INTEGRALES DE SURFACES

P. Pansu

November 1, 2004

1 Surfaces paramétrées

Définition 1 *Une* surface paramétrée *dans l'espace, cela consiste à se donner trois fonctions définies sur un domaine D du plan,*

$$(u,v)\mapsto s(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{pmatrix}.$$

On supposera toujours que les fonctions $(u,v)\mapsto x(u,v)$, $(u,v)\mapsto y(u,v)$ et $(u,v)\mapsto z(u,v)$ admettent des dérivées partielles continues.

Définition 2 *Plan tangent. Lorsque les vecteurs*

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\end{pmatrix} \qquad et \qquad \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants, le plan qu'ils engendrent est le plan tangent *à la surface au point $s(u,v)$. En effet, ce plan contient le vecteur vitesse de toute courbe tracée sur la surface et passant par ce point.*
Leur produit vectoriel

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial s}{\partial v}(u,v)$$

est un vecteur normal à la surface au point $s(u,v)$. Il est orthogonal au vecteur vitesse de toute courbe tracée sur la surface et passant par ce point.
Le vecteur unitaire

$$\nu(u,v)=\frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial s}{\partial v}(u,v)}{|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial s}{\partial v}(u,v)|}$$

s'appelle la normale orientée *au point $s(u,v)$.*

Exercice 3 *On utilise les coordonnées latitude-longitude sur la sphère unité.*

$$s(\theta,\phi)=\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\\ \cos\theta\sin\phi\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \quad \theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \phi\in[-\pi,\pi].$$

Quel est le vecteur unitaire normal déterminé par la paramétrisation ?

Solution. On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial s}{\partial\phi}=\begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\phi\\ -\sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} -\cos\theta\sin\phi\\ \cos\theta\cos\phi\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\phi\\ -\cos^2\theta\sin\phi\\ -\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}=-\cos\theta s(\theta,\phi).$$

Comme $\cos\theta>0$, $\nu(\theta,\phi)=-s(\theta,\phi)$ est la normale rentrant dans la boule.

2 Aire

2.1 Rappel de géométrie euclidienne

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $w = (x, y, z)$ et $w' = (x', y', z')$ est $w \cdot w' = xx' + yy' + zz'$. Il est nul si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux. Il satisfait $w \cdot w' + w'' = w \cdot w' + w \cdot w''$ et $w \cdot w = |w|^2$.

Le *produit vectoriel* de deux vecteurs $w = (x, y, z)$ et $w' = (x', y', z')$ est $w \wedge w' = (yz' - y'z, -xz' + x'z, xy' - x'y)$. Il est nul si et seulement si les vecteurs sont colinéaires. Il satisfait $w \wedge (w' + w'') = w \wedge w' + w \wedge w''$ et $w \wedge w' = -w' \wedge w$. Si w et w' sont orthogonaux, alors $|w \wedge w'| = |w||w'|$.

2.2 Aire des parallélogrammes

L'aire d'un parallélogramme est le produit de la base par la hauteur. En voici une expression vectorielle. Si les sommets du parallélogramme sont 0, a, b et $a + b$, alors

$$\text{aire} = |a \wedge b|.$$

En effet, soit c la projection de b sur la droite engendrée par a, i.e. c est colinéaire à a et $b - c$ est orthogonal à a. Alors $|a \wedge b| = |a \wedge (b - c)| = |a||b - c| = \text{base}\times\text{hauteur}$.

2.3 Heuristique

Si $(u, v) \mapsto s(u, v)$ est une surface paramétrée, l'image d'un rectangle de sommets (u, v) et dont les côtés δu et δv sont très petits est approximativement un parallélogramme construit sur les vecteurs $\frac{\partial s}{\partial u}(u, v)\delta u$ et $\frac{\partial s}{\partial v}(u, v)\delta v$, donc son aire est voisine de

$$|\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v)|\, \delta u\, \delta v.$$

Cela motive la définition suivante.

Définition 4 *L'*aire *d'une surface paramétrée est donnée par l'intégrale double*

$$\text{aire} = \int_D |\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v)|\, du\, dv.$$

Exercice 5 *Calculer l'aire du triangle de sommets* $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, -1, 2)$ *et* $c = (0, 2, 1)$.

