Université Paris-Sud 2002/2003
S3SMP/NFIO2

EXAMEN DE MATHEMATIQUES
17 janvier 2003, durée 3 heures
Les documents et calculettes sont interdits

I

1. Avec ou sans calculs, déterminer le flux à travers la sphère unité orientée par la normale sortante du champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par $w(x,y,z) = (yz, zx, xy)$.

II

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de $A + I$ où I est la matrice unité. Que signifie le résultat obtenu pour le polynôme caractéristique de A ?

2. Soit (S) le système différentiel homogène du premier ordre dont la matrice est A. Sans les calculer, décider s'il existe ou non des solutions non nulles de S admettant une limite lorsque t tend vers $+\infty$.

3. On s'intéresse au système différentiel

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) & = & x(t) - 2y(t) + x'(t) - y'(t) \\ y''(t) & = & x(t) + 2y(t) - x'(t) - y'(t) \end{array} \right. .$$

Transformer ce système en un système différentiel (S_1) du premier ordre.

4. Vérifier que (S_2) admet une solution non nulle de la forme $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^t$. Que peut-on en déduire en ce qui concerne les valeurs propres de la matrice de (S_1) ?

III

Soit a un paramètre réel. On considère l'endomorphisme u_a de $\mathbf{R}^2$ défini par

$$u_a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2 + a + 1)x + (a+1)y \\ -(a^2 + a)x - ay \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme u_a est-il diagonalisable ?

2. On suppose que $a = 2$. Trouver une matrice P telle que $P^{-1}A_2P$ soit diagonale.

3. En déduire une expression des puissances A_2^n, pour $n \geq 1$.

IV

0n s'intéresse au système différentiel

$$(S)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 7x(t)+3y(t)+e^{-t} \\ y'(t) & = & -6x(t)-2y(t)+3e^{-t}. \end{array}\right.$$

1. Trouver une solution particulière de (S).

2. Exprimer la solution générale de (S).

3. Calculer la solution de (S) telle que $x(0)=2$ et $y(0)=0$.

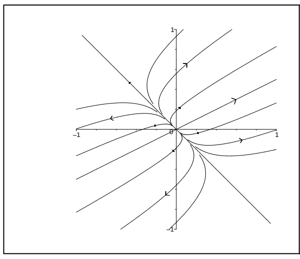
V

Soit a un paramètre réel. On s'intéresse au système différentiel

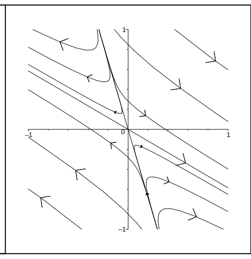
$$(S_a)\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & (a^2+a+1)x(t)+(a+1)y(t) \\ y'(t) & = & -(a^2+a)x(t)-ay(t) \end{array}\right. .$$

1. Tracer sommairement les trajectoires du système (S_2).

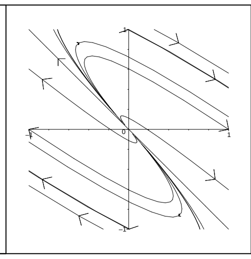
2. Parmi les huit figures (a) à (h) ci-dessous, cinq d'entre elles ne peuvent pas représenter même approximativement les trajectoires d'un système de la famille (S_a). Lesquelles ? On justifiera les réponses en raisonnant sur les valeurs propres et vecteurs propres.



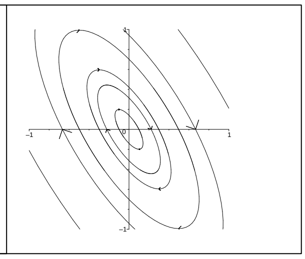
(a)



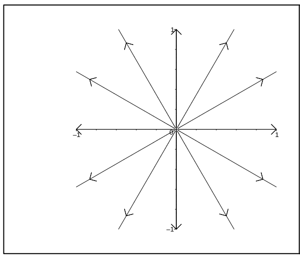
(b)



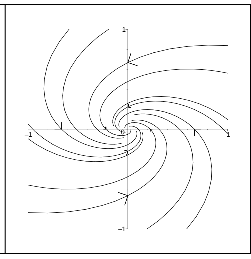
(c)



