

Séries de Fonctions

3.1 Quelques rappels sur les séries numériques

Les séries numériques doivent être vues comme des suites numériques particulières : si (u_n) est une suite numérique, la série de terme général u_n est la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

On dit que la série converge lorsque la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite est appelée somme de la série, et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

On écrit aussi - de manière un peu abusive, mais c'est parfois pratique - que la quantité $\sum u_n$ est la série de terme général u_n, et que le nombre S_n est la n-ième somme partielle de la série.

Puisqu'il s'agit de suites particulières, les techniques vues pour étudier la convergence des suites s'appliquent à l'étude de la convergence des séries. Il existe bien sûr des techniques spécifiques, et l'on peut résumer l'étude d'une série numérique par l'algorithme de la Figure 3.1.

On peut aussi être amené à utiliser le critère de Cauchy pour la suite (S_n). Du fait de la nature particulière de cette suite, il prend la forme suivante : la série $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} |u_n| \leq \epsilon.$$

3.2 Notion de série de fonction

Les séries de fonctions sont aussi un outil interne aux mathématiques. Comme pour les séries numériques, on doit garder à l'esprit qu'il s'agit d'un type particulier de suite de fonctions.

0. si $u_n \not\to 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

1. essayer de rechercher une formule explicite pour les sommes partielles S_n, et d'étudier la suite (S_n).

2. si $u_n \geq 0$ pour tout n, essayer d'utiliser l'un des critères suivant :
- comparaison avec une autre série.
- D'Alembert.
- Cauchy.
- Riemann.
- ...

2 bis. si $u_n \leq 0$ pour tout n, étudier la série de terme général $-u_n$.

3. si u_n n'est pas de signe constant, essayer
- d'étudier la série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$. Si elle converge, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.
- d'utiliser le "critère spécial" pour les séries alternées,
- ...

FIGURE 3.1 – Etude d'une série numérique

Reprenons par exemple notre équation différentielle préférée, ou plutôt le problème de Cauchy

$$\begin{cases} f' = f, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

Avec la méthode d'Euler, il est probablement assez pénible de trouver l'expression explicite de $f_n(x)$ pour un x donné, autrement dit de donner une valeur approchée de $f(x)$. Voici une autre façon de faire (c'est la méthode de Picard). Une fonction $f \in \mathcal{C}^1$ est solution du problème de Cauchy ci-dessus si et seulement si

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0) = 1 + \int_0^x f(t)dt.$$

On n'a rien gagné semble-t-il : la fonction inconnue f se trouve des deux côté de l'égalité. L'idée supplémentaire est de définir une suite de fonctions (S_n) par récurrence, en posant $S_0 : x \mapsto 1$ et

$$S_{n+1} : x \mapsto 1 + \int_0^x S_{n-1}(t)dt.$$

Si la suite (S_n) converge uniformément vers une fonction S, on doit avoir, pour chaque x

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty}(1+\int_0^x S_{n-1}(t)dt) = 1+\int_0^x \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}(t)dt = 1+\int_0^x S(t)dt.$$

Autrement dit si la suite (S_n) converge, la limite de la suite (S_n) est la solution du problème : $S(x) = e^x$.

On peut calculer les fonctions S_n de proche en proche :

$$\begin{aligned}
S_1(x) &= 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x,\\
S_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2},\\
&\vdots\\
S_n(x) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, la fonction $x \mapsto e^x$ apparait comme la somme de la série de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$.

Définition 3.2.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. La série de fonctions de terme général f_n est la suite de fonction (S_n), où les S_n sont définies sur I par

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} f_p(x).$$

On dit aussi que la fonction S_n est la n-ième somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.

3.3 Notions de convergence

Les deux notions de convergence vues pour les suites de fonctions sont bien sûr valables pour les séries de fonctions.

Définition 3.3.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement/uniformément sur I lorsque la suite (S_n) des sommes partielles converge simplement/uniformément.

Le cas échéant, la fonction limite S de la suite (S_n) est appelée somme de la série, et on note, pour $x \in I$,

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On étudie par exemple la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ sur $I = \mathbb{R}$.

— On commence par la convergence simple. Soit $x \in I$. On doit étudier la série numérique de terme général $u_n = \frac{x^n}{n!}$, et on suit l'algorithme de la Figure 3.1. On peut par exemple appliquer le critère de D'Alembert pour la série de terme général $|u_n|$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Puisque cette limite est strictement inférieure à 1, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

— Passons à la convergence uniforme. Il s'agit d'étudier la suite de nombres

$$\|S - S_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sum_{p\geq n+1} \frac{x^n}{n!}|,$$

ce qui ne semble pas très facile ! On dispose heureusement d'un critère souvent commode.

3.4 Convergence normale

Définition 3.4.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I lorsqu'il existe une suite (a_n) de nombres réels positifs tels que

i) Pour tout $n \in N$, $\|f_n\|_\infty \leq a_n$,

ii) la série numérique $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

Proposition 3.4.2 Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

Preuve.— On va montrer que la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme (cf. le Lemme 2.3.2). Soit (a_n) une suite de réels qui possède les propriétés (i) et (ii) de la Définition 3.4.1. Soit $\epsilon > 0$. Puisque la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, c'est une série de Cauchy : il existe $N_\epsilon > 0$ tel que

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=p+1}^{q} a_n = |\sum_{n=0}^{q} a_n - \sum_{n=0}^{p} a_n| \leq \epsilon.$$

Or pour tout $x \in I$,

$$|S_q(x) - S_p(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p+1}^{q} a_n,$$

Donc

$$q \geq p \geq N_\epsilon \Rightarrow \|S_q - S_p\|_\infty \leq \epsilon.$$

□

Exercice 3.4.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = x^n e^{-nx}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$. On pourra montrer que $f_n(x) \leq e^{-n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Revenons à l'exemple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$. Il est clair qu'on ne peut pas trouver de suite (a_n) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq a_n,$$

puisque $\frac{x^n}{n!} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc la série ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$. Cependant pour $x \in [-A, A]$, avec $A > 0$ fixé, on a

$$|\frac{x^n}{n!}| \leq \frac{A^n}{n!}\cdot$$

Or $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ converge, comme on l'a vu en prouvant la convergence simple de la série. Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur $[-A, A]$, et ce pour tout $A > 0$. Ainsi cette série de fonctions converge uniformément sur tout compact (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$. En résumé :

Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\cdot$ La série de fonctions de terme général f_n

- converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
- converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Il reste une question : la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$? La réponse est négative : si c'était le cas, la suite des restes $R_n(x) = \sum_{p\geq n+1} f_p(x)$ convergerait uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Mais alors, puisque

$$\|f_{n+1}\|_\infty = \|R_n - R_{n-1}\|_\infty \leq \|R_n\|_\infty + \|R_{n-1}\|_\infty,$$

chacune des fonctions f_n serait bornée sur $\mathbb{R}$. Ce n'est évidemment pas le cas.

3.5 Propriétés de la somme

Il s'agit juste de transposer les énoncés vus pour les suites de fonctions au cas particulier des séries de fonctions.

Proposition 3.5.1 Soit (f_n) une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle I. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors la fonction somme S est continue sur I.

Preuve.— Cela découle directement de l'application de la Proposition 2.1.1 à la suite de fonctions (S_n) des sommes partielles, puisque la continuité des f_n entraine celle des sommes (finies !) $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$. □

Quand on applique cette proposition, il faut garder à l'esprit que la continuité est une notion locale : on parle de continuité sur l'intervalle I pour dire que la fonction est continue en chaque point de I. Autrement dit, si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur chaque compact de I, la fonction somme sera continue en chaque $x_0 \in I$. En effet, on peut appliquer la proposition sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ pourvu que $\alpha > 0$ soit suffisamment petit pour que ce compact soit inclus dans I. Autrement dit

Pour que la fonction somme d'une série de fonctions soit continue sur un intervalle I, il suffit que la série converge uniformément sur tout compact de I.

En particulier, on peut affirmer que la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$, bien que l'on ne sache pas si elle converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.5.2 Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables sur l'intervalle $I = [a, b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers sa somme S, alors

- — la série numérique de terme général $\int_a^b f_n(x)dx$ converge,
- — la fonction S est intégrable sur I, et

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} f_n(x)dx = \sum_{n\geq 0} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Preuve.— Il suffit là encore de remarquer que les sommes partielles $S_n = \sum_{p=0}^{n} f_p$ sont intégrables sur $[a, b]$ lorsque les f_n le sont, et d'appliquer la Proposition 2.2.1. □

Proposition 3.5.3 Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si

i) la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers sa somme S,

ii) la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge uniformément sur I vers une fonction σ,

alors la fonction S est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$, $S'(x) = \sigma(x)$.

Autrement dit, lorsque les conditions de la propositions sont satisfaites,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\sum_{n\geq 0} f_n(x) = S'(x) = \sigma(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f_n(x).$$

La dérivabilité aussi est une notion locale. On pourra se convaincre facilement que

Si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers sa somme S, il suffit que la série des dérivées converge uniformément sur tout compact de I pour que S soit dérivable et que $S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 3.5.4 Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $I =]-1,1[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot$.

— La série de terme général f_n converge simplement sur I. En effet, pour $x \in]-1,1[$ fixé, quand $n \to +\infty[$,

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = |x|\frac{n}{n+1} \to |x| < 1.$$

— Pour tout $A < 1$, la série de terme général $f_n'(x) = x^n$ converge normalement sur $[-A, A]$. En effet , pour $x \in [-A, A]$, $|f_n'(x)| \leq A^n$ et la série $\sum_{n\geq 0} A^n$ converge vers $\frac{1}{1-A}\cdot$.
Donc la fonction somme S vérifie

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}\cdot$$

On obtient en particulier, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} = S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^1 S'(x)dx = -\ln(1-x).$$

3.6 A propos des séries entières

Le lecteur averti aura remarqué que la plupart des exemples de séries de fonctions qu'on a étudiés jusque là sont d'un type particulier.