Solution. On utilise la paramétrisation $s(u, v) = a + u(b - a) + v(c - a)$ où $u \geq 0$, $v \geq 0$, $u + v \leq 1$. On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u, v) = (b - a) \wedge (c - a) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Sa norme est constante est vaut $\sqrt{35}$. On l'intègre sur un triangle d'aire $\frac{1}{2}$, donc l'aire cherchée vaut $\sqrt{35}/2$.

Exercice 6 *Calculer l'aire de la sphère de centre* 0 *et de rayon* R, *en utilisant les coordonnées latitude-longitude*

$$s(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\phi \\ R\cos\theta\sin\phi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad \phi \in [-\pi, \pi].$$

Solution. On calcule

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi} = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\phi \\ -R\sin\theta\sin\phi \\ R\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\cos\theta\sin\phi \\ R\cos\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R^2\cos^2\theta\cos\phi \\ -R^2\cos^2\theta\sin\phi \\ -R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

dont la norme vaut $R^2\cos\theta$. Par conséquent

$$\text{aire} = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\theta\, d\theta = 4\pi R^2.$$

2.4 Invariance

Théorème 1 *L'aire ne dépend pas du choix de paramétrage.*

Preuve. Changer de paramétrage, c'est remplacer (u,v) par (u',v') qui sont fonction inversible de u et v. D'après la formule de dérivation des fonctions composées, le nouveau paramétrage $s_1(u',v') = s(u,v)$ satisfait

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}, \quad \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}.$$

Il vient

$$\frac{\partial s_1}{\partial u'} \wedge \frac{\partial s_1}{\partial v'} = \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} - \frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial u'}\right)$$

et on conclut avec la formule de changement de variable dans les intégrales doubles.■

3 Flux

3.1 Motivation

Etant donné un fluide en mouvement dans l'espace, sa vitesse est un champ de vecteurs w. La quantité de matière qui, pendant une unité de temps, traverse un morceau de surface S, est proportionnelle à la densité volumique, à l'aire de S, à l'intensité de la vitesse, mais dépend aussi de la direction de la vitesse : elle est proportionnelle à la projection de la vitesse sur la normale à S. Il faut préciser si on s'intéresse au flux sortant ou rentrant, d'où la nécessité d'orienter S.

3.2 Orientation

Définition 7 Orienter *une surface, c'est choisir en chaque point l'un des deux vecteurs unitaires orthogonaux au plan tangent, de façon continue.*

Une paramétrisation d'une surface détermine une orientation, donnée par

$$\nu = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}}{|\frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}|}.$$

3.3 Définition

Définition 8 *Soit $(x,y,z) \mapsto w(x,y,z)$ un champ de vecteurs sur $\mathbf{R}^3$. Soit S une surface orientée par un choix de normale unitaire ν. Le* flux *de w à travers S est l'intégrale*

$$\text{flux}(w,S) = \int_D w \cdot \nu\, dA$$

où dA désigne l'élément d'aire.

Remarque 9 *Soit $(u,v) \mapsto s(u,v)$, $(u,v) \in D$, une paramétrisation de la surface compatible avec l'orientation choisie. Le flux du champ w à travers la surface S est donné par l'intégrale double*

$$\mathrm{flux} = \int_D w(s(u,v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\, du\, dv.$$

Exercice 10 *Calculer le flux du champ de vecteurs $w(x,y,z) = (x,y,0)$ à travers la sphère unité orientée par la normale rentrante.*

Solution. Comme les coordonnées latitude-longitude déterminent la normale rentrante,

$$\begin{aligned} w(s(\theta,\phi)) \cdot (\frac{\partial s}{\partial \theta}(\theta,\phi) \wedge \frac{\partial s}{\partial \phi}(\theta,\phi)) &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\phi \\ -\cos^2\theta\sin\phi \\ -\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= -\cos^3\theta, \end{aligned}$$

et on intègre

$$\begin{aligned} \mathrm{flux}(w,S) &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\theta\, d\theta\, d\phi \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(3\theta))\, d\theta \\ &= 2\pi[\frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{12}\sin(3\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

Le signe moins provient du fait que la normale rentrante fait un angle obtus avec w.

