INTEGRALE CURVILIGNE

P. Pansu

November 1, 2004

1 Motivation

Lorsqu'on déplace un point matériel dans un champ de force, le travail mécanique fournit par le champ de force est donné par une intégrale curviligne le long de la trajectoire.

2 Objectif

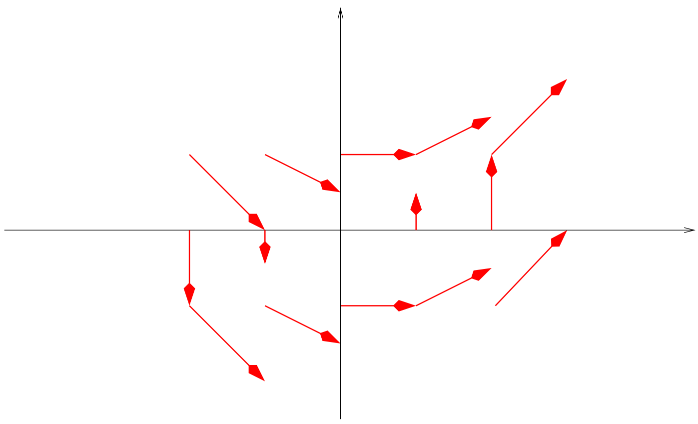
La formule de Green-Riemann qui relie intégrale curviligne et intégrale double.

3 Circulation

3.1 Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs dans le plan ou l'espace consiste à se donner en chaque point (x, y) (resp. (x, y, z)) un vecteur $w(x, y)$ (resp. $w(x, y, z)$).

Exemple. Représentation graphique du champ de vecteurs $w(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x/2 \end{pmatrix}$. Il suffit de représenter le vecteur $w(x, y)$ en quelques points, comme les points dont les coordonnées sont de petits entiers.



Exemple. Gradient. On rappelle que le gradient d'une fonction de deux variables u est le vecteur dont les composantes en coordonnées cartésiennes orthonormées sont les dérivées partielles,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

et idem en dimension 3. Dans la suite, on se place en dimension 2, mais les définitions et résultats du présent paragraphe 3 restent valables dans $\mathbf{R}^3$.

3.2 Définition

Définition 1 *Soit $t \mapsto c(t) = (x(t)), y(t))$, $t \in I$ une courbe paramétrée dont le vecteur vitesse $c'(t)$ est continu. Soit $(x, y) \mapsto w(x, y)$ un champ de vecteurs continu. La* circulation *de w le long de la courbe c est*

$$\text{circulation} = \int_I w(c(t)) \cdot c'(t)\, dt.$$

Exemple. Posons $w(x, y) = (y, 0)$. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Son graphe $t \mapsto (t, f(t))$, $t \in I$ est une courbe paramétrée, et la circulation du champ w le long de cette courbe vaut $\displaystyle\int_I f(t)\, dt$.

Théorème 1 *La circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe ne dépend pas du paramétrage choisi sur la courbe.*

Preuve.
On remplace le paramètre t par $\tau = \phi(t)$, et on note $c_1(\tau) = c(t)$. Le vecteur vitesse est changé en $v_1(\tau) = v(t)/\phi'(t)$. Alors

$$\begin{aligned}
\text{circulation}_1 &= \int_J w(c_1(\tau)) \cdot v_1(\tau)\, d\tau \\
&= \int_I w(c_1(\phi(t))) \cdot v_1(\phi(t))\phi'(t)\, dt \\
&= \int_I w(c(t)) \cdot v(t)\, dt \\
&= \text{circulation.} \blacksquare
\end{aligned}$$

Corollaire 2 *Soit c une courbe paramétrée par son abscisse curviligne s. Soit $u(s)$ le vecteur unitaire tangent à c. Alors la circulation d'un champ de vecteurs w le long de c s'écrit $\int w \cdot u(c(s))\, ds$. On peut donc écrire*

$$\mathit{circulation}(w, c) = \int_c w \cdot u\, ds.$$

3.3 Cas des champs de vecteurs dérivant d'un potentiel

Théorème 2 *Soit u une fonction, et $t \mapsto c(t)$, $t \in I$, une courbe paramétrée. Pour tous t_0 et $t_1 \in I$,*

$$\text{circulation}(\nabla u, c[t_0, t_1]) = u(c(t_1)) - u(c(t_0)).$$

Autrement dit, la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel ne dépend que de l'état initial et de l'état final, et non du chemin choisi. Lorsqu'un point matériel se déplace dans un potentiel, le travail fourni par la force est égale à la variation de l'énergie potentiel entre l'état final et l'état initial.

4 Formes différentielles de degré 1

4.1 Définition

Une forme différentielle de degré 1 en deux variable est une expression de la forme $\alpha = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$.

Exemple. Différentielle totale d'une fonction V : on note $dV = \dfrac{\partial V}{\partial x} dx + \dfrac{\partial V}{\partial y} dy$.

Exemple. $\alpha = y\, dx$ n'est pas la différentielle totale d'une fonction (voir plus loin).

Définition 3 *L'intégrale curviligne d'une forme différentielle* $\alpha = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *le long d'une courbe* c *est*

$$\int_c \alpha = \int_I (P(c(t))x'(t) + Q(c(t))y'(t))\,dt.$$

Exemple. L'intégrale de la forme différentielle $\alpha = y\,dx$ le long du graphe d'une fonction $f : t \mapsto (t, f(t))$, $t \in I$, vaut $\int_I f(t)\,dt$.

4.2 Lien avec la circulation

A chaque forme différentielle de degré 1 $\alpha = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ correspond le champ de vecteur $w(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, de sorte qu'intégrale curviligne correspond à la circulation et différentielle totale à gradient. *Attention*, cette correspondance dépend du choix de coordonnées.

