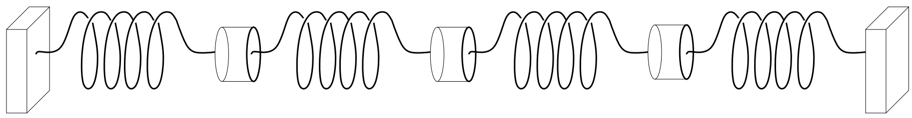
SYSTEMES DIFFERENTIELS

P. Pansu

December 6, 2004

1 Motivation

Etude du mouvement d'un systèmes de masses reliées par des ressorts, glissant le long d'une poutre soufflante. Pour simplifier, les ressorts ont même raideur k et les corps même masse m.



Notons $x_i(t)$ l'écart par rapport à la position d'équilibre pour le i-ème corps. Notons $X(t)$ le vecteur de composantes $x_i(t)$. Pour 3 masses, le principe fondamental de la dynamique s'écrit $mX''(t) = kAX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Les physiciens ont compris qu'en général, le mouvement est une superposition de mouvements fondamentaux appelés *modes propres*. Ce sont les mouvements où tous les corps oscillent à la même fréquence. ω est une fréquence propre si et seulement si $-\omega^2$ est une valeur propre de $\frac{k}{m}A$.

2 Position du problème

2.1 Définition

Définition 1 *Un* système différentiel linéaire à coefficients constants *d'ordre* 1 *à n équations prend la forme $X' = AX + B$ où X et B sont des fonctions sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ (i.e., des vecteurs dépendant du temps), A une matrice $n \times n$ indépendante du temps. X est l'inconnue, B le second membre, A la matrice du système.*

Problème. Etant données A et B, trouver toutes les fonctions $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ solutions de $X' = AX + B$.

On s'intéresse aussi à des systèmes différentiels linéaires qui se ramènent à un système d'ordre 1.

Exemple 2

$$\begin{cases} x''(t) = a_1x(t) + b_1y'(t) + c_1x(t) + d_1y(t) + b_1(t) \\ y''(t) = a_2x(t) + b_2y'(t) + c_2x(t) + d_2y(t) + b_2(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0,\ x'(0) = x'_0,\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0.$$

Ce système est équivalent à un système de 4 équations du premier ordre. En effet, on introduit deux nouvelles fonctions inconnues $z(t)$ et $w(t)$, qui représentent les vitesses $z(t) = x'(t)$, $w(t) = y'(t)$.On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ w(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}.$$

Le système équivaut à $X' = AX + B$ avec condition initiale $X(0) = X_0$.

Exemple 3

$$\begin{cases} x''(t) = 2x(t) + x'(t) + b(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) + x'(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0,\, x'(0) = x'_0,\, y(0) = y_0.$$

Ce système équivaut à un système à 3 équations du premier ordre. En effet, on introduit une nouvelle fonction inconnue $z(t)$ qui représente la vitesse $x'(t)$. On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}.$$

Le système équivaut à $X' = AX + B$ avec condition initiale $X(0) = X_0$.

3 Principes généraux

3.1 Linéarité

Les fonctions solutions forment un espace affine.

Proposition 4 *La solution générale du système $X' = AX + B$ s'obtient en ajoutant à une solution particulière la solution générale du* système linéaire homogène associé $X' = AX$.

3.2 Existence et unicité

Proposition 5 *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $B : I \to \mathbf{R}^n$ un vecteur dépendant continûment du temps. Fixons $t_0 \in I$. Pour tout vecteur $X_0 \in \mathbf{R}^n$, il existe une et une seule solution $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $t \mapsto X(t)$, de $X' = AX + B$, telle que $X(t_0) = X_0$.*

Corollaire 6 *Pour un système de n équations du premier ordre, l'espace des solutions est un espace affine de dimension n.*

Le principe fondamental de la dynamique conduit souvent à des systèmes de n équations du second ordre. Dans ce cas, une solution est déterminée par sa position et sa vitesse initiales. L'espace des solutions est de dimension $2n$.