3.4 Invariance

Théorème 2 *Le flux ne dépend pas du choix du paramétrage de la surface, seulement de son orientation. Changer d'orientation change le signe du flux.*

Preuve. Cela résulte de la définition en fonction de la normale et de l'élément d'aire. On peut aussi le prouver directement. Voir la preuve de l'invariance de l'aire, à ceci près que le signe a maintenant de l'importance. Changer de paramétrage sans changer l'orientation, c'est remplacer (u,v) par (u',v') qui sont fonction inversible de u et v sans changer la normale orientée. C'est le cas si et seulement si le déterminant jacobien est positif. Comme c'est la valeur absolue du jacobien qui intervient dans la formule de changement de variables, tout va bien. Si le déterminant jacobien est négatif (changement d'orientation), il est égal à l'opposé de sa valeur absolue, d'où un changement de signe pour le flux.$\blacksquare$

3.5 Angle solide

Définition 11 *On appelle* angle solide *d'une surface vue d'un point p le flux à travers cette surface du champ de vecteurs w_p défini en tout point $q \neq p$ par*

$$w_p(q) = \frac{q-p}{|q-p|^3}.$$

3.6 Remarque

Remarque 12 *Ce champ radial est proportionnel au champ électrique d'une charge ponctuelle placée en* p*.*

Exercice 13 *Toute sphère centrée en* p *a vu de* p *un angle solide égal à* 4π*.*

Solution. Le long de la sphère de rayon R centrée en p, $w_p \cdot \nu = R^{-2}$. Or l'aire de la sphère est $4\pi R^2$.■

4 Lien entre intégrale de surface et intégrale triple

Définition 14 *Soit* w *un champ de vecteurs défini sur un domaine* D *de* $\mathbf{R}^3$ *et possédant des dérivées partielles continues. Sa* divergence *est la fonction*

$$div(w) = \nabla \cdot w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Exercice 15 *Vérifier qu'un champ de vecteurs constant a une divergence nulle. Pour un champ de vecteurs linéaire* $w(p) = Ap$*, la divergence est constante et égale à la trace de la matrice* A*,* $\mathrm{trace}(A) = \sum a_{ii}$*.*

4.1 Formule d'Ostrogradsky

Théorème 3 *Soit* S *une surface fermée qui délimite un domaine* U *de* $\mathbf{R}^3$*. Soit* w *un champ de vecteurs défini sur* U*, qui possèdent des dérivées partielles continues. On paramètre* S *de sorte que le vecteur normal* $\frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$ *pointe vers l'extérieur de* U*. Alors*

$$\iiint_U div(w)\, dx\, dy\, dz = \mathrm{flux}(w, S).$$

Preuve. Pour simplifier, on suppose U convexe. Soit D_x sa projection orthogonale sur le plan $\{x = 0\}$. Alors

$$U = \{(y, z) \in D_x \ ;\ f_2(y, z) \leq x \leq f_1(y, z)\}.$$

On calcule

$$\iiint_U \frac{\partial w_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{D_x} (w_x(f_2(y, z), y, z) - w_x(f_1(y, z), y, z))\, dy\, dz = \mathrm{flux}(w_1, S)$$

où w_1 désigne le champ de vecteurs de composantes $(w_x, 0, 0)$. De même,

$$\iiint_U \frac{\partial w_y}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \mathrm{flux}(w_2, S)$$

où $w_2 = (0, w_y, 0)$ et

$$\iiint_U \frac{\partial w_z}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \mathrm{flux}(w_3, S).$$

Comme $w = w_1 + w_2 + w_3$, on trouve la formule annoncée.■

Corollaire 16 *Soit* w *un champ de vecteurs défini sur un convexe* D *de* $\mathbf{R}^3$*, qui possède des dérivée partielles continues. Supposons que* w *a une divergence nulle. Alors le flux de* w *à travers toute surface fermée contenue dans* D *est nul.*

Exercice 17 *Utiliser le champ de vecteurs* $w(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ *de l'exercice 10 pour calculer le volume de la boule unité* B.

Solution. On calcule $div(w) = 2$. On oriente la sphère unité S par la normale sortante. La formule d'Ostrogradsky donne

$$\begin{aligned} 2vol(B) &= \iiint_B div(w)\,dx\,dy\,dz \\ &= Flux(w,S) \\ &= \frac{8\pi}{3}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le résultat de l'exercice 10, en tenant compte du changement d'orientation.

Exercice 18 *Soit* w_p *le champ de vecteurs radial qui sert à définir l'angle solide vu de* p. *Vérifier que sa divergence est nulle (en dehors de* p*). En déduire que son flux à travers le bord d'un domaine est nul ou vaut* 4π *suivant que la boule contient ou non le point* p.