Définition 3.6.1 On dit que la série de fonction de terme général f_n est une série entière lorsque pour tout $n \geq 0$, $f_n(x) = a_n x^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.

La convergence de ce genre de séries de fonctions est pour l'essentiel élucidé par la

Proposition 3.6.2 Il existe $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, unique, tel que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge simplement sur $]-R, R[$ et diverge sur $[-R, R]^c$. De plus, lorsque $R > 0$, la série converge normalement sur tout compact de $]-R, R[$.

Ce "nombre" R porte le nom de rayon de convergence de la série entière. Le résultat suivant est très important.

Proposition 3.6.3 Le rayon de convergence d'une série entière est égal au rayon de convergence de sa série des dérivées.

En particulier, par récurrence, en appliquant le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, on obtient que la fonction somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$, et que sa dérivée d'ordre k est la somme des dérivées d'ordre k de son terme général.

Pour calculer le rayon de convergence d'une série entière, on peut utiliser les critères vus pour les séries numériques. En particulier, le critère de D'Alembert donne, quand la limite existe,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\cdot$$

3.7 Un exemple

Exercice 3.7.1 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{n^x}\cdot$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f à déterminer.

2. Calculer $f_n'(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

3. Soit $x > 0$ fixé. Déterminer la limite de $n^2 f_n(x)$ quand $n \to +\infty$. En déduire que la série de terme général f_n converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

4. Donner $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)|$. Montrer que la série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$.

5. Montrer que la fonction $S(x) = \sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Corrigé

1. On note tout d'abord que $f_n(x) = xe^{-x(n+\ln n)}$. On a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. On calcule $f_n'(x) = e^{-x(n+\ln n)}(1 - (n + \ln n)x)$. La fonction f_n est donc croissante sur $[0, 1/(n + \ln n)]$ et décroissante sur $[1/(n + \ln n), +\infty]$. La fonction f_n admet un maximum en $x_n = 1/(n + \ln n)$, et la valeur de ce maximum est $d_n = f_n(x_n) = \dfrac{1}{e(n + \ln n)}\cdot$ Puisque $d_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction nulle.

3. Soit $x > 0$ fixé. On a $n^2 f_n(x) = n^2 xe^{-x(n+\ln n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$ par croissance comparée. Donc la suite $(n^2 f_n(x))$ est bornée : il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{C}{n^2}\cdot$$

Puisque la série numérique de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $f_n(x)$ converge aussi. Pour $x = 0$ on a $f_n(x) = 0$. Au total, la série de terme général $f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

4. On a calculé à la question 2 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = d_n = \dfrac{1}{e(n + \ln n)}$. Supposons que la suite (a_n) vérifie $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| \leq a_n$. On aurait nécessairement

$$a_n \geq d_n \geq \frac{1}{2en},$$

donc la série de terme général a_n serait divergente. La série de terme général f_n ne peut pas être normalement convergente.

5. On va montrer que la série de terme général f_n est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, ce qui donnera le résultat. Soit donc $a > 0$. Puisque $x_n = 1/(n + \ln n)$ tend vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $x_n < a$. La fonction f_n étant alors décroissante sur $[a, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = f_n(a) = ae^{-a(n+\ln n)} \leq ae^{-an}.$$

Or la série de terme général ae^{-an} est convergente, ce qui prouve la convergence normale de la série de terme général f_n sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Chapitre 4

Fonctions définies par des intégrales à paramètre

4.1 Intégrales simples

On s'intéresse ici aux fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par une expression du type

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

où $[a,b]$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Notre objectif est d'établir des conditions suffisantes sur la fonction deux variables $(x,t) \mapsto f(x,t)$ pour que la fonction F soit bien définie, continue, dérivable ou même encore plus régulière. D'un point de vue formel, on peut penser qu'on a remplacé la somme sur les entiers n des séries de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ par une "somme" sur tous les $t \in [a,b]$.

4.1.1 Notion de continuité uniforme

Dans les démonstrations qui vont suivre, le premier rôle est joué par la notion de continuité uniforme. On rappelle d'abord qu'une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ lorsqu'elle est continue en chaque point x de I c'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon, x) > 0 \text{ tel que } |y - x| \leq \alpha(\epsilon, x) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Comme le laisse entrevoir la notation utilisée, le nombre $\alpha = \alpha(\epsilon, x)$ dépend de ϵ et de x. Lorsqu'on peut choisir un $\alpha = \alpha(\epsilon)$ qui convient pour tous les x de I, on dit que la fonction ϕ est uniformément continue sur I.

Définition 4.1.1 Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. On dit que ϕ est uniformément continue sur I lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in I,\ |y - x| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\phi(y) - \phi(x)| \leq \epsilon.$$

Bien sûr, si une fonction est uniformément continue sur I, elle est continue sur I. La réciproque est fausse : voici un exemple de fonction continue qui n'est pas uniformément continue : soit $f : x \mapsto x^2$. Supposons que f soit uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Pour $\epsilon = 1$ en particulier, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, |x - y| \leq \alpha \Longrightarrow |x^2 - y^2| \leq 1.$$

Soit alors $y \in \mathbb{R}^+$ quelconque et $x = y + \alpha$. On a bien $|x - y| \leq \alpha$, mais

$$|x^2 - y^2| = (x + y)|x - y| = \alpha(2y + \alpha),$$

et il est absurde de dire que $\alpha(2y + \alpha) \leq 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}^+$.

Ces définitions s'étendent au cas des fonctions de plusieurs variables. Par exemple si $f : I \times J \to \mathbb{R}$ est une fonction des variables $(t, x) \in I \times J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on dit que f est

— continue sur $I \times J$ lorsque

$$\forall (t, x) \in I \times J,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha(\epsilon, t, x) > 0 \text{ tel que } \|(s, y) - (t, x)\| \leq \alpha(\epsilon, t, x) \Rightarrow |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

— uniformément continue sur $I \times J$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall (t, x) \in I \times J,\ \|(s, y) - (t, x)\| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(s, y) - f(t, x)| \leq \epsilon.$$

Dans l'exemple de la fonction $f : x \to x^2$, il est essentiel que l'on se soit posé la question de la continuité uniforme sur une partie non-bornée de $\mathbb{R}$. On a en effet le résultat suivant

Proposition 4.1.2 Soit $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur tout fermé borné $[a, b] \times [c, d] \subset I \times J$.

Preuve.— On l'admet. □

4.1.2 Continuité

Grâce à cette continuité uniforme automatique, on a facilement la

Proposition 4.1.3 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : (x, t) \in I \times [a, b] \to f(x, t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt,$$

est continue sur I.

Preuve.— Tout d'abord la fonction F est bien définie sur I puisque, pour chaque $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue, donc intégrable sur $[a,b]$. Soit alors $x_0 \in I$. On veut montrer que F est continue en x_0.

- On suppose tout d'abord que $I = [c,d]$ est fermé et borné. Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est continue sur $I \times [a,b]$, elle y est uniformément continue, donc il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall (x,t) \in I \times [a,b],\ |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |f(x,t) - f(x_0,t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Ainsi, pour $x \in I$ tel que $|x - x_0| \leq \alpha(\epsilon)$, on a

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_a^b |f(x,t) - f(x_0,t)|dt \leq \epsilon,$$

ce qui montre que F est continue au point x_0.

- Si I n'est pas fermé borné, il existe $[c,d] \subset I$ tel que $x_0 \in [c,d]$, et ce qui précède montre que F est continue en x_0. □

Exemple 4.1.4 Soit $F(x) = \int_0^1 \sin(tx)dt$. Puisque $(x,t) \mapsto \sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, la fonction F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs on peut calculer directement

$$F(x) = \left[-\frac{\cos(tx)}{x} \right]_0^1 = \frac{1 - \cos x}{x},$$

ce qui permet de retrouver que cette fonction est continue en $x = 0$.

4.1.3 Dérivation

On donne maintenant une condition suffisante pour que la fonction

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

soit dérivable sur I. Bien entendu, on espère que, en supposant que la fonction f soit dérivable par rapport à la variable x, la dérivée de F soit donnée par l'intégrale de la dérivée de f par rapport à x, autrement dit que l'on puisse échanger dérivation et intégrale.

Proposition 4.1.5 Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et $f : I \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si la fonction f admet une dérivée partielle $\partial_x f$ continue sur $I \times [a,b]$, alors la fonction F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_a^b \partial_x f(x,t)dt.$$

Preuve.— Soit $x_0 \in I$. On veut montrer que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \int_a^b \partial_x f(x,t)dt.$$

Or

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \partial_x f(x,t)dt &= \int_a^b f(x,t) - f(x_0,t) - (x - x_0)\partial_x f(x,t)dt \\ &= \int_a^b g(x,t) - g(x_0,t)dt, \end{aligned}$$

où $g(x,t) = f(x,t) - (x - x_0)\partial_x f(x_0,t)$. On remarque que

$$\partial_x g(x,t) = \partial_x f(x,t) - \partial_x f(x_0,t).$$

Soit $[c,d] \subset I$ un intervalle compact contenant x_0. Comme $\partial_x f$ est continue par rapport à (x,t), $\partial_x f$ est uniformément continue par rapport à (x,t) dans $[c,d] \times [a,b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha(\epsilon) > 0$ tel que

$$\forall t \in [a,b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |\partial_x g(x,t)| = |\partial_x f(x,t) - \partial_x f(x_0,t)| \leq \epsilon$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a alors

$$\forall t \in [a,b], \forall x \in I, |x - x_0| \leq \alpha(\epsilon) \Rightarrow |g(x,t) - g(x_0,t)| \leq \epsilon |x - x_0|.$$

