GEOMETRIE PROJECTIVE

P. Pansu

28 mars 2007

1 Géométrie affine

1.1 Points et vecteurs

Dans $\mathbb{R}^n$ rapporté au repère $(o, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$, un point p est représenté par la colonne de ses coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

qui sont les composantes du vecteur $\vec{op}$. Si p et q sont des points, $\vec{v}$ un vecteur de composantes V, a un réel, on note $q - p = \vec{pq}$, $r = p + \vec{v}$ le point tel que $\vec{pr} = \vec{v}$, $ap + (1-a)q$ le barycentre de (p, a) et $(q, (1-a))$. La notation est justifiée par les calculs en coordonnées : si X (resp. Y, resp. V) est la colonne des coordonnées de p (resp. q, resp. des composantes de $\vec{v}$) dans un repère, alors la colonne des coordonnées de $\vec{pq}$ est $Y - X$, celle de r est $X + V$, celle de $ap + (1-a)q$ est $aX + (1-a)Y$. Le résultat ne dépend pas du choix d'origine o.

Autrement dit, la différence de deux points est un vecteur, le barycentre de deux points est un point, on peut ajouter un vecteur et un point. Attention, on n'ajoute pas deux points. Plus généralement une combinaison $\sum_i m_i p_i$ est un point (barycentre des points p_i affectés des masses m_i) si $\sum_i m_i = 1$, un vecteur si $\sum_i m_i = 0$.

1.2 Applications affines

Définition 1 *Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est* affine *s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telle que pour tous points p, q de $\mathbb{R}^n$,*

$$f(q) = f(p) + L(\vec{pq}).$$

L'endomorphisme L s'appelle la partie linéaire *de f, ou l'*application linéaire tangente *à f.*

Exemples 2 *1. Applications linéaires.*

2. Translations (ce sont les applications affines dont la partie linéaire est l'identité).

3. Homothéties.

4. Symétries orthogonales par rapport à des droites affines du plan (exercice).

5. Rotations autour de points du plan (exercice).

Proposition 3 *Toute application affine $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ possède une unique écriture matricielle, compatible avec la composition. Soit $(o, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ un repère de $\mathbb{R}^n$. La* matrice *de f dans ce repère est*

$$M_f = \begin{pmatrix} M_L & \vec{of(o)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où M_L désigne la matrice de L dans la base $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$.

Remarque 4 1. *Une application affine est bijective si et seulement si sa partie linéaire l'est.*

2. *Le groupe affine est un produit semi-direct.*
3. *Le lieu des points fixes d'une application affine est un sous-espace affine, cas où il est non vide, dimension, lien avec la multiplicité de 1 comme valeur propre de la partie linéaire.*

Proposition 5 *Soient* $(e, e_1, \dots, e_n)$ *et* $(o', e'_1, \dots, e'_n)$ *deux repères affines de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* f *une transformation affine de matrices* M *et* M' *dans ces repères. Notons* V *la colonne des coordonnées du point* o' *dans le repère* $(o, e_1, \dots, e_n)$. *Posons*

$$P_a = \begin{pmatrix} P & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P *est la matrice de passage de la base* $(e_1, \dots, e_n)$ *dans la base* $(e'_1, \dots, e'_n)$, *i.e. les colonnes de* P *sont les composantes des vecteurs* e'_j *dans la base* $(e_1, \dots, e_n)$. *Alors*

$$M' = P_a^{-1} M P_a.$$

Fin du cours $n^0 1$

2 Perspective

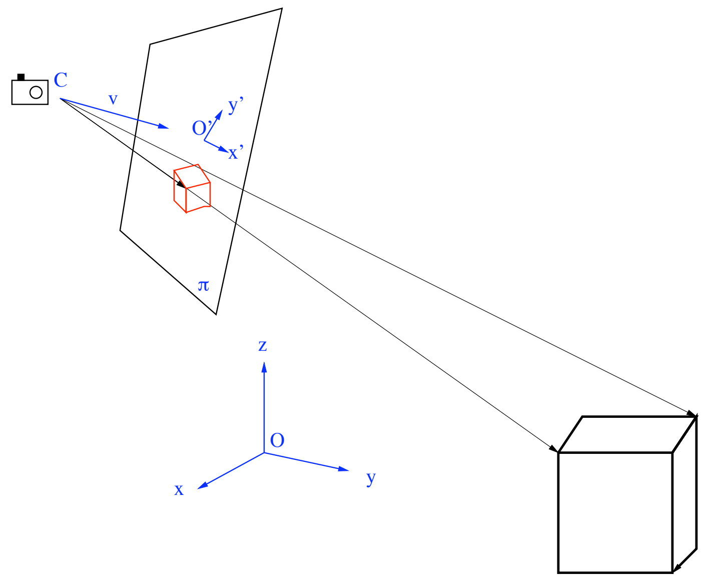
2.1 Vues

Une *vue* d'une scène 3D est déterminée par les données suivantes.

- La position de la caméra : un point c de coordonnées $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.
- Une direction de visée : un vecteur unitaire $\vec{v}$ de composantes $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
- Un *écran*, i.e. un plan Π perpendiculaire à la direction de visée : il est déterminé par sa distance à C, un réel positif d.
- Un repère orthonormé $(o', \vec{e'_1}, \vec{e'_2})$ du plan Π.

Une *vue* de la scène est une application $W : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, qui aux coordonnées d'un point dans le *repère du monde* $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ associe les coordonnées de sa projection sur l'écran Π, dans le *repère de l'image* $(o', \vec{e'_1}, \vec{e'_2})$.