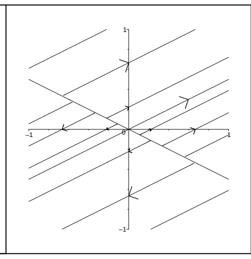
(d)



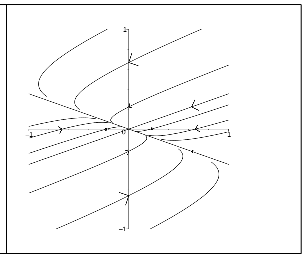
(e)



(f)



(g)



(h)

Université Paris-Sud 2002/2003
S3SMP/NFIO

Corrigé de l'Examen de Mathematiques
17 janvier 2003, durée 3 heures

I

1. On remarque que la divergence de w est nulle, donc le théorème de Green-Ostrogradsky donne que le flux de w à travers le bord de la boule est nul.

On peut aussi calculer directement. La normale sortante en (x, y, z) est $\nu = (x, y, z)$, d'où $\nu \cdot w = 3xyz$. En coordonnées latitude-longitude, $x = \cos(\theta)\cos(\phi)$, $y = \cos(\theta)\sin(\phi)$, $z = \sin(\theta)$ donc $3xyz = 3\cos^2(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)$. L'élément d'aire est $\cos(\theta)\, d\theta\, d\phi$, d'où

$$Flux = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 3\cos^3(\theta)\sin(\phi)\cos(\phi)\sin(\theta)\, d\theta\, d\phi = 0.$$

II

1. Le déterminant de $A + I$ vaut

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

qui est nul car deux colonnes sont égales. Autrement dit, -1 est une racine du polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - xI)$.

2. D'après 1, -1 est valeur propre de A. Si v est un vecteur propre de A' pour la valeur propre -1, alors $t \mapsto X(t) = e^{-t}v$ est une solution non nulle de (S') qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

3. On introduit deux nouvelles fonctions inconnues $t \mapsto z(t) = x'(t)$ et $t \mapsto w(t) = y'(t)$. Le système (S_2) est équivalent à

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& z \\ y' &=& w \\ z' &=& x - 2y + z - w \\ w' &=& x + 2y - z - w \end{array} \right. ,$$

dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Les fonctions $x(t) = ae^t$, $y(t) = be^t$ sont solutions du système S_2 si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ae_t & = & ae_t - 2be_t + ae^t - be^t \\ be^t & = & ae^t + 2be^t - ae^t - be^t \end{array} \right. ,$$

ce qui conduit au système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a - 3b & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

qui admet par exemple pour solution $a = 3$, $b = 1$.

Cela entraîne que $t \mapsto X(t) = (3e^t, e^t, 3e^t, e^t)$ est solution de S_1 et donc que 1 est valeur propre de la matrice de (S_1).

III

1. Le polynôme caractéristique de u_a est $P_a(X) = X^2 - (a^2+1)X + a^2$. Son discriminant $(a^2-1)^2$ est positif ou nul, et s'annule si et seulement si $a = -1$ ou $a = 1$. Les racines sont a^2 et 1.

Si $a \neq 1$ et $a \neq -1$, les racines sont distinctes. Les valeurs propres de u_a sont de multiplicité 1. Par conséquent, u_a est diagonalisable.

Si $a = -1$ ou 1, A_a a une valeur propre double. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas proportionnelle à la matrice unité donc elle n'est pas diagonalisable. A_{-1} est égale à la matrice unité, donc elle est diagonalisable.

On conclut que u_a est diagonalisable si et seulement si $a \neq 1$.

2. Si $a = 2$, les valeurs propres sont 4 et 1.

L'espace propre E_4, défini par le système

$$\begin{array}{rcl} 7x + 3y & = & 4x \\ -6x - 2y & = & 4y \end{array}$$

est la droite d'équation $y = -x$. On choisit comme vecteur directeur $v_1 = (1, -1)$.

L'espace propre E_1, défini par le système

$$\begin{array}{rcl} 7x + 3y & = & x \\ -6x - 2y & = & y \end{array}$$

est la droite d'équation $y = -2x$. On choisit comme vecteur directeur $v_2 = (1, -2)$.