Finalement on obtient

$$|F(x) - F(x_0) - (x - x_0) \int_a^b \partial_x f(x,t)dt| \leq \epsilon(b - a)|x - x_0|,$$

ce qui entraine la proposition en faisant tendre $x \to x_0$. □

Exemple 4.1.6 Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = \int_0^1 t\cos(tx)dt.$$

La fonction $g : (x,t) \mapsto t\cos(tx)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, donc G est continue sur $\mathbb{R}$. On peut remarquer que

$$\partial_x(\sin(tx)) = g(t,x),$$

donc, notant $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)dt$, on a

$$G(x) = \int_0^1 t\cos(tx)dt = F'(x) = \frac{x\sin x + \cos x - 1}{x^2}.$$

4.2 Intégrales généralisées

On considère maintenant des fonctions définies par des intégrales généralisées, de la forme

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt,$$

même si les résultats de ce paragraphe s'appliquent en fait mutatis mutandis à toutes les sortes d'intégrales généralisées. Dans ce cas, le théorème précédent, concernant la continuité de F, ne s'applique plus (l'intervalle d'intégration n'est pas compact). Pour montrer la continuité de F en x_0, on est amené à estimer

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t)dt$$

On peut penser à découper cette intégrale en deux parties

$$F(x) - F(x_0) = \int_0^{A} f(x,t) - f(x_0,t)dt + \int_A^{+\infty} f(x,t) - f(x_0,t)dt,$$

et on saura traiter la première à l'aide de la Proposition 4.1.3, en supposant que f est continue par rapport à (x,t). Pour traiter la seconde, on a besoin d'une notion supplémentaire.

4.2.1 Convergence uniforme

Définition 4.2.1 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit aussi f une fonction continue sur $I \times [0,+\infty[$ telle que, pour chaque $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge. On dit que cette intégrale est uniformément convergente sur I lorsque,

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0 \text{ tel que } A \geq A_\epsilon \Rightarrow |\int_A^{+\infty} f(x,t)dt| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

En fait cette définition est à rapprocher de ce que l'on a vu pour les séries de fonctions : la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément lorsque la suite de ses restes $R_p = \sum_{n\geq p} f_n$ converge uniformément vers 0. Le lien entre ces deux notions est encore plus fort :

Proposition 4.2.2 Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ une intégrale uniformément convergente sur l'intervalle I. Si (u_n) est une suite de $[0,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$, alors la suite (F_n) de fonctions définies sur I par

$$F_n : x \mapsto \int_0^{u_n} f(x,t)dt$$

converge uniformément sur I vers F.

Preuve.— Soit $\epsilon > 0$. Il existe $A_\epsilon > 0$ tel que

$$A \geq A_\epsilon \Rightarrow |\int_A^{+\infty} f(x,t)dt| \leq \epsilon \text{ pour tout } x \in I.$$

Puisque $u_n \to +\infty$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_\epsilon \Rightarrow u_n \geq A_\epsilon$. Du coup, pour $n \geq N_\epsilon$, on a

$$\forall x \in I,\ |F(x) - F_n(x)| \leq |\int_{u_n}^{+\infty} f(x,t)dt| \leq \epsilon,$$

ce qui montre que $\|F - F_n\|_{I,\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

4.2.2 Continuité, Dérivation

Si les fonctions F_n définies ci-dessus sont continues sur I, et si l'intégrale $F(x)$ est uniformément convergente sur I, le théorème de continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues montre que F est continue sur I. On a donc obtenu la

Proposition 4.2.3 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

soit uniformément convergente sur I. Alors la fonction F est continue sur I.

On a aussi un résultat de ce genre pour la dérivation :

Proposition 4.2.4 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

i) f admet une dérivée partielle $\partial_x f(x,t)$ continue sur $I \times [0, +\infty[$,

ii) Pour tout $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est convergente,

iii) L'intégrale

$$\phi(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$$

est uniformément convergente sur I,

alors F est dérivable sur I, et $F'(x) = \phi(x)$, c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$$

Il faut faire le parallèle entre ce résultat et la proposition 3.5.3 concernant la dérivabilité d'un série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$: formellement, le point (i) correspond à la dérivabilité des fonctions f_n, le point (ii) à la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$, et le point (iii) à la convergence uniforme de la série des dérivées $\sum_{n\geq 0} f_n'$.

4.2.3 Convergence normale

Il est la plupart du temps difficile d'établir directement la convergence uniforme d'une intégrale généralisée à paramètre. Comme pour les séries de fonctions, on va introduire une notion de convergence plus facile à vérifier, et qui entraine la convergence uniforme.

Définition 4.2.5 Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge normalement sur I lorsqu'il existe une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

ii) Pour tout $(x,t) \in I \times [0, +\infty[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

Là encore, le parallèle avec la notion de convergence normale des séries de fonctions est flagrant : la fonction g joue ici le rôle que jouait la suite (a_n) dans la définition 3.4.1. On se réfère souvent aux conditions (i) et (ii) en disant que la fonction $f(x,t)$ est dominée par une fonction intégrable g indépendante de x.

En passant par un critère de Cauchy uniforme pour les intégrales généralisées, tout à fait similaire à celui vu pour les séries de fonctions, on peut démontrer que

Proposition 4.2.6 Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

On obtient alors des critères de continuité et de dérivabilité pour les intégrales généralisées à paramètres qui sont ceux qu'il faut retenir

Proposition 4.2.7 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. S'il existe $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

ii) Pour tout $(x,t) \in I \times [0, +\infty[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

alors la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$$

est continue sur I.

Proposition 4.2.8 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $f : I \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si

i) f admet une dérivée partielle $\partial_x f(x,t)$ continue sur $I \times [0, +\infty[$,

ii) Pour tout $x \in I$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est convergente,

iii) Il existe $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ telle que

(a) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ converge.

(b) Pour tout $(x,t) \in I \times [0, +\infty[$, $|f(x,t)| \leq g(t)$.

alors F est dérivable sur I et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \partial_x f(x,t)dt$$

4.3 Un exemple

Soit $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,t) = \frac{\cos(tx)}{t^2+1}.$$

1. Montrer que la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}du.$$

3. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(*indication :* poser $\phi(x,u) = \dfrac{x\cos(u)}{u^2+x^2}$, et majorer $|\phi(x,u)|$, $|\partial_x\phi(x,u)|$, et $\left|\partial_x^2\phi(x,u)\right|$ sur des intervalles $[a,b] \subset]0, +\infty[$)

4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F''(x) = F(x)$.

5. En déduire une expression simple de $F(x)$, pour tout réel x.

Corrigé

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos(tx)}{t^2+1}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt < +\infty,$$

donc l'intégrale généralisée $F(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. On voit aussi que F est une fonction bornée. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, on a la domination

$$|f(x,t)| \leq g(t) := \frac{1}{1+t^2},$$

avec $\int_0^{+\infty} g(t)dt < +\infty$. Donc la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On change de variable en posant $u = tx$. On remarque au passage que F est paire, ce qui justifie de restreindre l'étude à $x > 0$.

3. Posons $\phi(x,u) = \dfrac{x\cos(u)}{u^2+x^2}$. Soient $0 < a < b$ quelconques. Pour tout $(x,u) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, on majore

$$|\phi(x,u)| \leq \frac{b}{a^2+u^2} := g_0(u),$$

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| = \left|\frac{\cos(u)}{u^2+x^2} - 2\,\frac{x^2\cos(u)}{(u^2+x^2)^2}\right| = \left|-\frac{\cos(u)\left(-u^2+x^2\right)}{(u^2+x^2)^2}\right| \leq \frac{b^2+u^2}{(a^2+u^2)^2} := g_1(u),$$

et

$$\left|\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right| = \left|-6\,\frac{\cos(u)\,x}{(u^2+x^2)^2} + 8\,\frac{x^3\cos(u)}{(u^2+x^2)^3}\right| = \left|2\,\frac{\cos(u)\,x\left(-3\,u^2+x^2\right)}{(u^2+x^2)^3}\right| \leq \frac{2b(b^2+3u^2)}{(a^2+u^2)^3} := g_2(u).$$

Comme g_0, g_1 et g_2 sont intégrables sur $[0,+\infty[$, on conclut successivement que F est continue, dérivable, $\mathcal{C}^1$, puis deux fois dérivable et enfin $\mathcal{C}^2$ sur tout intervalle $]a,b[\subset]0,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. Par parité, elle est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty,0[$.

4. On intègre par parties deux fois : pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(u)}{u^2+x^2}du &= \Big[\frac{x\sin u}{x^2+u^2}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2+u^2)^2}du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2xu}{(x^2+u^2)^2}du \\
&= \Big[-\frac{2xu}{(x^2+u^2)^2}\cos u\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x(x^2-3u^2)}{(x^2+u^2)^3}\cos u\,du \\
&= F''(x).
\end{aligned}$$

5. Puisque F satisfait sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $y''-y=0$, on a $F(x) = Ae^x + Be^{-x}$ pour tout $x > 0$. On sait que $F(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc nécessairement $A = 0$. On sait aussi que F est continue en 0 et paire, et que

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan(t)]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

On a donc, finalement, $F(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

Chapitre 5

Séries de Fourier

5.1 Introduction : cordes vibrantes

Même si elles portent le nom de Joseph Fourier, qui a développé leur théorie autour des années 1820 pour l'étude de la propagation de la chaleur, les séries de Fourier doivent beaucoup à l'étude des cordes vibrantes, due à D'Alembert, Euler et Bernoulli au milieu du XVIIIème siècle. On va s'appuyer sur leur description des cordes vibrantes pour présenter la théorie des séries de Fourier.