Définition 6 *La* vue en perspective *depuis* c *sur l'écran* Π *consiste à projeter un point* p *sur* p', *point d'intersection de la droite* cp *avec* Π.



Remarque 7 *La projection n'est pas définie si p est dans le plan passant par C et parallèle à Π. C'est normal : on n'arrive pas à voir dans les directions situées à 90^0 de sa direction de vision.*

Définition 8 Prise de vue à distance infinie. *Soit D une droite, appelée* axe de visée, *et Π un plan orthogonal à D. La prise de vue à distance infinie dans la direction D consiste à projeter orthogonalement sur Π.*

C'est ce qu'on obtient à la limite, lorsque, Π et o' étant fixés, C tend vers l'infini le long de la droite $D = (o', \vec{u})$.

2.2 Calcul de la vue en perspective

Voici un moyen systématique de construire le repère (o', e'_1, e'_2). Il suffit de choisir une fois pour toute un vecteur unitaire $\vec{\nu}$ non colinéaire à $\vec{v}$. On prend pour o' la projection orthogonale de C sur Π, soit $o' = C + d\vec{v}$. On prend

$$\vec{e'_1} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{\nu}}{|\vec{v} \wedge \vec{\nu}|} \quad \text{et} \quad \vec{e'_2} = \vec{v} \wedge \vec{e'_1}.$$

Proposition 9 *On choisit $\nu = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées de p' sont données, en fonction des coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de p, par les formules*

$$x' = \frac{-cd(x - x_0) + ad(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))},$$

$$y' = \frac{abd(x - x_0) - d(a^2 + c^2)(y - y_0) + bcd(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + c^2}(a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0))}.$$

On constate que la vue en perspective s'exprime par des fractions rationnelles. Complétons le repère de l'image en un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$ en posant $\vec{e'_3} = \vec{v}$. La troisième coordonnée de p' est évidemment $z' = 0$.

On ramène ces expressions rationnelles à des expressions linéaires en adoptant la convention suivante : Un point p de $\mathbb{R}^3$ peut être représenté, non seulement par $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$, mais par n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^4$ qui lui est proportionnel. En particulier, un point p' du plan Π peut être représenté par n'importe quel vecteur de $\mathbb{R}^3$ proportionnel à $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Avec cette convention, on peut choisir pour représentant de la vue en perspective p' d'un point p le vecteur

$$\begin{pmatrix} -cd(x-x_0)+ad(z-z_0) \\ abd(x-x_0)-d(a^2+c^2)(y-y_0)+bcd(z-z_0) \\ 0 \\ \sqrt{a^2+c^2}(a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)) \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur est l'image du vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ par l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & ad & cdx_0-adz_0 \\ abd & -d(a^2+c^2) & bcd & -abdx_0)+d(a^2+c^2)y_0-bcdz_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a\sqrt{a^2+c^2} & b\sqrt{a^2+c^2} & c\sqrt{a^2+c^2} & \sqrt{a^2+c^2}(-ax_0-by_0-cz_0) \end{pmatrix}$$

C'est quand même plus sympathique (et commode à implémenter informatiquement) de passer par une matrice pour représenter la vue en perspective.

Définition 10 *Soit* $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *un point de* $\mathbb{R}^3$. *On appelle* coordonnées homogènes *de* p *tout quadruplet* (u, v, w, t) *proportionnel à* $(x, y, z, 1)$. *On* note $p = [x; y; z; t]$.

2.3 Applications projectives

Définition 11 *Application projective* $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *= donnée "en coordonnées homogènes" par une matrice* $(m+1)\times(n+1)$ *non nulle.*

Exemples 12
1. *Applications affines.*
2. *Vue en perspective d'une droite.*
3. *Vue en perspective d'un plan.*

2.4 Vues en perspective d'objets

Exemple 13 *La vue d'un plan est affine si et seulement si le plan est orthogonal à la droite de visée. Dans ce cas, la vue est homothétique.*

Exercice 14 *Vérifier que, vue en perspective, une droite reste en général une droite. Quelles sont les exceptions ? Montrer que, vues en perspectives, les droites parallèles à une droite* D *sont en général concourantes en un point appelé* point de fuite *de* D. *Quelles sont les exceptions ? Où se trouvent les points de fuites des droites contenues dans un même plan ?*

Remarque 15 *Dans une ville, les immeubles sont souvent des parallélépipèdes aux arêtes parallèles à trois directions fixées. Vues en perspective, ces trois familles d'arêtes sont portées par des droites concourantes en trois points. Si la direction de visée est horizontale, les arêtes verticales restent parallèles, et il ne reste plus que deux points de concours nettement visibles sur l'image : on parle de* perspective à deux points de fuite*.*

Exercice 16 *Soit D_+ une demi-droite, S un segment de droite. Qu'est ce qu'ils donnent, vus en perspective ? Attention, il y a de multiples cas de figure.*

Remarque 17 *On a décrit une vue comme la projection sur l'écran de tout l'espace. En réalité, une vue ne montre que ce qui se trouve devant l'écran. La vue en perspective réelle d'une droite est donc la projection d'une demi-droite ne coupant pas le plan parallèle à l'écran passant par la caméra : on voit un segment dont les extrémités sont le point de fuite et l'intersection de la droite avec l'écran.*

Exercice 18 *A quoi ressemble un cercle vu en perspective ? Tenir compte de la remarque précédente.*

Exercice 19 *A quoi ressemble une sphère vue en perspective ?*

Fin du cours $n^0 2$

3 L'espace projectif

3.1 Définition

Soit k un corps commutatif (le plus souvent, $k = \mathbb{R}$, parfois $k = \mathbb{C}$).

