EXERCICES

1 – Soit E l'ensemble des rationnels inférieurs à $\sqrt{2}$.

1 - Montrer que E admet une borne supérieure M dans $\mathbb{R}$.

2 - Montrer que $M = \sqrt{2}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

3 - E est-il une partie fermée de $\mathbb{R}$?

2 – Soit E l'ensemble des réels de $]0,1[$ dont le développement en base 10 comporte une infinité de fois le chiffre 3 et dont la somme des quatre premières décimales vaut 32.

Calculer $\sup E$ et $\inf E$. (On devra "subodorer" ces valeurs et le démontrer ensuite…) Ces bornes appartiennent-elles à E ?

3 – On pose $f(x) = x^3 + x - 1$ et on définit deux parties de $\mathbb{R}$ par

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \; : \; f(x) < 0\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R}, \; : \; f(x) > 0\}.$$

1 - Montrer que A et B sont non vide, que A est majoré par tout élément de B et que B est minoré par tout élément de A.

2 - On note M la borne supérieure de A et m la borne inférieure de B. Donner un encadrement simple de ces deux nombres.

3 - Montrer par l'absurde que $M = m$.

4 - Montrer que $f(M) = 0$. Que sont, finalement, les ensembles A et B ?

4 – Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On suppose $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$.

1- Montrer que $E = \{x \in [a, b], \; f(x) > 0\}$ admet une borne supérieure c.

2- Montrer que $c > a$.

3- Montrer que $c < b$.

4- Montrer que $f(c) = 0$.

5 - Appelons $H = f^{-1}(0)$ = l'ensemble des points de $[a, b]$ où f s'annule. Quelle est la nature de H ?

6 - On définit maintenant F comme l'ensemble des éléments t de $]a, b]$ tels que f est strictement positive sur le segment $[a, t]$. On appelle $d = \sup F$. Montrer que $f(d) = 0$.

5 – On va montrer qu'il est impossible de trouver une partie F à la fois ouverte et fermée, non vide et distincte de $\mathbb{R}$. On va raisonner par l'absurde.

1 - Montrer que cela revient à supposer l'existence de deux fermés F_1 et F_2 **disjoints** non vides dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$ tout entier.

On supposera donc, pour simplifier les notations, que $0 \in F_1$ et $1 \in F_2$. Le segment $[0, 1]$ contient donc des points de F_1 **et** des points de F_2.

Soit $a = \inf\Big([0, 1] \cap F_2\Big)$

2 - Montrer que $a \in F_2$ et que $a > 0$.

3 - Que peut-on dire des réels de $[0, a[$? En déduire que $a \in F_1$ et conclure.

5 bis – On va montrer qu'il est impossible de trouver une partie F à la fois ouverte et fermée, non vide et distinct de $\mathbb{R}$. On va raisonner par l'absurde.

1 - Montrer que cela revient à supposer l'existence de deux fermés F_1 et F_2 **disjoints** non vides dont la réunion est égale à $\mathbb{R}$ tout entier.

On supposera donc, pour simplifier les notations, que $0 \in F_1$ et $1 \in F_2$. Le segment $[0, 1]$ contient donc des points de F_1 **et** des points de F_2.

2 - Montrer que l'une au moins des deux moitiés $[0, 1/2]$ ou $[1/2, 1]$ possède encore cette propriété $\mathcal{P}$: " contenir des points de F_1 **et** des points de F_2".

3 - En utilisant le théorème des segments emboîtés, construire un point $c \in [0, 1]$ possédant la propriété suivante : "tout voisinage de c contient des points de F_1 et des points de F_2".

4 - Conclure à l'impossibilité.

6 – Voici un procédé assez puissant pour montrer qu'une certaine propriété P est vraie sur un segment (par exemple $[0, 1]$) :

1 - Montrer qu'elle est vraie au voisinage de 0, en pratique sur un petit segment $[0, \alpha]$.

2 - Introduire l'ensemble E des $x \in]0, 1]$ tels que P est valable sur le segment $[0, x]$. Soit M la borne supérieure de E.