4 Trajectoires des systèmes homogènes de deux équations du premier ordre

4.1 Position du problème

On va donner une représentation graphique des solutions de systèmes $X' = AX$ où A est une matrice 2×2.

Définition 7 *Une* trajectoire *d'un système différentiel est l'ensemble des positions prises par une solution. C'est une courbe dans le plan dont on a oublié la paramétrisation, sauf l'orientation.*

Objectif. Etant donné A, tracer suffisamment de trajectoires pour donner une idée fidèle de l'ensemble.

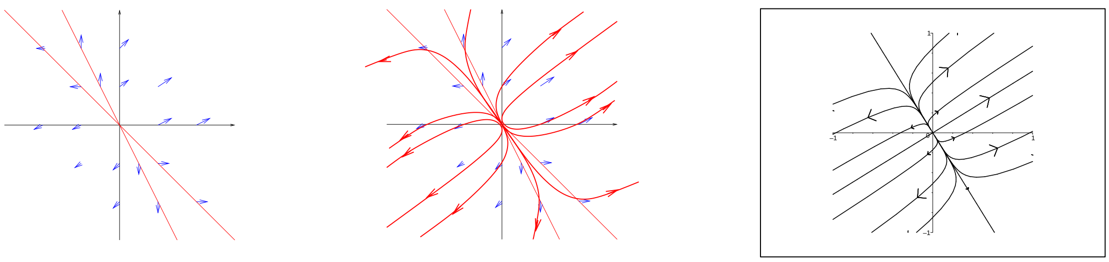
4.2 Principes

On note w le champ de vecteurs défini par $w(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Les trajectoires sont tangentes au champ w.
- Deux trajectoires non confondues ne se coupent pas.
- Deux solutions portées par la même trajectoire diffèrent d'une translation du temps.
- L'image d'une trajectoire par une homothétie de centre l'origine est encore une trajectoire.

4.3 Méthode graphique

- On commence par représenter par des flèches la direction et le sens du champ de vecteurs en quelques points. Par homogénéïté, $w(\lambda x, \lambda y) = \lambda w(x,y)$, la direction et le sens du champ sont constants le long de chaque demi-droite issue de l'origine. Le sens change mais pas la direction lorsqu'on traverse l'origine. On trace les droites (*isoclines*) le long desquelless w est horizontal (resp. vertical). Eventuellement, on représente le champ le long d'autres droites.
- On trace une trajectoire en respectant la tangence au champ. Le quadrant NE, NO, SO, SE vers lequel pointe la vitesse est constant entre les isoclines.



Le champ w | Tracé à la main | Tracé de l'ordinateur

Trajectoires pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4.4 Méthode utilisant les vecteurs propres

4.4.1 Trajectoires rectilignes

Remarque 8 *Si v est un vecteur propre de A, relatif à une valeur propre $\lambda \neq 0$, la demi-droite issue de l'origine et de vecteur directeur v est une trajectoire, orientée vers l'infini si $\lambda > 0$, vers l'origine si $\lambda < 0$. Si $\lambda = 0$, chaque point de la droite vectorielle engendrée par v est une trajectoire.*

4.4.2 Règles utiles au tracé

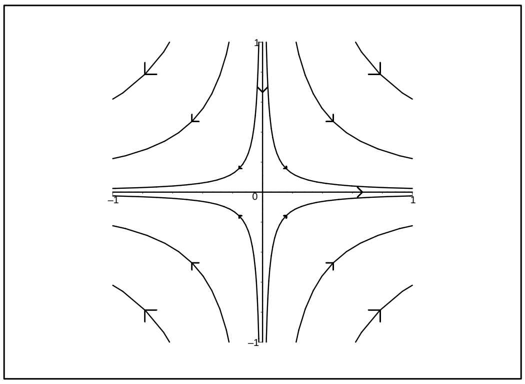
- Si $A' = \mu A$ avec $\mu \neq 0$, les matrices A et A' ont les mêmes trajectoires, avec la même orientation si $\mu > 0$, avec l'orientation opposée si $\mu < 0$.
- Si $A' = P^{-1}AP$, les trajectoires de A s'obtiennent en transportant au moyen de l'endomorphisme de matrice P les trajectoires de A', i.e. par un changement linéaire de coordonnées.