Définition 20 $\mathbb{P}(V)$ *est l'ensemble des droites de V. L'espace projectif de dimension n est* $\mathbb{P}^n(k) := \mathbb{P}(k^{n+1})$.

Définition 21 *Coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k)$. $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/\sim$ où on identifie deux vecteurs s'ils sont colinéaires. $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/k^*$.*

Exemples 22

1. $\mathbb{P}(k^0) = \emptyset$. *Par convention, sa dimension vaut* -1.
2. $\mathbb{P}(k^1) = \{pt\}$.
3. $\mathbb{P}(k^2)$ *s'appelle la* droite projective *sur k. Un point de $\mathbb{P}^1(k)$, c'est une pente, éventuellement infinie.*
4. $\mathbb{P}(k^3)$ *s'appelle le* plan projectif *sur k.*

3.2 Topologie

Lorsque $k = \mathbb{R}$, on souhaite raisonner par continuïté, comme le faisait déjà Euclide. Même lorsque $k = \mathbb{C}$, la topologie de l'espace projectif est utile. Comme il s'agit d'espaces quotients, la notion de topologie abstraite, en l'absence de toute métrique, est commode.

Définition 23 *Une* topologie *sur un ensemble X, c'est la donnée d'une collection $\mathcal{O}$ de parties de X appelées* ouverts*, qui est stable par réunion quelconque et intersection finie. On appelle* fermé *une partie dont le complémentaire est ouvert. Une application $f : (X, \mathcal{O}) \to (X', \mathcal{O}')$ entre espaces topologiques est* continue *si l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.*

Exemples 24

1. *Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle qu'une partie $Y \subset X$ est ouverte si pour tout $x \in Y$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B(x, r) \subset Y$. On obtient ainsi une topologie sur X. La notion de continuïté généralise bien celle du cas métrique.*

2. *Soit $X = \{0,1\}$ l'ensemble à 2 éléments. On décide que le seul ouvert de X est X (topologie grossière). C'est bien une topologie sur X.*

Définition 25 *Soit X un espace topologique, Y un ensemble, $f : X \to Y$ une application. La* topologie induite *sur Y est celle dont les ouverts sont les parties $Z \subset Y$ telles que $f^{-1}(Z)$ est un ouvert de X.*

Exemple 26 *Soit X un espace topologique, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. L'ensemble $X/\mathcal{R}$ des classes d'équivalences vient avec une surjection canonique $X \to X/\mathcal{R}$. La topologie induite sur l'espace quotient s'appelle la* topologie quotient.

On peut parler de suites convergentes dans un espace topologique. Une suite $\bar{x}_n \in X/\mathcal{R}$ converge si et seulement si il existe des représentants $x_n \in \bar{x}_n$ qui forment une suite convergente.

Définition 27 *Une topologie sur X est dite* séparée *si pour tous $x \neq x' \in X$, il existe des ouverts disjoints O et O' tels que $x \in O$ et $x' \in O'$.*

Exemples 28 1. *Un espace métrique est automatiquement séparé.*

2. *Un ensemble ayant au moins 2 éléments, muni de la topologie grossière n'est pas séparé.*

3.3 Sous-variétés linéaires

Définition 29 *Une sous-variété linéaire de dimension m de $\mathbb{P}(V)$, c'est l'image d'un sous-espace vectoriel $W \subset V$ de dimension $m+1$. D'où des points, droites, des plans, des hyperplans. La* codimension *de $Q \subset \mathbb{P}^d$, c'est $d - dim(Q)$.*

Théorème 1 *Dans $\mathbb{P}^2$, deux droites distinctes se coupent en un point exactement. Plus généralement, dans $\mathbb{P}^d$, l'intersection de deux sous-variétés linéaires de codimensions c et c' est une sous-variété linéaire de codimension $\leq c + c'$.*

Remarque 30 *r points d'un espace projectif sont toujours contenus dans une plus petite sous-variété linéaire. On dit qu'ils l'*engendrent. *Sa dimension est $\leq r-1$.*

Définition 31 *r points d'un espace projectif sont* projectivement indépendants *(ou forment un* système projectivement libre*) s'ils ne sont contenus dans aucune sous-variété linéaire de dimension $< r-1$.*

Exemple 32 *Deux points sont projectivements indépendants si et seulement si ils sont distincts. Trois points sont projectivements indépendants si et seulement si ils ne sont pas alignés.*

Plus généralement, des points *en position générale* sont projectivement indépendants, au sens suivant : être en position non générale signifie satisfaire une relation linéaire.

3.4 Repères projectifs

Choisir une base de V donne dans $\mathbb{P}(V)$ des coordonnées homogènes. Une autre base, même si elle se projette sur les mêmes points de $\mathbb{P}(V)$, ne donne pas les mêmes coordonnées homogènes. Il faut donc se donner un point de plus pour fabriquer des coordonnées homogènes uniques.

Définition 33 *Soit V un espace vectoriel de dimension $n+1$. $n+2$ points de $\mathbb{P}(V)$ forment un* repère projectif *si tout sous-ensemble de $n+1$ points est projectivement libre.*

Exemple 34 *Dans une droite projective, trois points forment un repère projectif si et seulement si ils sont deux à deux distincts.*

Théorème 2 *Soit $(P_0, \ldots, P_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.*

1. *Il existe des vecteurs $e_0 \in p_0, \dots, e_{n+1} \in p_{n+1}$ tels que $e_{n+1} = e_0 + \cdots + e_n$. Ils sont uniques à un scalaire* commun *près.*
2. *Pour tout $p \in \mathbb{P}(V)$, il existe des coordonnées homogènes $[x_0 : \cdots : x_n]$ uniques à un scalaire commun près, telles que p soit la droite vectorielle de vecteur directeur $x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n$.*

Exercice 35 *Comment les coordonnées homogènes changent-elles quand on permute les points p_i ?*

3.5 Complétion projective d'un espace affine

Le passage des coordonnées X au vecteur $\begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}$ puis aux coordonnées homogènes plonge un espace affine dans un espace projectif. On peut exprimer cette construction de façon indépendante de tout choix de coordonnées.