Dans cette base, la matrice de u_{-1} est $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}A_2P = D$ est diagonale.

3. On calcule

$$\begin{array}{rcl} A_2^n & = & P \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2.4^n - 1 & 4^n - 1 \\ -2.4^n + 2 & -4^n + 2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

IV

1. La matrice du système (S) est A_2 de l'exercice précédent. Comme -1 n'est pas valeur propre de A_2, il existe une solution particulière de la forme $t \mapsto X(t) = e^{-t}v$, où $v \in \mathbf{R}^2$. Une telle fonction est solution du système (S) si et seulement si $-v = Av + b$ où $b = (1, 3)$. Les composantes (x, y) de v sont solution du système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -8x - 3y & = & 1 \\ 6x + y & = & 3 \end{array} \right.$$

dont la solution est $v = (1, -3)$. On conclut que

$$t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -3e^{-t} \end{pmatrix}$$

est une solution du système (S).

2. La solution générale du système homogène $X' = A_2X$ s'écrit

$$t \mapsto X(t) = c_1e^{4t}v_1 + c_2e^tv_2 = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} + c_2e^t \\ -c_1e^{4t} - 2c_2e^t \end{pmatrix}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes. Par conséquent, la solution générale du système (S) s'écrit

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{4t} + c_2e^t + e^{-t} \\ -c_1e^{4t} - 2c_2e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

3. L'expression trouvée en 2 satisfait la condition initiale $X(0) = (2, 0)$ si et seulement si

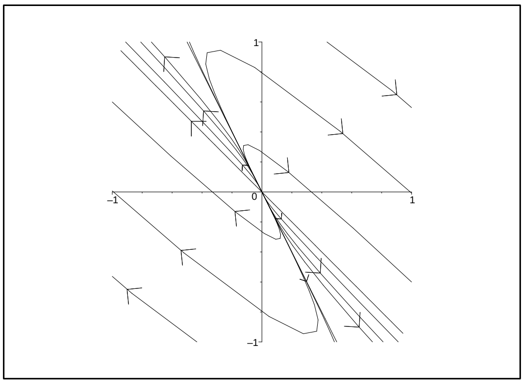
$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_1 + c_2 + 1 & = & 2 \\ -c_1 - 2c_2 - 3 & = & 0 \end{array} \right. ,$$

d'où $c_1 = 5$, $c_2 = -4$. On trouve la solution

$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} 5e^{4t} - 4e^t + e^{-t} \\ -5e^{4t} + 8e^t - 3e^{-t} \end{pmatrix}.$$

V

1. Les valeurs propres et espaces propres du système (S_2) ont été calculées en III.2. Les valeurs propres 4 et 1 sont distinctes, strictement positives. Le système (S_2) est donc un noeud non dégénéré répulsif. L'espace propre E_4 est la droite d'équation $y = -x$, E_1 est la droite d'équation $y = -2x$. Ces deux droites portent donc 4 trajectoires rectilignes orientées vers l'infini. Les autres trajectoires ont pour tangente à l'origine E_1 et pour direction asymptotique E_4. Voir figure.



2. Le polynôme caractéristique du système a été calculé en III. Il vaut $P_a(X) = X^2-(a^2+1)X+a^2$, ses racines sont a^2 et 1. Le système (S_a) est donc

1. un noeud non dégénéré répulsif si $a < -1$;
2. un soleil répulsif si $a = -1$;
3. un noeud non dégénéré répulsif si $-1 < a < 0$;
4. un système de type (O_1) si $a = 0$;
5. un noeud non dégénéré répulsif si $0 < a < 1$;
6. un noeud dégénéré répulsif si $a = 1$;
7. un noeud non dégénéré répulsif si $a > 1$.

Cela permet d'exclure le col (b), le centre (d), le foyer (f) et le noeud non dégénéré attractif (h).

Il reste un doute concernant (g). Dans un tel système, les trajectoires rectilignes sont parallèles à la droite propre relative à la valeur propre non nulle. Or lorsque $a = 0$, E_1 est l'axe Ox, ce qui ne correspond pas à la figure (g).

On conclut que les dessins (b), (d), (f), (g) et (h) ne peuvent correspondre à aucun des systèmes différentiels (S_a).