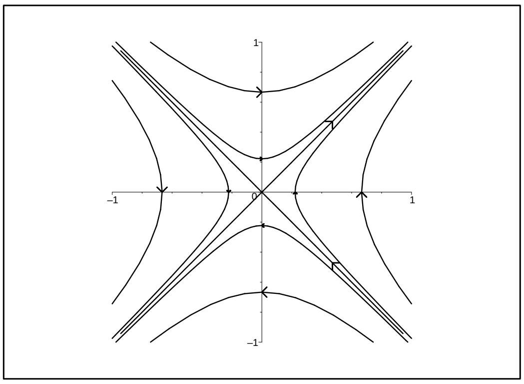
Exemple 9 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

A a pour valeurs propres 1 et -1, les droites propres sont les bissectrices des axes. Elles portent 5 trajectoires spéciales, l'origine et quatre demi-droites. En diagonalisant A, on trouve une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}AP = A'$. On reconnaît la matrice d'une similitude d'angle $\pi/2$ et de rapport $\sqrt{2}$.

Pour A', les deux axes, qui sont les droites propres, portent 5 trajectoires spéciales, l'origine et quatre demi-droites. Si (x_0, y_0) n'est pas sur un axe, alors $x(t) = x_0 e^t$ et $y(t) = y_0 e^{-t}$ ne changent pas de signe, et leur produit est constant. La trajectoire de (x_0, y_0) est donc une branche d'hyperbole, d'où la figure.

Les trajectoires non rectilignes de A sont les images de ces hyperboles par P.





Trajectoires de $A' = P^{-1}AP$ Trajectoires de A

Remarque 10 *La matrice A correspond à l'équation différentielle du second ordre $x'' - x = 0$, i.e. au mouvement d'un point le long d'une droite, dans le champ de potentiel $V(x) = -\frac{1}{2}x^2$.*

On voit que l'origine est un équilibre *instable*, puisque la plupart des trajectoires qui passent au voisinage s'en éloignent. Il y a pourtant deux trajectoires (rectilignes) qui convergent vers 0 en temps infini.

4.4.3 Catalogue

Définition 11 *Deux matrices A et A' sont dites* semblables *s'il existe une matrice inversible P telle que $A' = P^{-1}AP$.*

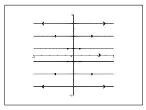
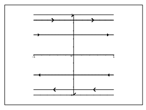
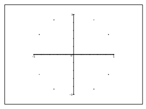
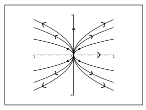
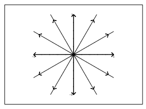
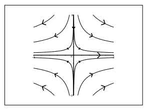
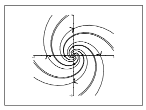
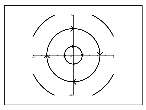
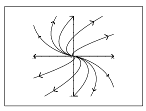
Proposition 12 *Toute matrice 2×2 est semblable*

- *ou bien, à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$;*
- *ou bien, à la matrice d'une similitude, i.e. de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$;*
- *ou bien à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.*

Pour avoir une idée de tous les dessins possibles, à changement linéaire de coordonnées près, il suffit de tracer les trajectoires des systèmes modèles fournis par la proposition 12.

Dans le cas diagonalisable sur **R**, les signes des valeurs propres (λ et $\mu > 0$ de même signe, de signe opposé, l'une vaut 0, les deux valent 0), et leur grandeur relative ($\lambda > \mu$, $\lambda = \mu$, $\lambda < \mu$) influencent le dessin. Dans le cas diagonalisable sur **C**, il faut distinguer suivant que les valeurs propres sont imaginaires ou non. Dans le cas non diagonalisable, le cas où la valeur propre est nulle doit être traité à part.

Cela conduit au catalogue suivant.