5.1.1 Mise en équation

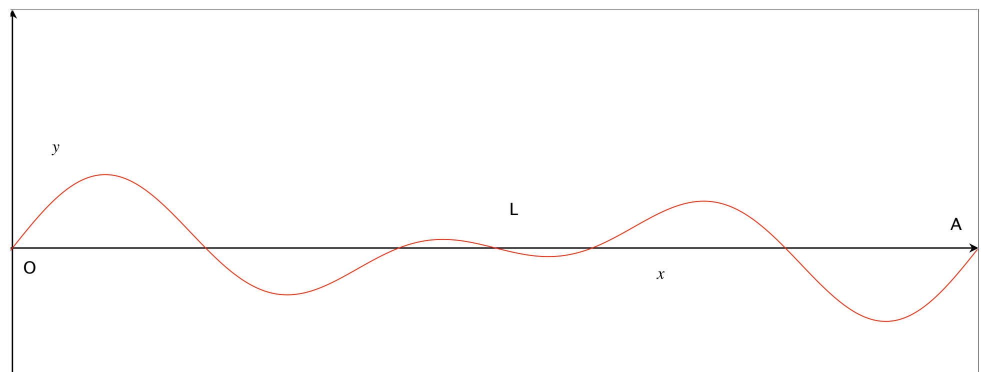
Un son est une variation périodique de la pression de l'air. Cette variation peut être perçue par l'oreille humaine et transformé en signal électrique, compréhensible par le cerveau humain, grâce à l'oreille interne (tympan, cochlée...). Dans un instrument de musique, un son est produit par une force mécanique appelée ≪ attaque ≫ sur un système mécanique vibrant. Ce dispositif vibrant est souvent relié à une ≪ caisse de résonance ≫, qui amplifie le son et le rend audible par l'auditoire. L'attaque d'un son est différente selon les instruments. Par exemple on peut recenser trois familles d'instruments à cordes : les cordes pincées (guitare, harpe, clavecin), les cordes frappées (piano, célesta) et les cordes frottées (violon, violoncelle, alto).

On va se concentrer sur un "instrument" très simple : une corde élastique, tendue entres ses deux extrémités O et A que l'on suppose immobiles. Autrement dit, on reprend le dispositif étudié par Pythagore au Vème siècle avant JC !

On note

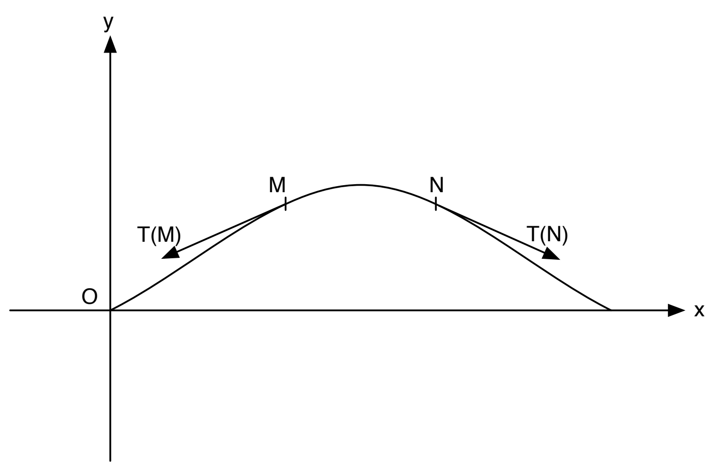
- L la longueur de la corde au repos (en cm),
- ρ la masse par unité de longueur, ou masse linéique (en g/cm),
- τ la tension de la corde liée au matériau - nylon ou acier par exemple - (en Newton).

On s'intéresse aux petites oscillations de la corde au cours du temps. On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est l'une des extrémités de la corde et $(O, \vec{i})$ la direction de la corde au repos. L'axe $(O, \vec{j})$ est perpendiculaire à $(O\vec{i})$ et les mouvements de la cordes sont supposés avoir lieu dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $h(t, x)$ la hauteur de la corde à l'instant t au-dessus



du point d'abscisse $x \in [0, L]$.

On considère un petit morceau de corde délimité par les points $M(x, h(t, x))$ et $N(x + \delta x, h(t, x + \delta x))$, à un instant t fixé.



Les forces extérieures qui s'exercent sur le petit morceau de corde sont sont la tension $\vec{T}(M)$ exercée par la partie gauche de la corde au point M, et la tension $\vec{T}(N)$ exercée par la partie droite de la corde au point N (on néglige les effets de la pesanteur).Ces forces sont supposées tangentes à la corde au point considéré (les physiciens disent que la corde est élastique). On note $\theta(x)$ l'angle entre le vecteur $\vec{i}$ et $\vec{T}(M)$. De même, $\theta(x+\delta x)$ est l'angle entre le $\vec{i}$ et $\vec{T}(N)$. On projette les 2 forces sur les axes et on obtient

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = -\|\vec{T}(M)\| \cos(\theta(x))\vec{i} - \|\vec{T}(M)\| \sin(\theta(x))\vec{j} \\ \vec{T}(N) = \|\vec{T}(N)\| \cos(\theta(x + \delta x))\vec{i} + \|\vec{T}(N)\| \sin(\theta(x + \delta x))\vec{j} \end{cases}$$

On fait l'hypothèse que les points de la corde ne se déplacent pas horizontalement, ce qui se traduit par le fait que leur norme est une constante : c'est la tension de la corde, que l'on a noté τ. Autrement dit

$$\begin{cases} \vec{T}(M) = -\tau\cos(\theta(x))\vec{i} - \tau\sin(\theta(x))\vec{j} \\ \vec{T}(N) = \tau\cos(\theta(x+\delta x))\vec{i} + \tau\sin(\theta(x+\delta x))\vec{j} \end{cases}$$

On applique maintenant laloi de Newton, qui dit que la masse du morceau de corde que multiplie la variation de vitesse, est égale à la somme des forces extérieures. En projetant cette relation sur l'axe vertical, on obtient :

$$\rho\,\delta x\,\partial_t^2 h(t,x) = -\tau\sin(\theta(x)) + \tau\sin(\theta(x+\delta x))$$

Puisque $\theta(x)$ est supposé très petit, on remplace $\sin(\theta(x))$ par $\theta(x)$. De plus $\theta(x)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $x \mapsto h(t,x)$au point d'abscisse x, donc

$$\theta(x) = \partial_x h(t,x) \text{ et } \theta(x+\delta x) = \partial_x h(t,x+\delta x),$$

d'où

$$\partial_t^2 h(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\,\frac{\partial_x h(t,x+\delta x) - \partial_x h(t,x)}{\delta x}\cdot$$

En faisant tendre $\delta x \to 0$, on obtient l'équation des cordes vibrantes

$$\partial_t^2 h(t,x) = \frac{\tau}{\rho}\partial_x^2 h(t,x).$$

Il est clair que le mouvement de la corde dépend de la façon dont on la frappe (ou pince, ou frotte...) à l'instant t initial $t = 0$. Disons que l'on connaît la position initiale de la corde $u(x)$, et sa vitesse initiale $v(x)$. Avec ces notations, la fonction $h(t,x)$ doit être entièrement déterminé par les conditions

$$(\mathcal{P}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}h(t,x) = c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}h(t,x) = 0 \\ h(t,0) = h(t,L) = 0, \text{ pour tout } t \\ h(0,x) = u(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}h(0,x) = v(x), \end{cases}$$

où l'on a noté $c = \sqrt{\tau/\rho}$.

5.1.2 En avant la musique !

L'un des objectifs de ce qui va suivre, est de démontrer que le problème des cordes vibrantes $(\mathcal{P})$ ci-dessus admet une unique solution $h(t,x)$ qui s'écrit comme superposition (d'un nombre éventuellement infini) d'ondes sinusoïdales. Dans le cas où la corde est pincée à l'instant $t = 0$ (c'est-à-dire $v = 0$), cette solution s'écrit

$$h(t,x) = \sum_{n\geq 1} A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Le membre de droite de cette égalité porte le nom de décomposition de h en série de Fourier.

La note produite par la corde est donc une superposition (somme infinie) d'ondes sinusoïdales h_k de fréquence temporelle $\nu k = kc/2L$, où

$$h_k(t,x) = A_k \sin\big(\frac{k\pi}{L}x\big)\cos\big(\frac{k\pi c}{L}t\big)$$

Ces ondes sinusoïdales sont appelées k-ième harmonique de la note produite. La première, h_1 est appelée fondamentale. Le nombre A_k est l'amplitude de cette k-ième harmonique dans la note. Cette amplitude est reliée aux données initiales u et v (on rappelle qu'on traite ici le cas $v = 0$, pour simplifier). Lors de la production d'une note, l'oreille humaine perçoit avant tout la fondamentale. Ce que l'on appelle hauteur de la note est la fréquence nu_1. Cependant l'oreille entend aussi quelques unes des premières harmoniques : le timbre d'un instrument est directement relié aux harmoniques qu'il peut émettre ainsi qu'à leur intensité. Le son produit par une corde a pour fréquence (fondamentale)

$$\nu_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}.$$

On retrouve donc ainsi le fait qu'on obtient un son plus aigu en en augmentant la tension τ de la corde, ou bien en diminuant la masse linéique de la corde (par exemple en diminuant son diamètre), ou en diminuant la longueur L de la corde, ce que l'on fait sur une guitare en posant ses doigts sur le manche. Au passage, on voit qu'on obtient une note de fréquence double en divisant la longueur de la corde par 2 : l'écart entre ces deux notes est appelé octave !

Pour terminer, signalons que les physiciens définissent l'énergie de la corde vibrante comme étant le nombre

$$E = \sqrt{\sum_{k\geq 0} A_k^2}.$$

C'est aussi cette quantité que l'on appelle intensité du son produit. Les amplitudes A_k de chacune des harmoniques doivent donc tendre vers 0 assez vite quand $k \to +\infty$ pour que la série converge et que l'énergie soit finie. En particulier, comme on l'a tous expérimenté, seules les premières harmoniques sont perceptibles par l'oreille humaine.