Solution. Le calcul de la divergence est immédiat. Soit U un domaine de $\mathbf{R}^3$. Si U ne contient pas p, le théorème d'Ostrogradski s'applique, et le flux de w_p à travers le bord de U est nul. Sinon, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(p,r)$ soit entièrement contenue dans U. Soit $U' = U$ privé de cette boule. Alors le théorème d'Ostrogradsky s'applique dans U' : le flux de w_p à travers le bord de U' est nul. Le bord de U' est constitué du bord de U et du bord de la boule $B(p,r)$ muni de la normale pointant vers le point p. Par conséquent

$$\text{flux}(w, \partial U) = \text{flux}(w, \partial B(p,r))$$

qui vaut 4π.■

4.2 Fluides incompressibles

Considérons un fluide en mouvement dans l'espace. Soit w son champ des vitesses et ρ sa densité volumique. Le bilan de matière entrant et sortant d'un domaine D est égal au flux du champ de vecteurs ρw à travers le bord ∂D. D'après la formule d'Ostrogradsky, le bilan de matière entrant et sortant d'un domaine D infiniment petit est donné par la divergence de ρw. Si le fluide est incompressible, le bilan doit être nul. Par conséquent, la condition $div(\rho w) = 0$ caractérise l'incompressibilité.

5 Lien entre intégrale curviligne et intégrale de surface

On ne donnera pas de définition rigoureuse d'une surface à bord. Les exemples types sont

- un demi-plan ;
- une hémisphère ;
- une portion de cylindre (partie courbe du bord d'une boîte de conserve).

On indique seulement la convention qui fait qu'une orientation de la surface détermine une orientation de son bord.

Définition 19 *Soit* S *une surface orientée dont le bord est noté* ∂S. *Le paramétrage du bord doit être choisi de sorte que lorsqu'un observateur marche sur* S *(i.e. la normale orientée va de ses pieds à sa tête) le long de* ∂S, *la surface* S *se trouve sur sa gauche.*

Exercice 20 *Soit K la boîte de conserve définie par les inégalités $x^2 + y^2 \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$. Soit S la partie cylindrique du bord de K. On l'oriente par la normale pointant vers l'extérieur de K. Vérifier que l'orientation induite sur la partie du bord de S contenue dans le plan $\{z = 0\}$ est le sens trigonométrique.*

Solution. Au point $p = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, la normale sortant de K est p. L'observateur qui marche dans le sens trigonométrique, i.e. des θ croissants, a son bras gauche dirigé comme le vecteur $(0, 0, 1)$, qui pointe bien vers S.$\blacksquare$

Théorème 4 (Formule de Stokes). *Soit S une surface orientée dont le bord est noté ∂S. Soit w un champ de vecteurs défini sur un voisinage de S, possédant des dérivées partielles continues. Alors*

$$\mathrm{flux}(rot(w), S) = \mathrm{circulation}(w, \partial S).$$

Preuve. (dans le cas particulier où S est l'image d'une application s définie sur un domaine D du plan (le cas général s'y ramène en découpant la surface). On se ramène à la formule de Green-Riemann. On pose

$$P(u, v) = w(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial u}(u, v) \quad \text{et} \quad Q(u, v) = w(s(u, v)) \cdot \frac{\partial s}{\partial v}(u, v).$$

Alors

$$\mathrm{circulation}(w, s \circ c) = \int_c P\,du + Q\,dv.$$

On vérifie par le calcul (en utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée) que

$$\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial Q}{\partial u} = rot(w) \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \wedge \frac{\partial s}{\partial v}$$

et on applique la formule de Green-Riemann à la forme $P\,du + Q\,dv$ dans le domaine D.$\blacksquare$

Corollaire 21 *Soit S une surface sans bord (e.g. la sphère). Soit w un champ de vecteurs défini au voisinage de S, possédant des dérivées partielles continues. Alors le flux de $rot(w)$ à travers S est nul.*

Corollaire 22 *Soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine U de $\mathbf{R}^3$ et possédant des dérivées partielles continues. On suppose que son rotationnel est nul. Soit c une courbe fermée qui borde une surface contenue dans U. Alors la circulation de w le long de c est nulle.*

Exercice 23 *On considère le champ de vecteurs w défini en dehors de l'axe $0z$ par*

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c'est le champ magnétique induit par un fil rectiligne infini). Vérifier que $rot(w) = 0$ en dehors de l'axe Oz. En déduire que la circulation de w le long de toute courbe fermée ne rencontrant pas l'axe Oz est égale à 2π fois le nombre de tours que la courbe fait autour de l'axe Oz.