Famille	Critère	Nom	Modèle	Figure
Une valeur propre nulle	valeurs propres distinctes	(0_1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
	valeur propre double, non diagonalisable	(0_2)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
	valeur propre double, diagonalisable	(0_3)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	
Diagonalisable sur **R**	valeurs propres distinctes de même signe	noeud non dégénéré	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
	valeur propre double	soleil	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	
	valeurs propres de signes contraires	col	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	
Diagonalisable sur **C**	valeurs propres non imaginaires	foyer	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	
	valeurs propres imaginaires pures	centre	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	
Non diagonalisable	valeur propre double	noeud dégénéré	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

4.4.4 Tracé

Cols

Dans un col, les trajectoires non rectilignes ont pour asymptotes les droites propres.

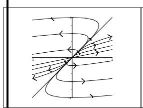
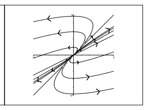
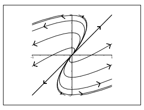
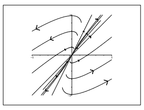
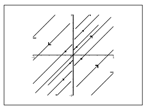
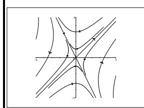
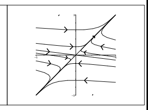
Noeuds non dégénérés
Dans un noeud non dégénéré, les trajectoires non rectilignes

- arrivent à l'origine tangentiellement à la droite propre correspondant à la valeur propre de plus petite valeur absolue ;
- ont pour direction asymptotique la droite propre correspondant à la valeur propre de plus grande valeur absolue.

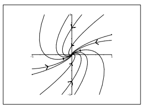
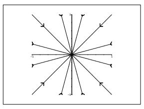
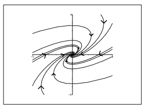
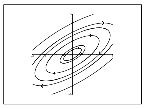
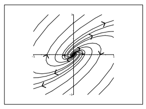
Foyers, centres et noeuds dégénérés
Combiner l'information donnée par les valeurs propres avec la méthode graphique.

Exemple 13 *Famille* $y'' + (a-1)y' - ay$.

On transforme l'équation en le système $\begin{cases} x' &= (1-a)x + ay \\ y' &= x \end{cases}$.

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
noeud non dégénéré	noeud dégénéré	noeud non dégénéré	(0_1)	col
 				 

Exemple 14 *Famille* $\begin{cases} x' &= -x + (2+2a)y \\ y' &= (-1-a)x + (1+2a)y \end{cases}$.

$a < -1$	$a = -1$	$-1 < a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
foyer attractif	soleil	foyer attractif	centre	foyer répulsif
				

Remarque 15 *Ces exemples sont assez représentatifs de ce qu'on s'attend à trouver dans une famille à un paramètre de systèmes :*

- *des intervalles où le système est un noeud non dégénéré, un col ou un foyer ;*
- *des valeurs exceptionnelles où le système est un centre, un noeud dégénéré ou un système de type* (0_1).
- *les autres types sont rares.*

4.5 Systèmes attractifs

Définition 16 *On dit qu'un système différentiel est* attractif *si toutes les solutions tendent vers 0 quand* t *tend vers* $+\infty$*. Il est* répulsif *si toutes les solutions tendent vers 0 quand* t *tend vers* $-\infty$*. Il est* stable *si toutes les solutions sont bornées lorsque* t *tend vers* $+\infty$.

Exercice 17 *Montrer qu'un système homogène de deux équations du premier ordre* $X' = AX$ *est attractif si et seulement si*

- *c'est un noeud non dégénéré, un foyer, un noeud dégénéré ou un soleil ;*
- *la trace trace(A) est strictement négative.*

Le système $X' = AX$ est répulsif si et seulement si

- *c'est un noeud non dégénéré, un foyer, un noeud dégénéré ou un soleil ;*
- *la trace trace(A) est strictement positive.*

Le système $X' = AX$ est stable si et seulement si c'est ou bien un centre, ou bien un système attractif, ou bien un système de type (0_1) dont la valeur propre est négative, ou bien une système de type (0_3).