5.2 Séries trigonométriques

5.2.1 Applications périodiques

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique de période $T \in \mathbb{R}$ (on dit aussi T-périodique) si pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x+T) = f(x)$. Il est facile de voir que l'ensemble des fonctions T-périodiques est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques ; la fonction $x \mapsto e^{ix/T}$ est $(2\pi/T)$-périodique. Une fonction définie sur un intervalle de longueur T peut bien sur être identifiée à une fonction T-périodique.

On utilisera constamment la propriété élémentaire suivante.

Proposition 5.2.1 Soit f une application T-périodique. Si f est continue par morceaux sur $[0, T]$, alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[x_0, x_0 + T]$ et l'on a

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

5.2.2 Séries trigonométriques

Définition 5.2.2 Une série de fonctions de terme général f_n est appelée série série trigonométrique lorsqu'il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels telles que $f_0(t) = a_0$ pour tout t et, pour tout $n \geq 1$ et tout t on a

$$f_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

Nous utiliserons souvent la notation exponentielle pour les séries trigonométriques. Posant en effet $c_0 = a_0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \qquad \text{et} \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

on obtient la relation

$$\sum_{n\geq 0} f_n(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

Réciproquement il est clair qu'une série de fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est une série trigonométrique, avec $a_0 = c_0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$. Le lecteur devra pourtant prendre garde à cette notation. On dira en effet que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ converge lorsque la série $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ correspondante converge, ce qui conduit à la

Définition 5.2.3 On appelle p-ième somme partielle de la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$S_p = \sum_{n=-p}^{n=p} c_n e^{int}$$

On dira que la série est convergente (simplement, normalement) lorsque la suite de fonctions (S_p) converge (simplement, normalement).

Lorsque les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, on voit immédiatement que la série trigonométrique correspondante converge normalement, la fonction somme étant alors une fonction continue et 2π-périodique.

Proposition 5.2.4 L'ensemble $\mathcal{D}$ des points où la série trigonométrique converge simplement est invariant sous l'effet de la translation $t \mapsto t+2\pi$, et la fonction somme S est 2π-périodique. Si la série converge normalement sur un intervalle I de $\mathcal{D}$, la fonction S est continue sur I. C'est notament le cas lorsque les séries de termes généraux a_n et b_n sont absolument convergentes.

Exercice 5.2.5 *Soit (b_n) une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On note $R_n(x)$ le n-ième reste de la série de sinus*

$$\sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx).$$

Calculer $2R_n(x)\sin(x/2)$, et en déduire la convergence simple de cette série sur tout intervalle fermé ne contenant aucun point de $2\pi\mathbb{Z}$. En déduire la nature de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$.

Lorsque la série trigonométrique $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est normalement convergente sur $[0,2\pi]$ (donc sur $\mathbb{R}$), il existe une relation simple entre les coefficients c_n et la fonction somme de cette série.

Proposition 5.2.6 Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\ e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$ et S sa fonction somme. Alors la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-int}dt$$

Si de plus la série trigonométrique $\sum inc_n e^{int}$ des dérivées est normalement convergente, de somme S_1, la fonction S est dérivable avec $S' = S_1$.

Preuve.— La fonction somme S est continue par la théorie générale et 2π-périodique. De plus on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(t)e^{-ipt}dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t}dt$$

On utilise alors le lemme suivant dont la preuve est un **Exercice** facile.

Lemme 5.2.7 Soit k un entier relatif et $I(k) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt$. On a

$$I(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k\neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k=0 \end{cases}$$

La dérivabilité de S est directement donnée par le théorème de dérivabilité des séries de fonctions.

□

5.3 Coefficients de Fourier

Pour alléger les notations, nous travaillerons avec des fonctions 2π-périodiques. L'ensemble des définitions et résultats de ce chapitre s'applique cependant aux fonctions T-périodiques, à condition de remplacer à chaque fois les fonctions 2π-périodiques $t \mapsto \cos(nt)$, $t \mapsto \sin(nt)$ et $t \mapsto e^{int}$ respectivement par les fonctions $t \mapsto \cos(2\pi nt/T)$, $t \mapsto \sin(2\pi nt/T)$ et $t \mapsto e^{2i\pi nt/T}$ qui sont T-périodiques. On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux sur chaque période.

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{int}$ une série trigonométrique normalement convergente sur $[-\pi,\pi]$ et S sa fonction somme, on sait que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(x)dx,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(x)\cos(nx)dx \text{ pour } \ n\geq 1,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} S(x)\sin(nx)dx \text{ pour } \ n\geq 1.
\end{aligned}$$

Cela va nous conduit à la

Définition 5.3.1 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[-\pi,\pi]$. On appelle coefficients de Fourier exponentiels de f les nombres complexes c_n définis pour tout $n\in\mathbb{Z}$ par

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont les nombres définis par

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

et, pour $n\geq 1$,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Remarque 5.3.2 Si S est la somme d'une série trigonométrique $\sum c_n e^{int}$ normalement convergente, les coefficients de Fourier trigonométriques de S sont les c_n (cf. la Proposition 5.2.6).

Exercice 5.3.3 *Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = x^2$.*

Exercice 5.3.4 *Soit f une fonction de $\mathcal{E}$ et g la fonction de $\mathcal{E}$ définie par $g(t) = f(t + a)$ où a est un réel fixé. Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.*

Voici d'abord quelques propriétés très simples de ces coefficients de Fourier.

i) Dans chacune des définitions ci-dessus, l'intervalle $[-\pi, \pi]$ peut être remplacée par n'importe quel intervalle de longueur 2π.

ii) Si f est une fonction à valeurs réelles, a_n et b_n sont réels et $\bar{c}_n = c_{-n}$ pour tout n

iii) Si f est une fonction paire, tous les b_n sont nuls. De même si f est impaire, tous les a_n sont nuls

iv) On a $a_0 = c_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les relations $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $c_n = (a_n - ib_n)/2$, $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$

v) Les coefficients de Fourier d'une combinaison linéaire de fonctions sont les combinaisons linéaires correspondantes des coefficients de Fourier de chacune d'elles : $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$

vi)
$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |f(t)| dt \ .$$

La propriété suivante porte le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

Proposition 5.3.5 Soit f une fonction de $\mathcal{E}$. Les suites $(a_n(f))$, $(b_n(f))$, $(c_n(f))$ et $(c_{-n}(f))$ des coefficients de Fourier de f sont convergentes et ont pour limite 0.

Preuve.— Compte tenu du point (iv) précédent, il est clair qu'il suffit de prouver la proposition pour les suites (c_n) et (c_{-n}) ($n \in \mathbb{N}$). De plus puisque $\bar{c}_n(f) = c_{-n}(\bar{f})$, on voit qu'il suffit de prouver la proposition pour la suite (c_{-n}). Pour les fonctions $f = \sum_{j=0}^{N} K_j \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}]}$ en escaliers, on a

$$c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N} \int_{x_j}^{x_{j+1}} K_j e^{int} dt = \frac{1}{2in\pi} \sum_{j=0}^{N} K_j (e^{inx_{j+1}} - e^{inx_j}),$$

et donc la majoration

$$|c_{-n}| \leq \frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^{N} |K_j| \ .$$

Pour une fonction continue par morceaux f sur $[-\pi, +\pi]$ quelconque, la proposition découle alors du fait qu'il existe (exercice) une suite (ϕ_k) de fonctions en escaliers telle que $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \phi_k(x)| dx \to 0$ quand $n \to +\infty$. □

Deux fonctions distinctes peuvent-elles avoir les mêmes coefficients de Fourier ? En appliquant le résultat suivant à leur différence, on voit qu'il n'en est rien si ces fonctions diffèrent en un point où elles sont toutes deux continues :

Proposition 5.3.6 Soit f une fonction continue par morceaux périodique. S'il existe un point $c \in [-\pi, \pi]$ tel que $f(c) \neq 0$ et f soit continue en c, alors les coefficients de Fourier de f ne sont pas identiquement nuls.

Preuve.—On suppose que $f(c) = a > 0$. Puisque f est continue au point c, il existe un réel $\alpha > 0$ assez petit tel que pour tout $x \in]c-\alpha, c+\alpha[$, on ait $f(x) \geq a/2$. Supposons que tous les coefficients de Fourier de f soient nuls. Alors pour tout polynôme trigonométrique $P(t)$, positif sur $[c-\alpha, c+\alpha]$, on a

$$0 = \int_{c-\pi}^{c+\pi} f(t)P(t)dt \geq \frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P(t)dt + \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P(t)dt$$

Prenons alors $P(t) = P_n(t) = (1+\cos(t-c)-\cos(\alpha))^n$. Sur $]c-\alpha, c+\alpha[$ on a $\cos(t-c) > \cos(\alpha)$, donc $P_n(t) \geq 1$, et, pour tout n,

$$\frac{a}{2}\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} P_n(t)dt \geq a\alpha.$$

Pour $t \in [c-\pi, c+\pi] \backslash [c-\alpha, c+\alpha]$ on a par contre $(1+\cos(t-c)-\cos(\alpha)) < 1$ et donc $P_n(t) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Si la suite $(P_n)_n$ convergeait uniformément vers 0 sur cet intervalle, on pourrait passer à la limite et écrire

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt\right) \\
&\qquad = \int_{c-\pi}^{c-\alpha} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt + \int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)\lim_{n\to+\infty} P_n(t)dt = 0
\end{aligned}$$

On aboutirait à

$$0 \geq a\alpha,$$

ce qui est absurde.

