Université Paris-Sud 2004/2005
S3SMP/IFIPS Optronique

Examen de Mathématiques
17 janvier 2005, durée 3h
Les calculettes et documents sont interdits

I

Soit B le cylindre plein d'axe Oz, de section le cercle de rayon R, de hauteur h. Son bord est constitué de deux disques plans Δ_0 et Δ_h et d'une surface S paramétrée par

$$(u,v) \mapsto s(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos(u) \\ R\sin(u) \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, h].$$

On cherche à calculer le *moment d'inertie* de B par rapport à l'axe Oy. C'est l'intégrale

$$I = \iiint_B (x^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

1. Montrer que I est égal au flux à travers le bord de B du champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz^2 \\ yx^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Calculer ce flux.

II

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

2. Soit $B = A + I$, où I désigne la matrice unité. Calculer B^2. Que vaut B^3 ?

3. Calculer A^k pour $k \geq 2$.

III

On considère le système différentiel (S) $\begin{cases} x'' = 2x - y' \\ y'' = -y + 2x' \end{cases}$.

1. En introduisant les fonctions inconnues auxiliaires $z = x'$ et $w = y'$, transformer (S) en un système du premier ordre (S'), de matrice A'.

2. Vérifier que les fonctions $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$ sont des solutions du système (S). Que peut-on en déduire au sujet des valeurs propres de la matrice A' ?

3. Calculer le polynôme caractéristique de A'. La matrice A' est-elle diagonalisable sur $\mathbf{R}$? sur $\mathbf{C}$?

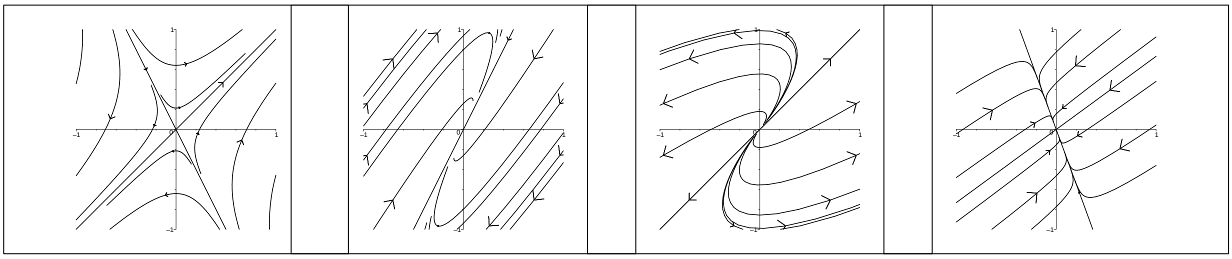
IV

On s'intéresse à la famille de systèmes différentiels (S_a) $\begin{cases} x' &= (-1+a)x+(1+a)y \\ y' &= -2x+(1+a)y \end{cases}$.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de a telles que le système (S_a) ne possède aucune trajectoire rectiligne.

2. Tracer quelques trajectoires du système (S_{-5}).

3. Parmi les 4 figures suivantes, 2 ne correspondent à aucun des systèmes (S_a). Indiquer lesquelles, et justifier en raisonnant sur les valeurs propres et vecteurs propres.



(a) (b) (c) (d)

Université Paris-Sud | 2004/2005
S3SMP/IFIPS Optronique

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE MATHÉMATIQUES
17 janvier 2005, durée 3h

I

1. La divergence de w vaut

$$div(w) = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = z^2 + x^2.$$

La formule de Green-Ostrogradsky donne

$$\begin{aligned} I &= \iiint_B (z^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint_B div(w)\,dx\,dy\,dz \\ &= \mathrm{Flux}(w, \partial B), \end{aligned}$$

où le bord de B est orienté par la normale sortante.

2. Le champ de vecteurs w est horizontal, donc tangent aux parties planes Δ_0 et Δ_h du bord, donc le flux à travers Δ_0 et Δ_h est nul. Pour la partie courbe, on utilise la paramétrisation de l'énoncé. En effet, la normale unitaire définie par cette paramétrisation est la normale sortante. On calcule

$$w(R\cos u, R\sin u, z) = \begin{pmatrix} Rv^2\cos u \\ R^3 \sin u \cos^2 u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial s}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

puis

$$\det(w, \frac{\partial s}{\partial u}, \frac{\partial s}{\partial v}) = R^2v^2\cos^2 u + R^4 \sin^2 u \cos^2 u.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Flux}(w, S) &= \iint R^2v^2\cos^2 u + R^4\sin^2 u\cos^2 u\,du\,dv \\ &= \int_0^{2\pi} (\int_0^h (R^2v^2\cos^2 u + R^4\sin^2 u\cos^2 u)\,dv)\,du \\ &= \int_0^{2\pi} (\frac{R^2h^3}{3}\cos^2 u + \frac{R^4h}{4}\sin^2(2u))\,du \\ &= \frac{R^2h^3}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2 u\,du + \frac{R^4h}{8}\int_0^{4\pi}\sin^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\pi R^2h^3 + \frac{1}{4}\pi R^4 h. \end{aligned}$$

II

1. On trouve $P_A(x) = (x+1)^3$. Si A était diagonalisable sur $\mathbf{C}$, il existerait une matrice inversible P telle que $A = P(-I)P^{-1}$, d'où $A = -I$, contradiction. Par conséquent, A n'est pas diagonalisable, ni sur $\mathbf{R}$, ni sur $\mathbf{C}$. On peut aussi calculer l'espace propre E_{-1}. Il est défini par le système $\begin{cases} y &= 0 \\ -2y+z &= 0 \\ -4y+2z &= 0 \end{cases}$, qui est de rang 2, donc $dim(E_{-1}) = 3-2 = 1 < 3$. Comme la dimension de l'espace propre est strictement inférieure à la multiplicité, A n'est pas diagonalisable.