3 - Montrer que $\sup E = 1$ **et** que $\sup E \in E$ (peu importe dans quel ordre). On aura donc $E = [0, 1]$

Application : Soit U_i une famille infinie d'intervalles ouverts dont la réunion contient $[0, 1]$. Montrer que l'on peut trouver un nombre fini d'intervalles de cette famille dont la réunion contient encore $[0, 1]$.

7 – Rappelons qu'on dit que E est un intervalle quand il existe deux réels a et b tels que $]a, b[\subseteq E \subseteq [a, b]$. Montrer qu'une partie E de $\mathbb{R}$ possédant la propriété suivante

$$\Big(\forall x, y \in E\Big) \ \Big([x, y] \subset E\Big)$$

est un intervalle.

8 – On se donne une famille (a priori infinie) H_i $(i \in \mathcal{J})$ d'intervalles contenant tous un même point a. Montrer que la réunion $A = \bigcup_{i \in J} H_i$ est encore un intervalle.

On ne traitera pas tous les cas possibles, mais seulement (par exemple) :

♠ A est borné.

♠ A est minoré, mais pas majoré.

9 – On note E l'ensemble des nombres de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q sont des entiers relatifs.

1 - Trouver un élément α de E compris entre 0 et 1, puis une suite de points de E convergeant vers 0.

2 - Montrer que tout intervalle réel $]a, b[$ contient au moins un point de E : étant donné un intervalle $]a, b[$, on commencera par montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que $0 < x < b - a$, et on regardera la suite $x_0, 2x_0, 3x_0, \cdots$.

3 - Comment peut-on écrire un intervalle quelconque $]a, b[$ comme la réunion d'une infinité d'intervalles non vides ? En déduire que $]a, b[$ continent une infinité de points de E.

10 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1 - Soit F un fermé. Montrer que $f^{-1}(F)$ est encore un fermé.

2 - Soit U un ouvert. Montrer que $f^{-1}(U)$ est encore un ouvert.

11 – Identifier $\displaystyle\bigcup_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$. A-t-on une contradiction avec les propriétés des fermés ?

Identifier $\displaystyle\bigcap_{n=2}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right[$. A-t-on une contradiction avec les propriétés des ouverts ?

12 – Soit A une partie infinie de $\mathbb{R}$.

On appelle point d'accumulation de A tout réel x_0 possédant la propriété suivante :

Tout voisinage de x_0 contient une infinité de points de A.

1 - Montrer que l'ensemble F des points d'accumulation de A est un fermé (donner deux démonstrations).

2 - Montrer que $A \cup F$ est un fermé (quelle que soit la nature de A).

12 bis – On va montrer que toute partie infinie bornée A de $\mathbb{R}$ admet au moins un point d'accumulation (tout voisinage de ce point contient une infinité de points de A).

On définit $E = \{x \in \mathbb{R} \ : \text{ il y a une infinité de points de } A \text{ à droite de } x\}$

1 - Montrer que E admet une borne supérieure, et que cette borne est un point d'accumulation de A.

2 - Définir un autre point d'accumulation de A en utilisant la borne inférieure et un autre ensemble E que l'on définira.

3 - Quels sont les points d'accumulation de $A = \{1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots\}$? De $\mathbb{Q}$? De $\mathbb{N}$?

12 ter – Soit A une partie infinie de $\mathbb{R}$, et a un point d'accumulation de A.

Construire une suite strictement monotone de points de A qui converge vers a.

13 – On va montrer qu'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ y est *uniformément continue*, à savoir :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que $|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

On va raisonner par l'absurde.

1 - Ecrire la propriété et sa négation avec des quantificateurs. Montrer que cette négation peut s'exprimer plus simplement en introduisant deux suites de points de $[a, b]$.

2 - En utilisant la compacité du segment, arriver à une contradiction.

3 - Montrer, à l'aide de cette propriété, que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue linéaire par morceaux g (on subdivise $[a, b]$ en un nombre fini de points $a_0 = a < a_1 <$

$\cdots < a_{n-1} < a_n = b$ et g est la ligne brisée joignant chaque point $(a_j, f(a_j))$ au point suivant $(a_{j+1}, f(a_{j+1}))$ telle que

$$(\forall x \in [a,b])(|f(x) - g(x)| < \varepsilon)$$

4 - Comment exprimer ce résultat en terme de convergence uniforme ?