Corollaire 4 *L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur une courbe ne dépend que de l'orientation, et non du choix de paramétrisation.*

Corollaire 5 *L'intégrale curviligne d'une différentielle totale* $\alpha = dV$ *ne dépend que des extrémités de la courbe,*

$$\int_c dV = V(c(t_1)) - V(c(t_0)).$$

En particulier, si c *est une courbe fermée,* $\int_c dV = 0$.

4.3 Changement de coordonnées

Définition 6 *Pour changer de coordonnées dans une forme différentielle, on substitue les nouvelles coordonnées aux anciennes, comme suit.*

Exemple. Passage en coordonnées polaires $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Etant donné $\alpha = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, on différentie

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta, \quad dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta,$$

et on substitue

$$\begin{aligned} \alpha &= (\cos\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta))\,dr \\ &\quad + r(-\sin\theta P(r\cos\theta, r\sin\theta) + \cos\theta Q(r\cos\theta, r\sin\theta))\,d\theta. \end{aligned}$$

Cela généralise la formule de dérivation des fonctions composées.

Théorème 3 *L'intégration des formes différentielles de degré* 1 *est invariante par changement de coordonnées.*

Preuve.
En effet

$$\begin{aligned} P(r\cos\theta, r\sin\theta)(\cos\theta\frac{\partial r}{\partial t} - r\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}) &+ Q(r\cos\theta, r\sin\theta)(\sin\theta\frac{\partial r}{\partial t} + r\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial t}) \\ &= P(x,y)\frac{dx}{dt} + Q(x,y)\frac{dy}{dt}. \blacksquare \end{aligned}$$

4.4 Formes différentielle exactes et fermées

Définition 7 *On dit qu'une forme différentielle de degré* 1 α *définie sur un domaine plan* D *est* exacte *si c'est la différentielle totale d'une fonction définie sur* D*.*

Une condition nécessaire pour que $\alpha = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ soit exacte est que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en chaque point de D. En effet, si $\alpha = dV$, alors $P = \frac{\partial V}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial V}{\partial x}$ donc

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Définition 8 *Soit* α *une forme différentielle de degré 1. On* note

$$d\alpha = (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy.$$

Une forme différentielle α *telle que* $d\alpha = 0$ *est dite* fermée.

Remarque 9 *Moyen mnémotechnique.*

Pour calculer $d\alpha$, il suffit d'appliquer les règles suivantes.

- d est linéaire, i.e. passe à travers les sommes ;
- si V est une fonction, $ddV = 0$, en particulier, $d(dx) = d(dy) = 0$;
- si V est une fonction et α une forme différentielle de degré 1, $d(V\alpha) = dV\,\alpha + V\,d\alpha$;
- $dx\,dx = dy\,dy = 0$, $dy\,dx = -dx\,dy$.

Théorème 4 *Soit* D *une partie* convexe *du plan. Une forme différentielle définie sur* D *est exacte si et seulement si elle est fermée.*

Exemple. La forme $\alpha = d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ définie sur le plan privé de l'origine est fermée mais non exacte.

Corollaire 10 *Soit* $(x, y) \mapsto w(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ *un champ de vecteurs défini sur une partie convexe* D *du plan. Alors* w *dérive d'un potentiel défini sur* D *si et seulement si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en tout point de D*.*

Remarque 11 *Pour montrer qu'une forme différentielle* α *n'est pas exacte sur son domaine de définition, on dispose de deux moyens.*

- *Calculer* $d\alpha$ *et voir que* $d\alpha \neq 0$*.*
- *Trouver une courbe fermée* c *telle que* $\int_c \alpha \neq 0$*.*

5 Formule de Green Riemann

Si α est exacte sur D, alors pour toute courbe c fermée contenue dans D, $\int_c \alpha = 0$. En effet, comme $\alpha = du$, $\int_c \alpha$ est la variation de u entre les extrémités, donc nulle si la courbe est fermée.

En général, l'intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe fermée qui borde un domaine s'écrit comme une intégrale double sur le domaine. Attention aux orientations.

5.1 Orientation du bord

Définition 12 *Si D est un domaine plan, dont le bord est formée de courbes fermées $c_1, \ldots, c_k$, on oriente ∂D suivant la convention de la matière à gauche : lorsqu'on parcours c_i, on doit avoir le domaine D sur sa gauche.*

5.2 Formule de Green Riemann

Théorème 5 *Soit $\alpha = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ une forme différentielle de degré 1. Soit c une courbe fermée sans point double, qui entoure un domaine D. On suppose que D est à gauche lorsqu'on parcourt c. Alors*

$$\int_c \alpha = \int_D d\alpha = \int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dx\,dy.$$

Preuve.

Pour simplifier, on suppose D convexe. Notons I la projection du domaine D sur l'axe Ox. Comme D est convexe, il est défini par des inégalités $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions continues sur I. On calcule

$$\begin{aligned}
\int_{\{x\in I,\ f_1(x)\leq y\leq f_2(x)\}} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy &= \int_I dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy \\
&= \int_I (P(x,f_2(x)) - P(x,f_1(x)))\,dx \\
&= \int_c P\,dx. \blacksquare
\end{aligned}$$

De même, $\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = -\int_c Q\,dy.$ $\blacksquare$

5.3 Cas des formes fermées

On voit que l'intégrale d'une forme fermée définie sur un convexe sur une courbe fermée sans point double est nulle. Fixant une origine O dans D, on dispose d'un candidat pour une fonction V telle que $dV = \alpha$: il suffit d'intégrer α le long des segments issus de O.

Exercices

1. Calcul de l'aire entourée par une courbe fermée.

2. Calcul de l'aire en coordonnées polaires (en intégrant $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$).

3. Etude de la forme $d\theta$.