Solution. Le calcul de $rot(w)$ est immédiat.

Soit $t \mapsto c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ une courbe fermée ne rencontrant pas l'axe 0z. Alors sa projection orthogonale $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ sur le plan $\{z = 0\}$ est une courbe fermée ne passant pas par l'origine. La surface paramétrée

$$(s, t) \mapsto (x(t), y(t), sz(t))$$

(portion de cylindre) a son bord formé des deux courbes c et σ parcourue en sens inverse. Comme cette surface est contenue dans un domaine où $rot(w) = 0$, la circulation de w le long du bord est nulle. Par conséquent,

$$circulation(w, c) = circulation(w, \sigma).$$

Ensuite, on remarque que w est tangent au plan $\{z = 0\}$. La circulation de w le long d'une courbe de ce plan coïncide avec l'intégrale curviligne de la forme $d\theta$. Par conséquent, $circulation(w, \sigma)$ est la variation totale de l'angle polaire le long de σ, qui vaut 2π fois le nombre de tours que σ fait autour de l'origine. Ce nombre coïncide avec le nombre de tours que c fait autour de l'axe Oz.■

Remarque 24 *Courant et champ magnétique.*

En présence de courants, le champ magnétique a un rotationnel non nul. Son rotationnel est, à une constante physique près (perméabilité du milieu), la densité de courant. Intégrée sur une surface S, la densité de courant donne le courant électrique (i.e. la quantité de charge par unité de temps) qui traverse la surface. La formule de Stokes relie donc le courant à la circulation du champ magnétique le long du bord de S.

6 Opérateurs différentiels

Proposition 25 *On a introduit 3 opérateurs différentiels,*

$$\text{fonctions} \xrightarrow{gradient} \begin{array}{c}\text{champs de}\\ \text{vecteurs}\end{array} \xrightarrow{rotationnel} \begin{array}{c}\text{champs de}\\ \text{vecteurs}\end{array} \xrightarrow{divergence} \text{fonctions}$$

Chaque fois qu'on compose deux opérateurs consécutifs, on trouve 0. Autrement dit

$$rot \circ grad = 0, \quad div \circ rot = 0.$$

Preuve.

$$(rot \circ grad)V = \nabla \wedge \nabla V = 0, \quad (div \circ rot)w = \nabla \cdot (\nabla \wedge w) = det(\nabla, \nabla, w) = 0.$$■

6.1 Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Théorème 5 *Le rotationnel d'un gradient est automatiquement nul. Inversement, soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine convexe U de $\mathbf{R}^3$, qui possède des dérivée partielles continues. Supposons que w a une divergence nulle. Alors il existe une fonction V définie sur U telle que $w = -\nabla V$.*

6.2 Condition pour être un rotationnel

Théorème 6 *La divergence d'un rotationnel est automatiquement nulle. Inversement, soit w un champ de vecteurs défini sur un domaine convexe U de $\mathbf{R}^3$, qui possède des dérivée partielles continues. Supposons que w a une divergence nulle. Alors il existe un champ de vecteurs w' défini sur U tel que $rot(w') = w$.*

6.3 Laplacien

Définition 26 *L'opérateur* Laplacien *prend une fonction à valeurs réelles et retourne une fonction à valeurs réelles. Il est donné par la formule*

$$\Delta = div \circ grad = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Corollaire 27 *Soit u une fonction sur un domaine D qui possède des dérivées secondes continues. Alors*

$$\int_D \Delta u \, dx \, dy \, dz = \mathrm{flux}(\nabla u, \partial D).$$

Exercice 28 *Soit u le potentiel électrostatique induit par une distribution de charges contenue dans un corps K. Montrer que le flux du champ électrique à travers le bord d'un domaine qui contient K ne dépend pas de ce domaine (théorème de Gauss).*

Solution. Le champ électrique est $E = -\nabla V$ où V est le potentiel électrique. D'après la loi de Poisson, à une constante physique près (constante diélectrique du milieu), $\Delta V = -div(E)$ est la densité de charge, nulle en dehors de K par hypothèse. Soit U un domaine de $\mathbf{R}^3$ contenant K. On applique le corollaire à $U' = U$ privé de K. On trouve que le flux du champ électrique E à travers le bord de U' est nul, donc que le flux de E à travers le bord de $> U$ est égal au flux à travers le bord de K, qui ne dépend pas du choix de U.■