2. On trouve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $P_B(x) = P_A(x-1) = x^3$, le théorème de Cayley-Hamilton assure que $B^3 = 0$. Cela se voit à vue d'oeil. En effet, les vecteurs colonnes de B^2 sont proportionnels à $(1,0,0)$ qui est dans le noyau de B.

3. D'après la formule du binôme, qui s'applique car $-I$ et B commutent, pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^k &= (-I+B)^k = (-1)^k I + (-1)^{k-1} kB + (-1)^k \frac{k(k-1)}{2} B^2 = (-1)^k (I - kB + \frac{k(k-1)}{2} B^2) \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -k^2 & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1+2k & -k \\ 0 & 4k & 1-2k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

III

1. On trouve le système $Y' = A'Y$ où $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Dans les deux cas, $x' = y$, $x'' = x$, $y' = x$, $y'' = y$ d'où $2x - y' = x = x''$ et $-y + 2x' = y = y''$. Par conséquent, $Y(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ et $Z(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ satisfont $Y' = A'Y$ et $Z' = A'Z$. Or $Y' = Y \neq 0$, $Z' = -Z \neq 0$, donc $A'Y = Y$, $A'Z = -Z$. Cela prouve que 1 et -1 sont valeurs propres de A'.

3. On trouve $P_{A'}(x) = x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x^2+2)$. Ce polynôme possède des racines complexes non réelles, il n'est pas scindé sur $\mathbf{R}$, donc A' n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$. Ses 4 racines complexes 1, -1, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$ sont simples, donc A' est diagonalisable sur $\mathbf{C}$.

IV

1. On calcule le polynôme caractéristique de la matrice A_a du système, $P_{A_a}(x) = x^2 - 2ax + a^2 + 2a + 1$, et son discriminant $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + 2a + 1) = -4(2a+1)$.

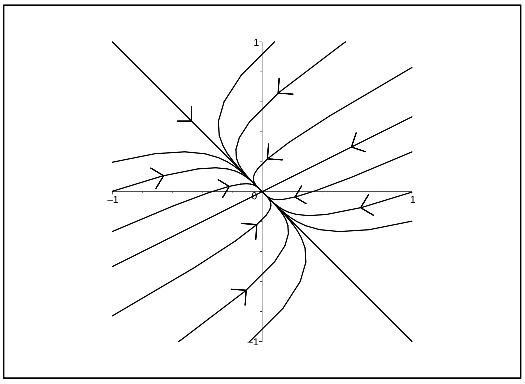
Toute valeur propre réelle non nulle donne naissance à des trajectoires rectilignes. S'il n'y a pas de trajectoires rectilignes, ou bien il n'y a pas de valeur propre ($\Delta < 0$), ou bien la seule valeur propre est 0 ($P_{A_a}(x) = x^2$). Le second cas ne se produit pas, le premier se produit si et seulement si $a > -1/2$. Réciproquement, si $a > -1/2$, le système est un foyer ou un centre, donc aucune trajectoire n'est rectiligne. On conclut que l'ensemble des valeurs de a telles que le système (S_a) ne possède aucune trajectoire rectiligne est l'intervalle ouvert $]-1/2,+\infty[$.

2. Lorsque $a=-5$, le polynôme caractéristique $x^2+10x+16=(x+8)(x+2)$ possède deux racines simples strictement négatives, donc le système (S_{-5}) est un noeud non dégénéré attractif. On calcule ses espaces propres.

E_{-2}, défini par le système $\begin{cases} -6x-4y &= -2x \\ -2x-4y &= -2y \end{cases}$, est la droite d'équation $y=-x$.

E_{-8}, défini par le système $\begin{cases} -6x-4y &= -8x \\ -2x-4y &= -8y \end{cases}$, est la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

Les trajectoires curvilignes arrivent en 0 tangentiellement à E_{-2}. Comme les valeurs propres sont négatives, les flèches sont orientées en direction de l'origine.



3. La figure (a) représente un col. La matrice d'un col possède deux valeurs propres de signes contraires, donc son déterminant est strictement négatif. Or $det(A_a)=(a+1)^2\geq 0$. Par conséquent, le figure (a) n'appartient pas à la famille (S_a).

La figure (c) représente un noeud dégénéré répulsif. Or la famille (S_a) comporte un seul noeud dégénéré, pour $a=-1/2$, et il est attractif. Par conséquent, le figure (c) n'appartient pas à la famille (S_a).

Les figures (b) et (d) représentent respectivement les systèmes $(S_{-1/2})$ et (S_{-2}).