Théorème 3 *Soit E un espace affine de dimension n, modelé sur un espace vectoriel T. On plonge E comme hyperplan d'équation $\ell(x) = 1$ dans l'espace vectoriel $V = T \times k$, où ℓ est la projection sur le premier facteur, par $x \mapsto (x, 1)$. Puis on compose avec la projection sur $\mathbb{P}(V)$. Le complémentaire de l'image de E est $H = p((T \setminus \{0\}) \times \{0\})$, c'est un hyperplan projectif, naturellement isomorphe à $\mathbb{P}(T)$.*

Inversement, étant donné un espace vectoriel V et une forme linéaire non nulle $\ell : V \to k$, le complémentaire E de l'hyperplan $H = p(\ell^{-1}(0))$ est naturellement un espace affine modelé sur $W = \ell^{-1}(0)$.

Définition 36 *On appelle H l'*hyperplan à l'infini *de l'espace affine E.*

Exemples 37
1. *Si D est une droite affine, son hyperplan à l'infini est réduit à un point, le point à l'infini de D.*
2. *Si E est un espace affine d'hyperplan à l'infini H, à chaque droite affine $D \subset E$ est associé un point $F_D \subset H$, son* point de fuite. *Deux droites ont même point de fuite si et seulement si elles sont parallèles.*
3. *Plus généralement, si $E' \subset E$ est un sous-espace affine, son hyperplan à l'infini s'envoie dans l'hyperplan à l'infini H de E, deux sous-espaces donnent la même sous-variété linéaire de H si et seulement ils sont parallèles.*

Remarque 38 *Soit E un plan affine, D et D' deux droites affines. Soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \subset \mathcal{E}$ les sous-variétés linéaires correspondantes dans la complétion projective de E. Alors $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$ est*

1. *ou bien un point de E, si D et D' sont sécantes,*
2. *ou bien le point de fuite commun de D et D', si elles sont parallèles.*

Fin du cours $n^0 3$

3.6 Applications projectives

Définition 39 *Soient V et V' des espaces vectoriels. Toute application linéaire non nulle $M : V \to V'$ définit une application $f_M : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ définie sur le complémentaire de la sous-variété linéaire $\mathbb{P}(\ker M)$, appelée* application projective *associée.*

Exemple 40 *Toute application affine $E \to E'$ se prolonge en une application projective entre complétions projectives, unique à translation près. L'action sur les hyperplans à l'infini $\mathbb{P}(T) \to \mathbb{P}(T')$ est induite par la partie linéaire, qui envoie T dans T'.*

Exemple 41 *Soient A, $B \subset \mathbb{P}(V)$ des sous-variétés linéaires disjointes, telles que* $\dim A = \operatorname{codim} B - 1$. *Si $p \in \mathbb{P}(V) \setminus A$, il existe une unique droite projective passant par p et coupant à la fois A et B, en des points $f(p)$ et $g(p)$. On appelle f la* projection sur A de centre B *et g la projection sur B de centre A.*

Si A est de dimension 0, on retrouve la prise de vue du cours sur la perspective. Si A est contenu dans l'hyperplan à l'infini, la projection sur B de centre A est affine, c'est la projection sur la partie à distance finie de B, parallèlement au sous-espace vectoriel dont la direction est A.

Proposition 42 *Deux applications linéaires définissent la même application projective si et seulement si elles sont proportionnelles.*

Corollaire 43 *Le groupe $PGl(V)$ des bijections projectives de $\mathbb{P}(V)$ est isomorphe au quotient du groupe linéaire $Gl(V)$ par le sous-groupe k^* des multiples de l'identité, $PGl(V) \simeq Gl(V)/k^*$.*

Proposition 44 *Soit $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Soient $q_0, \ldots, q_{n+1}$ $n+2$ points de $\mathbb{P}(V')$ qui engendrent une sous-variété linéaire W' de dimension $m' \leq n$. Alors il existe une unique application projective $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ envoyant les p_j sur les q_j. De plus,*

1. *f est définie partout (resp. injective) si et seulement si $m' = n$.*
2. *f est surjective si et seulement si $m' = m$, i.e. les points q_j engendrent $\mathbb{P}(V')$.*
3. *f est bijective si et seulement si $m' = m = n$, i.e. $(q_0, \ldots, q_{n+1})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(V')$.*

Exercice 45 *Cas où $n = 1$. Une application projective non constante d'une droite projective est automatiquement définie partout, et c'est une bijection sur une droite de l'espace d'arrivée. Ce n'est pas le cas pour la vue en perspective d'une droite. Expliquer ce qui se passe.*

Définition 46 *Une action d'un groupe G sur un ensemble E est* transitive *s'il n'y a qu'une orbite, i.e. pour tous x, $x' \in E$, il existe $g \in G$ tel que $gx = x'$. Si, de plus, ce g est unique, on dit que l'action est* simplement transitive.