13 bis – On va démontrer que pour toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$$

1 - Montrer le résultat pour une fonction affine $f : t \mapsto ut + v$.

2 - Montrer le résultat pour une fonction f linéaire par morceaux sur $[a,b]$.

3 - En utilisant le résultat final de l'exercice précédent, démontrer le résultat pour f continue quelconque.

14 – Soit Ω_j $(j \in \mathcal{J})$ une famille quelconque[1] d'ouverts dont la réunion contient le segment $[0,1]$. On va démontrer qu'il existe un réel $\delta > 0$ possédant la propriété suivante :

Pour tout $x \in [0,1]$, il existe au moins un ouvert Ω_j (dépendant évidemment de x) qui contient entièrement l'intervalle ouvert $]x-\delta, x+\delta[$.

1 - Ecrire cette propriété et sa négation avec des quantificateurs.

2 - Ecrire cette négation en introduisant une suite de points de $[0,1]$. On va raisonner par l'absurde, en supposant vraie cette négation.

3 - En utilisant la compacité de $[0,1]$, montrer que l'on arrive à une impossibilité.

4 - En déduire que l'on peut trouver **un nombre fini** d'ouverts $\Omega_1, \cdots, \Omega_m$ dont la réunion contient $[0,1]$.

5 - Par quoi peut-on remplacer le segment $[0,1]$? Peut-on généraliser à $\mathbb{R}^n$? En remplaçant quoi par quoi ?

15 – On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$ pour tout $n \geq 1$ entier. On sait que ces intégrales généralisées sont absolument convergentes à partir de $n = 2$, I_1 étant uniquement semi-convergente.

1 - Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_2^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = 0$.

2 - Soit $0 < a < 2$ un réel donné. Montrer que sur $[a,2]$ on a $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \leq \left(\frac{\sin a}{a}\right)^n$.

3 - Montrer, en revenant soigneusement à la définition d'une limite et en coupant $[0,2]$ en deux intervalles, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt = 0$.

[1] L'exercice est surtout intéressant quand on a une infinité d'ouverts dans cette famille, i.e. quand l'ensemble d'indice $\mathcal{J}$ est infini.

16 – Etant donné deux parties non vides A et B de $\mathbb{R}$, on note $A+B$ l'ensemble des réels x qui peuvent s'écrire $x = a+b$ où $a \in A$ et $b \in B$.

On remarquera que $A+B$ est l'image du produit $A \times B \subset \mathbb{R}^2$ par l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(x,y) \mapsto f(x,y) = x+y$.

On supposera dans l'exercice que A et B sont bornées.

1 - Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

2 - On suppose maintenant que $A = [a_1, a_2]$ et $B = [b_1, b_2]$.

• Montrer que $A+B \subseteq [a_1+b_1, a_2+b_2]$.

• Montrer que $[a_1+b_1, a_2+b_2] \subseteq A+B$ (*indication : comment peut-on écrire un réel appartenant à un segment* $[u,v]$?).

3 - Que vaut $A+B$ lorsque $A =]a_1, a_2[$ et $B =]b_1, b_2[$?

4 - On vient de démontrer que si l'on a quatre réels $a_1 < a_2$ et $b_1 < b_2$, alors tout réel x strictement compris entre a_1+b_1 et a_2+b_2 peut se mettre sous la forme $x = u+v$ avec $a_1 < u < a_2$ et $b_1 < v < b_2$.

• Montrer qu'il y a une infinité de façons de le faire.

• Faire un dessin pour visualiser les choses dans le plan. Quel est l'ensemble des couples $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ de solutions ? Est-il ouvert ? Fermé ?

5 - Comment peut-on utiliser la notion de connexité par arcs (dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}$) pour montrer plus rapidement que si A et B sont des intervalles, alors $A+B$ est un intervalle ?

17 – 1 - Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Interpréter, en terme de suite, la relation $\inf E = 0$.

2 - On considère un fermé F et un compact K non vides disjoints de $\mathbb{R}$, et l'on pose

$$m = \inf\{|x-y|,\ x \in F,\ y \in K\}$$

Montrer que m est strictement positive.

3 - Donner un exemple de deux fermés disjoints pour lesquels le nombre m est nul.