4.6 Intégrales premières

Définition 18 *Une intégrale première, pour le système $X' = AX$, c'est une fonction continue $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ qui est constante le long des trajectoires.*

Exercice 19 *Montrer qu'un système homogène de deux équations du premier ordre $X' = AX$ possède une intégrale première non constante si et seulement si c'est un centre, un col ou un système de type (0).*

5 Résolution des systèmes homogènes

5.1 Cas où la matrice du système est diagonalisable

On a vu plus haut que si v est un vecteur propre de la matrice A pour la valeur propre λ, alors $t \mapsto e^{\lambda t}v$ est solution du système $X' = AX$. Lorsque A est diagonalisable, cela suffit pour trouver toutes les solutions.

Proposition 20 *Soit A une matrice diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une base de vecteurs propres complexes, relatifs à des valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Toute solution du système $X' = AX$ s'écrit*

$$t \mapsto X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j,$$

où $c_j \in \mathbf{C}$. Pour trouver la solution de condition initiale X_0, il suffit de résoudre le système linéaire $\sum_{j=1}^{n} c_j v_j = X_0$ où les inconnues sont les c_j.

Exemple 21 *Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 18 & -7 \end{pmatrix}$.*

On calcule $P_A(x) = x_2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, E_2 est la droite de vecteur directeur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, E_{-1} la droite de vecteur directeur $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme $t \mapsto X(t) = e_{2t}c_1v_1 + e_{-t}c_2v_2 = \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + c_2e_{-t} \\ 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-t} \end{pmatrix}$. La solution de condition initiale $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ s'obtient en résolvant le système $\begin{pmatrix} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 1 \end{pmatrix}$ dont la solution est $c_1 = 2$, $c_2 = -1$.

Exercice 22 *Notons $E(t)$ la matrice $n \times n$ telle que $X(t) = E(t)X_0$. De la formule*

$$e^{\lambda t} = \lim_{k\to\infty} (1 + \frac{1}{k}\lambda t)^k,$$

déduire que, lorsque A est diagonalisable,

$$E(t) = \lim_{k\to\infty} (I + \frac{1}{k}tA)^k$$

5.2 Cas où la matrice du système possède une valeur propre de multiplicité n

L'exercice 22 suggère de calculer $(I + \frac{1}{k}tA)^k$ et de passer à la limite lorsque k tend vers l'infini. Si $P_A(x) = (x - \lambda)^n$, on pose $A = \lambda I + B$. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned}(I + \frac{1}{k}tA)^k &= ((1 + \frac{1}{k}\lambda t)I + \frac{1}{k}tB)^k \\ &= (1 + \frac{1}{k}\lambda t)^k I + k(1 + \frac{1}{k}\lambda t)^{k-1}\frac{t}{k}B + \cdots + \binom{k}{p}(1 + \frac{1}{k}\lambda t)^{k-p}(\frac{t}{k}B)^p + \cdots\end{aligned}$$

où au plus n termes sont non nuls. Le p-ème terme s'écrit

$$\frac{k(k-1)\cdots(k-p+1)}{p!k^p}\frac{(1 + \frac{1}{k}\lambda t)^k}{(1 + \frac{1}{k}\lambda t)^p}(tB)^p$$

qui tend vers $e^{\lambda t}\frac{1}{p!}(tB)^p$.

Proposition 23 *Soit A une matrice $n \times n$ dont le polynôme caractéristique est de la forme $P_A(x) = (x - \lambda)^n$. Soit $X_0 \in \mathbf{R}^n$. La solution du système $X' = AX$ telle que $X(0) = X_0$ est donnée par la formule*

$$X(t) = e^{\lambda t}(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{1}{p!}(tB)^p)X_0,$$

où $B = A - \lambda I$.