Malheureusement la suite (P_n) ne converge pas uniformément sur $[c-\pi, c+\pi] \backslash [c-\alpha, c+\alpha]$. Mais c'est le cas sur $[c+\alpha+\delta, c+\pi]$, où $\delta > 0$ est aussi petit que l'on veut, ce qui conduit à la preuve suivante :

On remarque que, pour tout n, on a :

$$\begin{aligned}
|\textstyle\int_{c+\alpha}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt| &\leq \delta \sup|f| + |\textstyle\int_{c+\alpha+\delta}^{c+\pi} f(t)P_n(t)dt| \\
&\leq \delta\sup|f| + \pi\sup|f|\sup_{t\in[c+\alpha+\delta, c+\pi]}|P_n(t)| \\
&\leq \delta\sup|f| + \pi\sup|f|\left(\max(\cos\alpha, 1-\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)\right)^n .
\end{aligned}$$

Pour montrer que la limite est zéro, on choisit successivement, $\epsilon > 0$ étant donné, $\delta > 0$ de sorte que $\delta\sup|f| < \frac{\epsilon}{2}$ puis $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\pi\left(\max(\cos\alpha, 1-\cos\alpha+\cos(\alpha+\delta)\right)^n \sup|f| < \frac{\epsilon}{2}$$

pour $n \geq N$. □

5.4 Séries de Fourier : Cas des fonctions "très" régulières

Nous venons de définir les coefficients de Fourier d'une fonction périodique f dont nous avons seulement supposé qu'elle était continue par morceaux. Nous nous intéressons maintenant à la série trigonométrique dont les coefficients sont précisément les $c_n(f)$ et que l'on appelle *série de Fourier de f*. La question naturelle est de savoir si cette série trigonométrique converge et dans ce cas si sa fonction somme est f. La réponse est très délicate dans le cas où l'on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires sur la fonction f. Par contre, et c'est l'objet de ce paragraphe, on peut voir assez facilement que c'est bien le cas pour les fonctions périodiques qui sont suffisamment régulières, c'est à dire plusieurs fois dérivables. L'ensemble des résultats qui suivent repose sur la

Proposition 5.4.1 Soit k un entier strictement positif, f une fonction 2π-périodique, $(c_n(f))$ la suite des coefficients de Fourier exponentiels de f. Si f est k fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $M > 0$ tel que pour, tout $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$, on ait

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{|n|^k}.$$

Preuve.— Supposons que f est continument dérivable. En intégrant par parties et puisque $f(2\pi) = f(0)$ on obtient

$$c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt$$

et donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{2\pi}{n}\sup\{|f'(t)|, t \in [0, 2\pi]\}.$$

Dans le cas d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$, il suffit de montrer par récurrence de la même manière que

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^k}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-int}dt.$$

□

Proposition 5.4.2 Si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ avec $k \geq 2$, alors la série de Fourier de f est normalement convergente et sa somme est f.

Preuve.— Puisque l'on a $|c_n(f)| \leq M/n^2$, la série trigonométrique $\sum c_n(f)e^{int}$ est normalement convergente. On a vu que les coefficients de Fourier de la fonction somme S sont alors égaux à ceux de la fonction f. Puisque f et S sont continues, la Proposition 5.3.6 entraine l'égalité $f = S$. □

Exercice 5.4.3 *Soit f la fonction paire et 2π-périodique définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$. Calculer ses coefficients de Fourier trigonométriques et montrer l'égalité*

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

5.5 Théorème de convergence simple de Dirichlet

Nous abordons maintenant le problème difficile de la convergence des séries de Fourier de fonctions peu régulières. Dans ce cas la convergence uniforme n'a pas toujours lieu et nous devrons nous contenter d'un théorème de convergence simple dû à G. Dirichlet.

On dira qu'une fonction continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ est continument dérivable par morceaux (on dit aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux) sur cet intervalle s'il existe une partition de $[0, 2\pi]$ constituée d'un nombre fini d'intervalles $[a, b]$ tels que

i) f est continue sur $]a, b[$; de plus f possède une limite à droite en a et une limite à gauche en b,

ii) f est dérivable sur $]a, b[$ et f' est continue par morceaux sur cet intervalle.

Proposition 5.5.1 (Théorème de Dirichlet) Soit f une fonction 2π-périodique continument dérivable par morceaux et $x_0 \in [0, 2\pi]$. Alors la série de Fourier de f converge simplement en x_0 et sa somme est

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2}$$

où $f(x_0+)$ et $f(x_0-)$ sont les limites à droite et à gauche de f en x_0. Si de plus f est continue en x_0, sa série de Fourier converge vers $f(x_0)$.

La preuve de ce théorème utilise le

Lemme 5.5.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a :

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \frac{1}{2} \frac{\sin[(n + \frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.$$

Preuve.—On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos[ku] = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} e^{iku}$. Or

$$\sum_{k=1}^{n} e^{iku} = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k = e^{iu} \frac{1 - e^{inu}}{1 - e^{iu}} = e^{iu/2} e^{inu/2} \frac{e^{-inu/2} - e^{inu/2}}{e^{-iu/2} - e^{iu/2}} = e^{i(n+1)u/2} \frac{\sin(nu/2)}{\sin(u/2)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(ku) &= \frac{1}{2}+\frac{\cos[(n+1)u/2]\sin(nu/2)}{\sin(u/2)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin[(n+1/2)u]+\sin[-u/2]}{\sin(u/2)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u]}{\sin[\frac{u}{2}]}.\end{aligned}$$

□

En fait, on va démontrer le résultat un peu plus général suivant.

Proposition 5.5.3 Soit f une fonction 2π-périodique, intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Si

i) la fonction f admet une limite à droite et une limite à gauche au point x, notées respectivement $f(x+0)$ et $f(x-0)$;

ii) la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u}(f(x+u)+f(x-u)-f(x+0)-f(x-0))$ est bornée au voisinage de 0,

alors, la série de Fourier de f converge (simplement) au point x vers $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Preuve.— Soit $S_n(x)$ la $n-$ième somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx).$$

En utilisant les définition des a_k et des b_k, on a

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\big[\cos(kt)\cos(kx)+\sin(kt)\sin(kx)\big]dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\big[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\big]dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]}{\sin[\frac{t-x}{2}]}dt,\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du Lemme 5.5.2. En posant $u=t-x$, et en utilisant la périodicité de l'intégrant, on obtient

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du.$$

On découpe l'intégrale en deux et on change de variable dans le premier morceau :

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x-u)du+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}f(x+u)du.\end{aligned}$$

On a donc la "formule de Dirichlet" :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du.$$

Au passage, on note que pour $f_0 = 1$, on a $a_0(f_0) = 1$, $a_n(f_0) = b_n(f_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et la formule de Dirichlet donne

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}du.$$

Notons alors $\alpha = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot$ On a

$$\begin{aligned}
S_n(x) - \alpha &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du - \alpha\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha\Big]du \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(u)\sin[(n+\frac{1}{2})u)]du.
\end{aligned}$$

Dans cette expression,

$$\phi(u) = \frac{u}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{1}{u}\Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - \alpha\Big]$$

est une fonction bornée au vosinage de 0, et intégrable sur tout intervalle de la forme $[\epsilon, 2\pi]$, $\epsilon > 0$, par hypothèse. Par conséquent ϕ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, et le Lemme de Riemann-Lebesgue permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) - \alpha = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \phi(u)\sin[(n+\frac{1}{2})u)]du = 0,$$

ce qui termine la preuve du théorème de Dirichlet. □

5.6 Convergence au sens de Cesaro

On rappelle d'abord la notion de convergence au sens de Cesaro pour une suite numérique.

Définition 5.6.1 Soit (u_n) une suite de réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ au sens de Cesaro lorsque la suite (v_n) la suite définie par

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}\cdot$$

converge vers ℓ.

Proposition 5.6.2 Si (u_n) une suite de réels converge vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ au sens de Cesaro.

Notons tout d'abord que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ ne converge pas, alors qu'elle converge vers 0 au sens de Cesaro. Autrement dit, la réciproque de cette proposition est fausse.

Preuve.— Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour $n \geq N$ on a alors

$$\begin{aligned}
|\frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} - \ell| = \frac{1}{n}|\sum_{k=0}^{n-1} u_k - \ell| &\leq \frac{1}{n}|\sum_{k=0}^{N-1} u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n-1} |u_k - \ell| \\
&\leq \frac{1}{n}|\sum_{k=0}^{N-1} u_k - \ell| + \frac{n-N}{n}\frac{\epsilon}{2} \\
&\leq \frac{1}{n}|\sum_{k=0}^{N-1} u_k - \ell| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $n \to +\infty$, donc il existe $N' \geq N$ tel que

$$n \geq N' \Rightarrow \frac{1}{n}|\sum_{k=0}^{N-1} u_k - \ell| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N'$, on a

$$|\frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} - \ell| \leq \epsilon.$$

□

Lemme 5.6.3 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ on a :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin[(k+\frac{1}{2})u)] = \frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin\frac{u}{2}}.$

Preuve : On procède de la même manière, en remarquant que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin[(k+\frac{1}{2})u)] = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+\frac{1}{2})u} = \operatorname{Im} e^{iu/2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{iku}.$$

□

Proposition 5.6.4 (Théorème de Fejer) Soit f une fonction 2π-périodique, intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$.

i) La série de Fourier de f converge au sens de Cesaro vers $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ en chaque point x où ces limites existent.

ii) Soit $\sigma_n(x)$ la $n-$ième moyenne de Cesaro des sommes partielles $S_n(x)$ de la série de Fourier de f :

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n}.$$

Si K est un compact où f est continue, la suite de fonctions (σ_n) converge uniformément vers f sur K.

Preuve : On écrit d'abord, en utilisant la formule de Dirichlet

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin[(k+\frac{1}{2})u)]}{\sin[\frac{u}{2}]}\ \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}du \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{1}{\sin[\frac{u}{2}]}\sum_{k=0}^{n-1}\sin[(k+\frac{1}{2})u)]du \\
&= \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du Lemme 5.6.3.