Corollaire 47 *Le groupe projectif $PGl(V)$ agit simplement transitivement sur les repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.*

3.7 Le groupe $PGl(2, k)$

Définition 48 *On note $PGl(n, k) = PGl(k^n)$.*

Lorsque $n = 2$, $PGl(2, k)$ agit sur la droite projective. Sur la droite affine $p(k \times \{1\}) \subset \mathbb{P}^1(k)$, l'action est par *homographies*

$$(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, x) \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Le point $x = -\frac{d}{c}$ est envoyé sur le point $\infty = [1 : 0]$. Celui-ci est envoyé sur $\frac{a}{c}$ si $c \neq 0$, sur lui-même sinon.

Au paragraphe précédent, on a démontré le résultat suivant.

Corollaire 49 *Le groupe $PGl(2, k) = PGl(k^2)$ agit simplement transitivement sur les triplets de points distincts de la droite projective $P^1(k)$.*

Définition 50 *Soient a, b, c, d 4 points de $\mathbb{P}^1(k)$, avec a, b, c distincts. On note $[a, b, c, d]$ le point de $\mathbb{P}^1$, image de d par l'unique homographie h telle que*

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Proposition 51 *1.* $[a,b,c,d] = \frac{(d-b)/(d-a)}{(c-b)/(c-a)}$.

2. *$[a,b,c,d]$ est fonction homographique de chacun des arguments séparément.*
3. *Si h est une homographie, alors $[a,b,c,d] = [h(a), h(b), h(c), h(d)]$.*
4. *Réciproquement, 4 points α, β, γ, δ sont les images de a, b, c, d, par une même homographie si et seulement si $[a,b,c,d] = [\alpha, \beta, \gamma, \delta]$.*
5. *Si d a pour coordonnées homogènes $[x:1]$ dans le repère projectif (a,b,c), alors $x = [a,b,c,d]$.*

Exercice 52 *Comment le birapport est-il transformé quand on permute les points a, b, c, d ?*

Définition 53 *Soit D une droite projective. Soient a, b, c, d 4 points de D, avec a, b, c distincts. On note $[a,b,c,d]$ le point de $\mathbb{P}^1(k)$, image de d par l'unique bijection projective $h : D \to \mathbb{P}^1(k)$ telle que*

$$h : a \mapsto \infty, \quad b \mapsto 0, \quad c \mapsto 1.$$

Par définition, le birapport est invariant par bijection projective.

Fin du cours $n^0 4$

3.8 Sous-groupes de $PGl(n,k)$

Proposition 54 *Soit E un espace affine modelé sur un k-espace vectoriel T, $V = E \oplus k$.*

1. *Soit A le sous-groupe de $PGl(V)$ qui laisse stable l'hyperplan à l'infini. Alors A est isomorphe au groupe affine de E.*
2. *Soit H le sous-groupe qui fixe l'hyperplan à l'infini point par point. Alors H est isomorphe au groupe des homothéties-translations de E.*
3. *On suppose que $k = \mathbb{R}$ et que E est muni d'une structure euclidienne. Alors l'hyperplan à l'infini complexifié $\mathbb{P}(T \otimes \mathbb{C})$ porte une quadrique non dégénérée. Le sous-groupe S de A qui laisse stable cette quadrique est exactement le groupe des similitudes de E.*
4. *Si $\dim E = 2$, cette quadrique est réduite à deux points appelés* points cycliques. *En choisir un des deux revient à choisir une orientation de E. Le sous-groupe S^+ de S qui fixe chacun des points cycliques est exactement le groupe des similitudes directes de E.*

Exercice 55 *Soient D, D' deux droites du plan euclidien, de points de fuite f et f'. Montrer que l'angle θ entre D et D' s'exprime au moyen du birapport des points f, f', c, c' où c et c' sont les points cycliques.*

Solution. $e^{-2i\theta} = [f, f', c, c']$.

3.9 Dualité

Proposition 56 *L'ensemble des hyperplans projectifs de $\mathbb{P}(V)$, c'est $\mathbb{P}(V^*)$. Une fois fixé un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$, un hyperplan est donné par une équation linéaire en coordonnées homogènes. Les coefficients de cette équation constituent des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V^*)$.*

Exercice 57 *Soit Δ une droite d'un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Montrer que l'application $\mathbb{P}(V^*) \to \Delta$, $D \mapsto D \cap \Delta$ est projective.*

Définition 58 *A une droite de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond une famille à un paramètre d'hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ appelée* faisceau d'hyperplans.

Proposition 59 *Un faisceau, c'est l'ensemble des hyperplans qui contiennent une même sous-variété linéaire de codimension 2.*

Exemple 60 *Un faisceau de droites dans le plan, c'est l'ensemble des droites passant par un point.*

Moralité : en géométrie projective plane, points et droites s'échangent. A chaque énoncé concernant des droites correspond un énoncé dual concernant des droites.

Exemple 61 *4 droites concourantes du plan possèdent un birapport. Si, dans un repère, les trois premières ont pour pentes respectives ∞, 0 et 1, alors le birapport est la pente de la quatrième.*

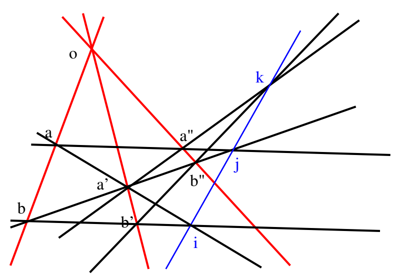
Exercice 62 *Montrer que le birapport de 4 droites concourantes est égal au birapport de leurs points d'intersection avec une cinquième droite qui ne leur est pas concourante.*

Fin du cours $n^0 5$

4 Géométrie projective : propriétés linéaires

4.1 Le théorème de Desargues

Théorème 4 G. Desargues (1639). *Dans un espace projectif, soient D, D', D'' trois droites distinctes et concourantes en o. On choisit sur chacune deux points distincts a et b (resp. a' et b', resp. a'' et b'') et distincts de o. Alors les points $i = aa' \cap bb'$, $j = aa'' \cap bb''$ et $k = a'a'' \cap b'b''$ sont alignés.*



Remarque 63 1. *Les hypothèses garantissent que les droites aa' et bb' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.*

2. *Tout se passe dans la sous-variété linéaire engendrée par les droites D, D' et D'', qui est de dimension au plus égale à 3. Il s'agit donc d'un résultat de géométrie dans l'espace (de dimension 3) ou dans le plan. Paradoxalement, la preuve est plus facile dans l'espace que dans le plan.*

Preuve.

1. Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 3.

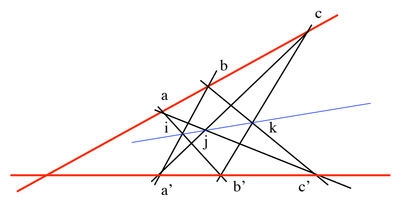
Dans ce cas, les points a, a' et a'' sont projectivement indépendants et engendrent un plan Π. De même, b, b' et b'' engendrent un plan Π'. Ces plans sont distincts. Leur intersection est une droite, qui contient nécessairement les trois points i, j et k.

2. Cas où les droites D, D' et D'' engendrent une sous-variété linéaire de dimension 2.

On plonge cette sous-variété P dans un espace projectif de dimension 3. On remplace D'' par une droite Δ'' passant par o mais non contenue dans P. On applique le théorème de Desargues à D, D' et Δ'', cela donne trois points i, j'' et k'' alignés sur une droite Δ'. On choisit un centre de projection c dans le plan engendré par D'' et Δ'', mais hors des droites Δ', D'' et Δ''. La projection de centre o sur le plan P envoie j'' et k'' sur j et k, donc les points i, j et k sont alignés le long de la projection de Δ'. ■

4.2 Le théorème de Pappus

Théorème 5 Pappus (4e siècle de notre ère). *Dans un plan projectif, soient D et D' deux droites distinctes et concourantes en o. On choisit sur chacune trois points distincts a, b et c (resp. a', b' et c') et distincts de o. Alors les points $i = ab' \cap ba'$, $j = ac' \cap ca'$ et $k = bc' \cap cb'$ sont alignés.*



Remarque 64 *Les hypothèses garantissent que les droites ab' et ba' sont distinctes, et se coupent donc en un point. De même pour les deux autres paires de droites.*

Preuve.

1. Cas où les points i, c et c' ne sont pas alignés.

Dans ce cas, c, c', i et o forment un repère projectif. Soit α (resp. β) la pente de la droite ab' (resp. ba'). Alors

$$c = [1 : 0 : 0], \quad c' = [0 : 1 : 0], \quad i = [0 : 0 : 1], \quad o = [1 : 1 : 1].$$

En coordonnées affines,

$$a = (\alpha^{-1}, 1), \quad b = (\beta^{-1}, 1), \quad a' = (1, \beta), \quad b' = (1, \alpha).$$

Enfin

$$j = ac' \cap ca' = (\alpha, \beta^{-1}), \quad k = bc' \cap cb' = (\beta, \alpha^{-1}).$$

Si le corps de base est commutatif,

$$\beta\alpha^{-1} j = (\beta, \beta\alpha^{-1}\beta^{-1}) = (\beta, \alpha^{-1}) = k,$$

donc les points i, j et k sont sur la droite d'équation $x_0 - \alpha\beta x_1 = 0$.

2. Cas où les points i, c et c' sont alignés.

Choisissons un repère projectif commençant par $c = [1 : 0 : 0]$, $c' = [0 : 1 : 0]$ et $o = [0 : 0 : 1]$. La droite oc (resp. oc') a pour équation $y = 0$ (resp. $x = 0$), donc $a = [\alpha : 0 : 1]$, $b = [\beta : 0 : 1]$, $a' = [0 : \alpha' : 1]$, $b' = [0 : \beta' : 1]$. $i \in cc'$ est sur la droite à l'infini, donc, comme droites affines, ab' et ba' sont parallèles. Par conséquent, $\alpha\alpha' = \beta\beta'$. Alors

$$i = [\alpha : -\beta' : 0], \quad j = [\alpha : \alpha' : 1], \quad k = [\beta : \beta' : 1]$$

sont sur la droite d'équation $\beta' x + \alpha y - \beta'(\alpha + \beta) z = 0$. ■

Remarque 65 *Le deuxième cas ne se produit pas lorsque $k = \mathbb{R}$, mais se produit lorsque $k = \mathbb{C}$.*

4.3 Le théorème fondamental de la géométrie projective

Question. Les bijections projectives sont-elles les seules bijections entre espaces projectifs qui préservent l'alignement des points ? Pas exactement.

Exemple 66 *La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ induit une bijection de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ qui préserve l'alignement.*

En effet, elle se relève en une bijection antilinéaire de $\mathbb{C}^{n+1}$ qui préserve les sous-espaces vectoriels complexes.