Exemple 24 *Résolution de l'équation différentielle du second ordre $y'' - 2y' + y = 0$.*

Elle équivaut au système $X' = AX$ où $X = \begin{pmatrix} y' \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $P_A(x) = (x-1)^2$, on pose $B = A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = 0$. On calcule

$$E(t) = e^t(I + tB) = e^t\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}.$$

La solution du système $X' = AX$ telle que $X(0) = X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ est donnée par

$$X(t) = E(t)X_0 = e^t\begin{pmatrix} (1+t)x_0 - ty_0 \\ -tx_0 + (1-t)y_0 \end{pmatrix}.$$

5.3 Comportement asymptotique des solutions

On se demande si un système linéaire $X'AX$ est attractif, répulsif, stable. L'expression des solutions permet aussi de répondre à la question.

Exercice 25 *On suppose la matrice A diagonalisable sur $\mathbf{C}$. Montrer que le système $X' = AX$ est attractif (resp. répulsif) si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle strictement négative (resp. positive). Montrer que le système est stable si et seulement si toutes les valeurs propres ont une partie réelle négative ou nulle.*

On suppose que A possède une valeur propre λ de multiplicité n. Montrer que le système $X' = AX$ est attractif (resp. répulsif) si et seulement si $\lambda < 0$ (resp. $\lambda > 0$).

Exemple 26 *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il y a une valeur propre double $\lambda = 0$. Pourtant, le système $X' = AX$ n'est pas stable.*

6 Systèmes non homogènes

Sachant résoudre les systèmes homogènes $X' = AX$, il suffit, pour résoudre un système avec second membre $X' = AX + B$, d'en trouver une solution particulière.

6.1 Principe de superposition

Proposition 27 *Si le second membre d'un système s'écrit $B = B_1 + B_2$, on obtient une solution de $X' = AX + B$ en ajoutant une solution de $X' = AX + B_1$ et une solution de $X' = AX + B_2$.*

6.2 Variation de la constante

On rappelle la méthode de la variation de la constante dans le cas particulier des équations à coefficients constants.

Recette. Soit $a \in \mathbf{R}$, soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, soit $b : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Pour trouver une solution de l'équation $x' = ax + b$, la chercher sous la forme $x(t) = y(t)e^{at}$, où y est une fonction dérivable sur I.

Justification. $x = ye^{at}$ est solution de $x' = ax + b$ si et seulement si $y'(t) = e^{-at}b(t)$. Par conséquent, les solutions de l'équation avec second membre sont de la forme

$$x(t) = e^{at}(x_0 + \int_0^t e^{-as}b(s)\,ds).$$

Exercice 28 *Résoudre l'équation $x' = ax + \cos t$.*

On résoud d'abord $x_1' = ax_1 + e^{it}$. On cherche x_1 sous la forme $e^{at}y$, ce qui conduit à $y' = e^{(-a+i)t}$, puis à $y(t) = \frac{1}{-a+i}e^{(-a+i)t}$, puis à $x_1(t) = \frac{1}{-a+i}e^{it}$.

On remarque que $x_2 = \overline{x_1}$ satisfait $x_2' = ax_2 + e^{-it}$, donc $x = \Re e(x_1) = \frac{-a\cos t + \sin t}{a^2+1}$ est solution de $x' = ax + \cos t$.

Exercice 29 *Résoudre l'équation $x' = ax + e^{at}$.*

Posant $x = e^{at}y$, on trouve $y' = 1$ d'où la solution particulière $x(t) = te^{at}$.

6.3 Exponentielles-polynômes

Définition 30 *Une fonction $B : \mathbf{R} \to \mathbf{C}^n$ est une* exponentielle-polynôme *si c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $t^d e^{\omega t}v$ où $d \in \mathbf{N}$, $\omega \in \mathbf{C}$ et $v \in \mathbf{C}^n$.*

Exemple 31 $\begin{pmatrix} 1 \\ t\cos t \end{pmatrix}$ *est une exponentielle-polynôme.*

Recette. Soit $w \in \mathbf{C}^n$. Si ω n'est pas valeur propre de A, alors le système $X' = AX + t^d e^{\omega t}w$ admet une unique solution de la forme

$$t \mapsto X(t) = \sum_{k=0}^{d} t^k e^{\omega t} w_k,$$

où les w_k sont des vecteurs de $\mathbf{C}^n$.