En particulier pour $f_0 = 1$, on a $a_0(f_0) = 1$, $a_n(f_0) = b_n(f_0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $S_n(x) = 1$ et $\sigma_n(x) = 1$ pour tout n, et

$$1 = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du.$$

Donc, pour $\alpha = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, on a

$$\sigma_n(x)-\alpha = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha\Big]\frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du$$

Soit alors $\epsilon > 0$. Puisque $f(x+0)$ et $f(x-0)$ existent, il existe $\delta = \delta(x) > 0$ tel que

$$\forall u \in]0,\delta(x)],\ \Big|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha\Big| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Donc

$$|I_n(\delta)| := \Big|\frac{1}{n\pi}\int_0^\delta \Big[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha\Big]\frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du\Big| \leq \frac{\epsilon}{2}\,\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}|J_n(\delta)| := |\frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi [\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha]\frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du| \\ \leq \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi |\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha|du\end{aligned}$$

Or le membre de droite de cette inégalité, qui dépend de x, tend vers 0 quand $n\to+\infty$: il existe $N(x)\in\mathbb{N}$, tel que pour tout $n\geq N(x)$, on a

$$|\frac{1}{n\pi}\int_\delta^\pi [\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha]\frac{\sin^2[\frac{nu}{2}]}{\sin^2\frac{u}{2}}du| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement, pour $n\geq N(x)$, on a

$$|\sigma_n(x)-\alpha| \leq |I_n(\delta)|+|J_n(\delta)|\leq \epsilon,$$

ce qui montre que $(\sigma_n(x))$ converge vers $\alpha = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, et le point 1) de la proposition.

On démontre maintenant le point 2). Soit K un compact où f est continue. Pour $x\in K$, on a en particulier $\alpha=f(x)$. De plus, sur K, la fonction f est uniformément continue :

$$\forall\epsilon>0, \exists\delta>0, \forall x\in K, \forall u\in[0,\delta[, |\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha|\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

On écrit encore

$$|\sigma_n(x)-\alpha| \leq |I_n(\delta)|+|J_n(\delta)|,$$

mais cette fois le δ est indépendant de $x\in K$. On garde la même majoration pour $|I_n(\delta)|$, et cette fois on a

$$\begin{aligned}|J_n(\delta)| &\leq \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi |\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-\alpha|du \\ &\leq \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi |\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-f(x)|du \\ &\leq \frac{1}{n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}(\int_{-\pi}^\pi |f(u)|du+\pi\sup_{x\in K}|f(x)|),\end{aligned}$$

ce qui montre que $J_n(\delta)$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, uniformément par rapport à $x\in K$: il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, pour tout $x\in K$,

$$|\sigma_n(x)-\alpha| \leq |I_n(\delta)|+|J_n(\delta)|\leq \epsilon,$$

ce qui termine la preuve de la proposition. □

Chapitre 6

Méthodes hilbertiennes

6.1 Convergence en moyenne quadratique

On peut comprendre les théorèmes de Dirichlet et de Fejer comme des énoncés portant sur la possibilité d'approcher d'aussi près que possible une fonction 2π-périodique par un polynôme trigonométrique. Par exemple le théorème de Fejer dit que, si f est une fonction 2π-périodique continue, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P_ϵ tel que

$$\|f(x) - P_\epsilon(x)\|_\infty \leq \epsilon.$$

Il suffit en effet de prendre $P_\epsilon = \sigma_n$, avec n suffisamment grand, puisque (σ_n) converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$.

Pour pouvoir considérer de fonctions moins régulières, par exemple continues par morceaux, il faut changer de façon de mesurer la distance entre les fonctions. Pour f et g deux fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques, on note

$$d_2(f,g) = (\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Par rapport à la distance habituelle

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x) - g(x)|,$$

un des avantages de d_2 est qu'elle ne "voit pas" les éventuelles discontinuités isolés des fonctions f et g.

Le nombre $d_2(f,g)$ est appelé écart quadratique moyen entre f et g.

Proposition 6.1.1 *Si une suite de fonction (f_n) continues par morceaux et 2π-périodique converge uniformément vers une fonction f, alors cette suite converge vers f en écart quadratique moyen, c'est à dire*

$$\lim_{n\to+\infty} d_2(f, f_n) = 0$$

Preuve.— L'hypothèse de convergence de la suite (f_n) s'écrit

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,2\pi]}|f_n(x)-f(x)|=0$$

Or on a

$$d_2(f,f_n)\leq \sup_{x\in[0,2\pi]}|f_n(x)-f(x)|(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dt)^{1/2}$$

ce qui montre la proposition. □

Exercice 6.1.2 Montrer par un exemple que la réciproque n'est pas vraie, même si on travaille dans l'espace des fonctions continues.

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer la

Proposition 6.1.3 Soit f une fonction périodique de période 2π, de carré intégrable. Parmi tous les polynômes trigonométriques $Q(x)$ de degré inférieur à n, la n-ième somme partielle $S_n(f)$ de la série de Fourier de f est le seul pour lequel l'écart quadratique moyen $d_2(f,Q)$ atteint sa plus petite valeur, et l'on a

$$d_2(f,S_n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt-\sum_{k=-n}^{n}|c_k(f)|^2$$

Pour cela, on va utiliser de manière essentielle le fait que l'écart d_2 provient d'un produit scalaire (presque !) sur l'espace des fonctions de carré intégrable.

6.2 Espaces préhilbertien

6.2.1 Produit scalaire

Définition 6.2.1 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit scalaire (hemitien) sur E est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$: $(x,y)\mapsto\langle x,y\rangle$ telle que

i) $x\mapsto\langle x,y\rangle$ est une application linéaire, pour tout $y\in E$ fixé.

ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

iii) $\langle x,x\rangle=0$ si et seulement si $x=0$;

iv) $\langle x,x\rangle\geq 0$.

Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Exemple 6.2.2 Sur $E = \mathbb{C}^m$, $(z, z') \mapsto \sum_j z_j \overline{z'_j}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{C}^m$. Sur $E = \mathbb{R}^m$, $(x, x') \mapsto \sum_j x_j x'_j$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si le produit scalaire se trouve prendre ses valeurs dans $\mathbb{R}$, on parle de produit scalaire euclidien. Dans le cas contraire, on parle de produit scalaire hermitien.

Exemple 6.2.3 Sur $E = \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$, l'application $(f, g) \mapsto (\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt)$ définit un produit scalaire. Notons que, si on remplace $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$, par l'espace des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{C}$, ce n'est plus un produit scalaire. Si en effet une fonction f est nulle sauf en un nombre fini de points où elle est non-nulle. Le produit scalaire $\langle f, f\rangle$ est nul sans que la fonction soit identiquement nulle.

On est donc conduit à modifier la notion de fonction intégrable, et à considérer que ces fonctions telles que $\langle f, f\rangle = 0$ sont "nulles", mais c'est une autre histoire...

6.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

L'inégalité suivante, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, joue un rôle très important dans l'analyse hilbertienne.

Proposition 6.2.4 Dans un espace préhilbertien on a :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\ \sqrt{\langle y, y\rangle}\ .$$

Preuve.— Soit $x, y \in E$. On note θ l'argument du nombre complexe $\langle x, y\rangle$, de sorte que $|\langle x, y\rangle| = e^{-i\theta}\langle x, y\rangle$. D'après la propriété iv), pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x + \lambda e^{i\theta} y\, ,\, x + \lambda e^{i\theta} y\rangle \geq 0.$$

En développant, on obtient, pur tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle x, x\rangle + \langle x, \lambda e^{i\theta} y\rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, x\rangle + \langle \lambda e^{i\theta} y, \lambda e^{i\theta} y\rangle \\ &\geq \|x\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}(e^{-i\theta}\langle x, y\rangle) + \lambda^2\|y\|^2 \\ &\geq \|x\|^2 + 2\lambda|\langle x, y\rangle| + \lambda^2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré en λ ne change pas de signe, donc son discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\, \|y\|^2 \leq 0.$$

□

6.2.3 Norme associée

On peut associer une norme à un produit scalaire. Autrement dit, un espace préhilbertien peut être naturellement considéré comme un espace vectoriel normé :

Proposition 6.2.5 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. La fonction

$$N : x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E.

Preuve.— La fonction N est bien définie sur E puisque $\langle x, x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$ d'après la propriété iv). Elle est a valeur dans $\mathbb{R}^+$ par définition. On a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 &= N(x)^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y \rangle + N(y)^2 \\ &\leq N(x)^2 + 2|\langle x, y \rangle| + N(y)^2 \leq N(x)^2 + 2N(x)N(y) + N(y)^2, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de Cauchy-Schwarz. On a ainsi $N(x+y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2$, et donc l'inégalité triangulaire

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

□

On notera désormais $N(x) = \|x\|$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Remarque 6.2.6 On peut retrouver, dans le cas d'une norme associée à un produit scalaire, le produit scalaire à partir de la norme. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il suffit en effet de remarquer l'identité :

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \langle (x+y), (x+y) \rangle - \langle (x-y), (x-y) \rangle = 4\langle x, y \rangle\ ,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(||x+y||^2 - ||x-y||^2 \right)\ .$$

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il faut jouer avec $x+y$, $x-y$, $x+iy$ et $x-iy$.

Exemple 6.2.7 L'application $f \mapsto \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ définit une norme sur $C^0([a, b]; \mathbb{C})$. On la note $\|f\|_2$, et on a pour f, g continues,

$$d_2(f, g) = \|f - g\|_2.$$

6.2.4 Orthogonalité

Définition 6.2.8 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espace préhilbertien.
- Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.
- Plus généralement une famille $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ de vecteurs de E est dite orthogonale lorsque $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ pour tous $i \neq j$.
- La famille $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ est orthonormée lorsque

$$\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon ($\delta_{i,j}$ est appelé symbole de Kronecker).