18 – Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout x réel on pose

$$f(x) = \inf\{|x-a|,\ a \in A\}$$

1 - Calculer f dans le cas $A =]0,1]$.

2 - En partant de l'inégalité triangulaire $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$, montrer que :
- $f(x) \leq |x-y| + |y-a|$ (pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $a \in A$)
- $f(x) \leq |x-y| + f(y)$ (pour tous réels x, y).

3 - En déduire un encadrement de $|f(x) - f(y)|$ montrant que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4 - On suppose A fermé. Montrer que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in A$.

5 - Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) < \varepsilon$ est un ouvert contenant A.

6 - Soit A un fermé et B un compact non vides disjoints de $\mathbb{R}$. En étudiant la fonction f, montrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(|a-b| \geq m)$$

7 - Soit A et B deux compacts disjoints. Montrer qu'il existe un ouvert U contenant A et un ouvert V contenant B tels que $U \cap V = \emptyset$.

19 – On se place dans le plan.

1 - Montrer que le demi-plan $ax+by+c > 0$ est un ouvert. Montrer que le demi-plan $ax+by+c \geq 0$ est un fermé.

2 - Montrer que $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 1, y > 2, x+y < 12\}$ est un ouvert. On cherchera plusieurs méthodes possibles.

3 - Montrer que $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 1, y \geq 2, x+y \leq 12\}$ est un fermé.

20 – Soit f_n une suite de fonctions continues sur $[0,1]$. On suppose que pour chaque x la **suite** $f_n(x)$ est croissante et majorée, et que la limite f est continue.

On se donne un $\varepsilon > 0$.

1 - montrer que pour tout x de $[0,1]$ il existe un intervalle U_x et un entier n_x tels que $0 < f(t) - f_{n_x}(t) < \varepsilon$ pour tout t de cet U_x.

2 - Montrer que pour tout entier $p > n_x$ on a encore $0 < f(t) - f_p(t) < \varepsilon$ pour tout t de cet U_x.

3 - Que peut-on dire de $\displaystyle\bigcup_{x\in[0,1]} U_x$?

4 - On rappelle que si la réunion d'une famille d'ouverts contient un segment, alors on peut trouver un nombre fini de ces ouverts dont la réunion contient encore le segment.

Montrer qu'il existe un entier m tel que $0 < f(t) - f_m(t) < \varepsilon$ pour tout t de $[0,1]$.

5 - que peut-on dire de la convergence de la suite de fonctions f_n vers f ?

21 – On rappelle que tout réel est la limite d'une suite de rationnels. On rappelle aussi que tout rationnel s'écrit de façon unique sous la forme dite irréductible $\dfrac{p}{q}$ où les entiers p et q sont sans diviseur commun.

On rappelle enfin qu'une fonction f est continue en x_0 si et seulement si elle possède la propriété suivante : quelle que soit la suite x_n convergeant vers x_0, alors la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$.

1 - Montrer que si la suite de rationnels $\dfrac{p_n}{q_n}$ converge vers un irrationnel x_0, alors la suite q_n tend vers $+\infty$.

2 - On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$ pour un rationnel écrit sous sa forme irréductible.

- Montrer que f est continue en tout point x_0 irrationnel.
- Que se passe-t-il en un $x_0 = \dfrac{p}{q}$ rationnel ?

22 – Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

- On note $\overline{A}$ l'ensemble des points x_0 de $\mathbb{R}^n$ possédant la propriété suivante :

  Tout voisinage de x_0 contient au moins un point de A.

- On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des x_0 possédant la propriété suivante :

  Il existe une boule ouverte de centre x_0 incluse dans A.

1 - Montrer que $\overline{A}$ est un fermé contenant A.

2 - Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert contenu dans A.

3 - Quelle est la nature de $T = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$? Donner une caractérisation des points de cet ensemble en terme de voisinages.

4 - Trouver T dans le cas où $A = [0, 1[$, $A = \mathbb{N}$, $A = \mathbb{Q}$.

5 - On rappelle qu'une partie de $\mathbb{R}^n$ à la fois ouverte et fermée est égale à $\mathbb{R}^n$ tout entier ou est vide. A quelle condition sur A l'ensemble R est-il vide ?

23 – Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Calculer la dérivée seconde de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(\cos t, \sin t)$.