Si ω est valeur propre de A, il faut chercher une solution avec des termes supplémentaires $t^{d+1}e^{\omega t}w_{d+1}$, etc...

Justification. Par récurrence sur d. Soit v un vecteur inconnu. Alors $Y(t) = t^d e^{\omega t}v$ satisfait $Y'(t) - AY(t) = t^d e^{\omega t}(\omega v - Av) + dt^{d-1}e^{\omega t}v$. Si ω n'est pas valeur propre de A, il existe un unique v tel que $\omega v - Av = w$. Par récurrence, il existe des vecteurs $w_0, \ldots, w_{d-1}$ tels que $Z(t) = \sum_{k=0}^{d-1} t^k e^{\omega t} w_k$ satisfasse $Z' - AZ = dt^{d-1}e^{\omega t}v$. Alors $X = Y + Z$ convient.

Si A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$, soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une base de vecteurs propres. Soient $(z_1, \cdots, z_n)$ les composantes du vecteur w dans cette base. Le système $X' = AX + t^d e^{\omega t} w$ est équivalent à $x_j'(t) = \lambda_j x_j(t) + t^d e^{\omega t} z_j$. Si ω est valeur propre de A, $\omega = \lambda_j$, alors la méthode de la variation de la constante donne $y_j'(t) = t^d e^{\omega t} z_j$, d'où $x_j(t) = \frac{1}{d+1} t^{d+1} e^{\omega t} z_j$.

Exercice 32 *Trouver une solution particulière de l'équation $x'' - x = e^t$.*

Cette équation est équivalente au système $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x + e^t \end{cases}$. Comme 1 est valeur propre de la matrice du système, il faut chercher une solution vectorielle sous la forme $t \mapsto X(t) = e^t(v_0 + v_1 t)$. Par conséquent, il faut chercher x sous la forme $x(t) = e^t(x_0 + tx_1)$. Cela donne $x_1 = \frac{1}{2}$.

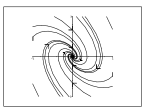
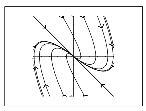
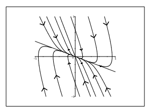
7 L'oscillateur harmonique

Il s'agit de l'équation $ax'' + bx' + cx = f(t)$, où a, b et c sont strictement positifs.

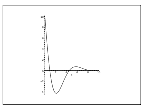
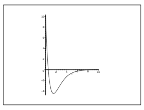
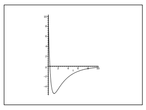
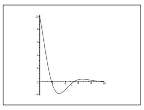
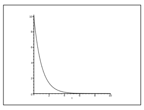
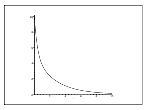
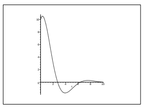
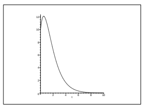
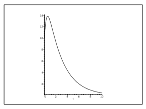
7.1 Equation homogène

Elle est équivalente au système $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a}y \end{cases}$, dont le polynôme caractéristique est $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$.

- **Amortissement fort.** $b^2 - 4ac > 0$. Le système est un noeud non dégénéré. La droite propre correspondant à la valeur propre de plus grande valeur absolue sépare le plan des positions et vitesses en deux régions, qui correspondent à 2 comportements asymptotiques de la fonction $t \mapsto x(t)$ sur $\mathbf{R}_+$: pour t grand, elle croît, resp. elle décroît vers 0.
- **Amortissement faible.** $b^2 - 4ac < 0$. Le système est un foyer. Toutes les solutions oscillent indéfiniment en convergeant vers 0.
- **Amortissement critique.** $b^2 - 4ac = 0$. Le système est un noeud dégénéré.