Théorème 6 *Soit k un corps, soit $n \geq 2$. Soit $f : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}^n(k)$ une bijection qui envoie les triplets de points alignés sur des triplets de points alignés. Alors il existe un unique automorphisme σ du corps k tel que f se relève en une bijection σ-antilinéaire de k^{n+1}, i.e. un automorphisme F du groupe additif tel que, pour tout $\lambda \in k$,*

$$F(\lambda v) = \sigma(\lambda) F(v).$$

4.4 Géométrie d'incidence

Définition 67 *Une* géométrie d'incidence*, c'est la donnée d'un ensemble $\mathbb{P}$ muni d'une famille non vide de parties non vides appelées* droites*, sujette aux axiomes suivants.*

1. *Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.*
2. *Deux droites distinctes ont un point commun et un seul.*
3. *$\mathbb{P}$ n'est pas la réunion de deux droites.*

Question. Les plans projectifs sont-ils les seules géométries d'incidence ? Pas exactement.

Théorème 7 *Soit $\mathbb{P}$ une géométrie d'incidence satisfaisant au théorème de Desargues. Alors il existe un corps k tel que $\mathbb{P}$ soit isomorphe à $\mathbb{P}^2(k)$.*

Remarque 68
1. *Le corps k n'est pas nécessairement commutatif. Il l'est si et seulement si le théorème de Pappus est vrai dans $\mathbb{P}$.*
2. *Il existe des géométries d'incidences non* arguésiennes*, i.e. qui ne satisfont pas au théorème de Desargues. Par exemple, le plan projectif associé à l'algèbre (non associative) des octonions ou octaves de Cayley.*

5 Un peu de géométrie quadratique

Dans toute cette section, le corps de base est $k = \mathbb{C}$.

5.1 Côniques et quadriques

Définition 69 *Une* quadrique *de $\mathbb{P}(V)$, c'est la projection du lieu des zéros d'une forme quadratique de V. La quadrique est dite* non dégénérée *si la forme quadratique l'est. En dimension 2, on parle de* cônique.

Proposition 70 *Soit $\mathcal{Q}$ la quadrique associée à une forme quadratique non dégénérée q. A multiplication par un scalaire non nul près, q est uniquement déterminée par $\mathcal{Q}$. On peut donc parler du rang d'une quadrique,* $\mathrm{rang}(\mathcal{Q}) = \mathrm{rang}(q)$.

Proposition 71 *En dimension 1, une quadrique dégénérée, c'est un point.*
En dimension 2, une cônique dégénérée est
– *ou bien la réunion de deux droites (rang 2),*
– *ou bien une droite de multiplicité 2 (rang 1).*

Proposition 72 *Le groupe $PGl(V)$ agit transitivement sur l'ensemble des quadriques non dégénérées de $\mathbb{P}(V)$.*

5.2 Plan tangent

Définition 73 *Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique non dégénérée. L'hyperplan projectif* tangent *en p à $\mathcal{Q}$ est $T_p\mathcal{Q} = \mathbb{P}(p^\perp)$. Il satisfait*

$$\mathrm{rang}(\mathcal{Q} \cap T_p\mathcal{Q}) = \mathrm{rang}(\mathcal{Q}) - 1.$$

On verra plus tard que cette notion coïncide avec la notion usuelle de tangence.
Preuve. Comme q est non dégénérée, $\ker(q_{p^\perp}) = (p^\perp)^\perp = p$, donc $\mathrm{rang}(q_{|p^\perp}) = \mathrm{rang}(q) - 1$. ■

Proposition 74 *Soit $\mathcal{Q}$ une quadrique non dégénérée. L'équation homogène de son hyperplan tangent en p s'écrit*

$$\frac{\partial q}{\partial x_0}(p_0, \ldots, p_n)X_0 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial x_n}(p_0, \ldots, p_n)X_n = 0.$$

Autrement dit, les coordonnées homogènes du plan tangent $T_p\mathcal{Q} \in \mathbb{P}(V^*)$ sont les dérivées partielles de q en un $v \in p \subset V$.

Preuve. Fixons une base de V. Soit Q la matrice de q, soit $p = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ la colonne des composantes d'un vecteur directeur p de la droite p. Soit $v \in V$, de composantes $X = \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Alors $q(v) = X^\top QX$, $q(p, v) = p^\top QX$. L'hyperplan tangent est le projectivisé de $p^\perp$, dont l'équation est $p^\top QX = 0$. Or $d_p q = 2p^\top QdX$. ■

Proposition 75 *Soit $\mathbb{P}(V)$ un plan projectif, $\mathcal{C}$ une cônique non dégénérée. Une droite D est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si la quadrique $\mathcal{C} \cap D$ de D est dégénérée.*

La tangente $T_p\mathcal{C}$ coupant $\mathcal{C}$ en un seul point, $\mathcal{C} \cap T_p\mathcal{C}$ est dégénérée. Réciproquement, soit $D = \mathbb{P}(P)$. Supposons $q_{|P}$ dégénérée. Comme $\dim P > \frac{1}{2}\dim V$, P ne peut être totalement isotrope, donc le noyau $p = \ker(q_{|P})$ est de dimension 1, et $P = p^\perp$, donc $D = T_p\mathcal{C}$. ■

Fin du cours $n^0 6$

Exemple 76 *Considérons la cônique affine C d'équation $2x^2+xy-y^2+2x+y-1$. Ce sont les points à distance finie de la cônique projective $\mathcal{C}$ d'équation homogène $2x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_0x_1+x_1x_2+2x_2x_0 = 0$. Sa tangente en $p = [x_0 : x_1 : x_2]$ est la droite d'équation homogène $(4x_0 + x_1 + 2x_2)X_0 + (x_0 - 2x_1 + x_2)X_1 + (2x_0 + x_1 - 2x_2)X_2 = 0$. Si $p = [1 : -1 : 1]$, cela donne $5X_0 + 4X_1 - X_2 = 0$. Ses points à distance finie forment la droite affine d'équation $5x + 4y = 1$, qui est bien la tangente à C en $p = (1, -1)$.*

Exemples 77

1. *En dimension 2, une droite coupe une cônique $\mathcal{C}$ non dégénérée en 2 points, sauf si elle lui est tangente.*
2. *En dimension 3, par tout point d'une quadrique non dégénérée $\mathcal{Q}$ passent 2 droites contenues dans $\mathcal{Q}$.*

Remarque 78 *L'ensemble des hyperplans tangents à une même quadrique $\mathcal{Q}$ est une quadrique de l'espace projectif dual $\mathbb{P}(V^*)$.*

En effet, c'est l'image de $\mathcal{Q}$ par la bijection projective $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$ induite par la différentielle de q, qui est un isomorphisme $V \to V^*$.