Exemple 6.2.9 La famille constituée des fonctions

$$\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\cos(x), \frac{1}{\pi}\cos(2x), \dots \frac{1}{\pi}\cos(nx), \dots, \frac{1}{\pi}\sin(x), \frac{1}{\pi}\sin(2x), \dots, \frac{1}{\pi}\sin(nx), \dots$$

est orthonormée dans $\mathcal{C}^0([0, 2\pi)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Lorsqu'on dispose d'une base orthonormée, l'expression du produit scalaire est très simple, puisque c'est celle que l'on connait dans $\mathbb{R}^2$:

Proposition 6.2.10 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot,\rangle)$ un espace préhilbertien de dimension n, et $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Si $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}.$$

Preuve.— En utilisant la linéarité et l'anti-linéarité du produit scalaire par rapport à chacune de ses variables respectives, on trouve

$$\langle x, y\rangle = \langle\sum_{j=1}^n x_j e_j, \sum_{k=1}^n y_k e_k\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\overline{y_k}\langle e_j, e_k\rangle = \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n x_j\overline{y_k}\delta_{j,k} = \sum_{j=1}^n x_j\overline{y_j}.$$

□

Proposition 6.2.11 (Théorème de Pythagore) Soit $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$ une famille orthogonale. On a

$$\|e_1 + e_2 + \dots + e_n\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \dots + \|e_n\|^2.$$

Preuve.— Il suffit d'écrire

$$\|e_1 + e_2 + \cdots + e_n\|^2 = \langle \sum_{j=1}^{n} e_j, \sum_{k=1}^{n} e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2.$$

□

Proposition 6.2.12 Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ de dimension finie, on peut toujours construire une base orthonormée.

Preuve.— Par définition, il existe une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ de E, où n est la dimension de E. A partir de cette base, on va construire une base orthonormée par le procédé de Gram-Schmidt.

— On pose $\epsilon_1 = e_1/\|e_1\|$. On a donc $\|\epsilon_1\| = 1$.
— On pose $f_2 = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1$. On a $\langle f_2, \epsilon_1 \rangle = \langle e_2, \epsilon_1 \rangle - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \langle \epsilon_1, \epsilon_1 \rangle = 0$. Posant alors $\epsilon_2 = f_2/\|f_2\|$, la famille $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ est orthonormée.
— On continue ainsi : à l'étape $k \leq n$, on pose

$$f_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \epsilon_j.$$

Le vecteur f_k est orthogonal à chacun des vecteurs ϵ_i déjà construits, puisque

$$\langle f_k, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, e_i \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, \epsilon_j \rangle \langle \epsilon_j, \epsilon_i \rangle = \langle e_k, e_i \rangle - \langle f_k, \epsilon_i \rangle = 0.$$

On pose alors $\epsilon_k = f_k/\|f_k\|$, et on obtient une famille $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\}$ orthonormée.

□

6.2.5 Projection orthogonale

Proposition 6.2.13 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, et V un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. Un vecteur $y \in V$ réalise le minimum de la distance de x à V, c'est-à-dire

$$\|x - y\| = \min_{b \in V} \|x - b\|,$$

si et seulement si $x - y$ est orthogonal à tous les vecteurs de V. S'il existe, un tel y est unique, et s'appelle projection orthogonale de x sur V. On le note $y = \Pi_V(x)$.

Preuve.— Supposons que $y \in V$ soit tel que $x - y$ est orthogonal à tous les vecteurs de V. Pour $b \in V$, on a

$$\begin{aligned}\|x - b\|^2 = \|(x - y) + (y - b)\|^2 &= \|x - y\|^2 + \langle x - y, y - b \rangle + \langle y - b, x - y \rangle + \|y - b\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - b\|^2,\end{aligned}$$

puisque $y - b \in V$. On a donc, pour tout $b \in V$, $\|x - b\| \geq \|x - y\|$, et

$$\|x - y\| = \min_{b \in V} \|x - b\|.$$

Réciproquement, si $y \in V$ est tel que

$$\|x - y\| = \min_{b \in V} \|x - b\|,$$

alors pour tout $v \in V$, et tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$\|x - y + \alpha v\|^2 \geq \|x - y\|^2.$$

En développant, on obtient

$$2\,\mathrm{Re}(\alpha\langle x - y, v\rangle) + \alpha^2\|v\|^2 \geq 0.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a donc

$$2\alpha\,\mathrm{Re}\langle x - y, v\rangle + \alpha^2\|v\|^2 \geq 0,$$

ce qui entraine $\mathrm{Re}\langle x - y, v\rangle = 0$. Il suffit pour le voir de prendre $|\alpha|$ assez petit pour que le membre droite soit du signe de son premier terme.

En prenant $\alpha = i\beta$, on obtient de la même manière que $\mathrm{Im}\langle x - y, v\rangle = 0$.

Enfin supposons qu'il existe $y_1, y_2 \in V$ tels que $x - y_1$ et $x - y_2$ soient orthogonaux à tous les éléments de V. On a

$$\|y_1 - y_2\|^2 = \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle = \langle y_1 - x, y_1 - y_2\rangle + \langle x - y_2, y_1 - y_2\rangle = 0,$$

d'où $y_1 = y_2$. □

Dans le cas où V est de dimension finie, $\Pi_v(x)$ existe toujours, et on peut en donner une expression simple.

Proposition 6.2.14 Soit V un sous-espace de dimension finie de l'espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de V. Tout $x \in E$ admet une projection orthogonale, et

$$\Pi_V(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j.$$

Preuve.— On cherche $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ tel que $x - y$ soit orthogonal à tous les éléments de V. Pour cela, il faut et il suffit que $x - y$ soit orthogonal à chacun des e_j. Or

$$\langle x - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \alpha_k.$$

Donc $y = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle e_j$ convient, et on sait qu'un tel élément est unique. □

6.3 Application aux séries de Fourier

6.3.1 L'espace $L^2([0, 2\pi])$

On note $L^2([0, 2\pi])$ l'ensemble des fonctions $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|^2$ est intégrable. Pour f et g dans $L^2([0, 2\pi])$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Cette quantité est bien définie puisque, pour $f, g \in L^2$, on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx.$$

Malheureusement la quantité $\langle \cdot, \cdot\rangle$ n'est pas tout à fait un produit scalaire sur L^2 : comme on l'a déjà signalé, il est tout à fait possible pour une fonction f continue par morceaux d'avoir $f \neq 0$ et $\langle f, f\rangle = 0$. Un des objectifs du cours d'intégration en de troisième année est de trouver une définition adéquate de "fonction intégrable" qui permette de lever cette difficulté. Pour l'instant, on peut remarquer que la quantité $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est vraiment un produit scalaire si l'on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

La famille des fonctions $e_k = x \mapsto e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$ est orthonormée dans $L^2([0, 2\pi])$ pour ce (pseudo-) produit scalaire :

$$\langle e_j, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(j-k)x}dx = \delta_{j,k}.$$

D'ailleurs les coefficients de Fourier (complexes) de f sont donnés par

$$c_k(f) = \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx.$$

6.3.2 Inégalité de Bessel

Soit $f \in L^2([0, 2\pi])$, et $S_n = S_n(f)$ la n-ième somme partielle de sa série de Fourier

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e^{ikx}$$

Soit aussi V le sous-espace vectoriel de L^2 constitué par les polynômes trigonométriques de degré $\leq n$. La famille orthonormale $\{e_{-n}, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots e_n\}$ est une base de V (c'est même la définition de V). On a, pour tout $k \in \{-n, \dots, n\}$,

$$\langle S_n - f, e_k\rangle = \langle S_n, e_k\rangle - \langle f, e_k\rangle = c_k(f) - c_k(f) = 0.$$

Autrement dit, $S_n - f$ est orthogonal à tous les éléments de V : $S_n(f)$ est donc la projection orthogonale de f sur V, et l'on vient de démontrer la Proposition 6.1.3. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

On en déduit l'inégalité de Bessel :

Proposition 6.3.1 Soit f une fonction 2π-périodique de carré intégrable, et $c_k(f)$ ses coefficients de Fourier. La série $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2$ converge, et

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

En terme des coefficients de Fourier trigonométriques de f, et puisque $c_0 = a_0$, $c_n = (a_n - ib_n)/2$ et $c_{-n} = (a_n + ib_n)/2$ pour $n \geq 1$, l'inégalité de Bessel s'écrit

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

6.3.3 Identité de Parseval

En fait, l'inégalité de Bessel ci-dessus est une égalité. On va le prouver pour les fonctions 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.3.2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue. Notant $c_n(f)$ ses coefficients de Fourier, on a

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Preuve.— D'après le théorème de Fejer, la suite des moyennes de Cesaro σ_n de la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $[0, 2\pi]$. En particulier, on a vu que

$$\|\sigma_n - f\|_2 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Or σ_n est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$. Donc

$$\|\sigma_n - f\|_2 \geq \|S_n(f) - f\|_2,$$

ce qui montre que $\|S_n(f) - f\|_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$. Or

$$\|S_n(f) - f\|^2 = \langle S_n(f) - f, S_n(f) - f\rangle = \|S_n\|^2 - \langle S_n(f), f\rangle - \langle f, S_n(f)\rangle + \|f\|^2,$$

et $\langle S_n(f), f\rangle = \langle S_n(f), S_n(f)\rangle + \langle S_n(f), f - S_n(f)\rangle = \|S_n(f)\|^2 = \langle f, S_n(f)\rangle$. Donc

$$\|S_n(f) - f\|^2 = \|f\|^2 - \|S_n\|^2.$$

On a donc $\|S_n\|^2 \to \|f\|^2$ quand $n \to +\infty$, ce qui est précisément l'identité de Parseval. □

Le lecteur attentif pourra remarquer qu'il suffit d'avoir sous la main un suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f pour que la démonstration ci-dessus marche, et donc pour que l'identité de Parseval soit vraie. Lorsque f est $\mathcal{C}^2$, on n'a donc pas besoin de recourir au théorème de Fejer.