$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
amortissement faible	amortissement critique	amortissement fort
foyer	noeud dégénéré	noeud non dégénéré
		

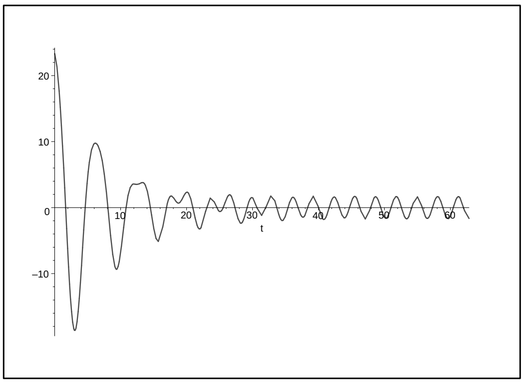
Comportement des solutions comme fonctions du temps
Ci-dessous, dans chaque régime, 3 solutions typiques.

$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac > 0$
amortissement faible	amortissement critique	amortissement fort
		
		
		

7.2 Avec second membre sinusoïdal : oscillations forcées

On étudie $ax'' + bx' + cx = Ae^{i(\omega t+\phi)}$ dans la situation de l'amortissement faible, b petit devant a et c. Les valeurs propres de la matrice du système sont proches de $\pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$.

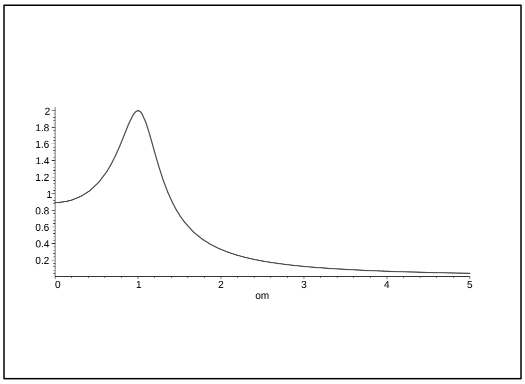
La solution particulière en $e^{i\omega t}$ représente le *régime permanent*, celui qui est atteint (approximativement) après quelque temps.

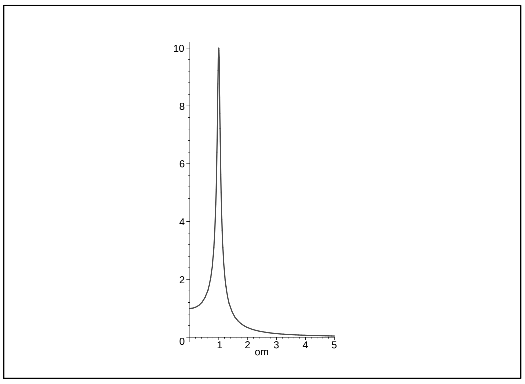


Son amplitude complexe vaut $\frac{Ae^{i\phi}}{-a\omega^2+ib\omega+c}$, son amplitude réelle

$$\frac{A}{\sqrt{(c-a\omega^2)^2+b^2}} \sim \frac{A}{|c-a\omega^2|}$$

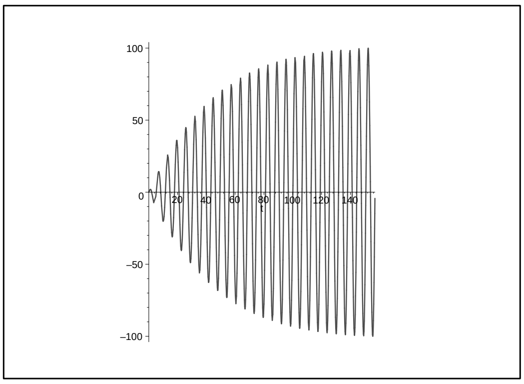
devient très grande lorsque la fréquence ω est proche de la *fréquence propre* $\sqrt{\frac{c}{a}}$, c'est le phénomène de la *résonance*.





Amplitude du régime permanent, $b = \frac{a}{2c}$ Amplitude du régime permanent, $b = \frac{a}{10c}$

Au voisinage de la résonance, le régime permanent est long à atteindre. Durant le régime transitoire (avant saturation), l'amplitude croît linéairement, comme les solutions mathématiques de l'équation dans le cas (non physique) où $i\omega$ est égale à une valeur propre.



Régime transitoire, $b = 0.01$, $\omega = 0.99$.