5.3 Polarité

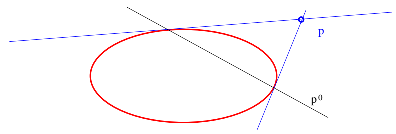
Définition 79 *Fixons une quadrique non dégénérée $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}(V)$. A tout point $p \in \mathbb{P}(V)$ correspond son* hyperplan polaire *p^0, projection de l'hyperplan vectoriel $p^\perp \subset V$. De même, à tout hyperplan correspond un point polaire.*

Proposition 80 *Fixons une cônique non dégénérée $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}(V)$. Soit p un point de $\mathbb{P}(V)$.*

- *Si $p \in \mathcal{C}$, p^0 est la tangente à $\mathcal{C}$ en p.*
- *Si $p \notin \mathcal{C}$, p^0 coupe $\mathcal{C}$ en deux points qui sont les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par p.*

Preuve. Le cas des points de $\mathcal{C}$ résulte de la définition.

Si $p \notin \mathcal{C}$, $V = \mathbb{C}p \oplus p^\perp$ est une somme orthogonale, la restriction de q à $p^\perp$ est non dégénérée, donc la polaire $p^0 = \mathbb{P}(p^\perp)$ coupe Q en deux points distincts u et v. Comme $u \subset p^\perp$ et u est isotrope, u est dans le noyau de la restriction de q au plan P engendré par p et u. Celle-ci est dégénérée, donc pu est tangente à Q. ■



5.4 Paramétrisation unicursale des côniques

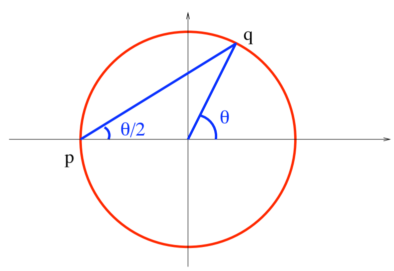
Proposition 81 *Soit $\mathcal{C}$ une cônique non dégénérée. Soit $p \in \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des droites passant par p. L'application $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$, $D \mapsto q$ où $D \cap C = \{p, q\}$ est une bijection* rationnelle, *i.e. donnée en coordonnées homogènes par des fractions rationnelles qui ne s'annulent pas simultanément.*

Définition 82 *On l'appelle* paramétrisation unicursale *de $\mathcal{C}$.*

Exemple 83 *Soit C le cercle unité d'équation affine $x^2+y^2 = 1$ et $p = (-1, 0)$. Une droite passant par p est représentée par la pente t. La paramétrisation obtenue est donnée en coordonnées affines par $t \mapsto (\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})$, ou bien, en coordonnées homogènes, par*

$$[t_0 : t_1] \mapsto [2t_0t_1, t_1^2 - t_0^2, t_1^2 + t_0^2].$$

Dans la formule affine, on reconnait l'expression de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en fonction de $\tan(\theta/2)$.



Proposition 84 *Deux paramétrisations unicursales d'une même cônique non dégénérée diffèrent par une homographie de la droite projective. Par conséquent, on peut parler du* birapport *de 4 points d'une cônique, ainsi que du birapport de 4 tangentes.*

Preuve. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ les faisceaux des droites passant respectivement par o et $o' \in \mathcal{C}$. Il s'agit de déterminer l'application $b : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$, $D \mapsto D' = o'p$ où $D \cap \mathcal{C} = \{o, p\}$. Soit $u = T_o\mathcal{C} \cap T_{o'}\mathcal{C}$, soit v un point de $\mathcal{C}$ distinct de o et o'. Dans le repère projectif (u, o', o, v), l'équation affine de $\mathcal{C}$ est $y = x^2$. En effet, comme $\mathcal{C}$ coupe la droite à l'infini en un point seulement, les points à distance finie de $\mathcal{C}$ forment une parabole, celle-ci est tangente à l'axe ox en $o = (0, 0)$ et passe par $v = (1, 1)$. La droite $D_t \in \mathcal{F}$ de pente t coupe $\mathcal{C}$ en o et en $p = (t, t^2)$. La droite $b(D_t) = o'p$ a pour équation $\{x = t\}$. La correspondance b est l'identité dans des paramétrisation homographiques de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, c'est donc une homographie.

On peut aussi montrer qu'une bijection rationnelle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est automatiquement une homographie. On donnera au paragraphe suivant une troisième preuve (encore plus abstraite) de ce fait. ∎

Exercice 85 *Soient a, b, c et d 4 points d'une cônique non dégénérée $\mathcal{C}$. Montrer que le birapport des tangentes est égal à celui des points,*

$$[T_a\mathcal{C}, T_b\mathcal{C}, T_c\mathcal{C}, T_d\mathcal{C}] = [a, b, c, d].$$

Remarque 86 *Lien avec les formules trigo. Lien avec les triangles rectangles à côtés entiers.*

Fin du cours $n^0 7$

5.5 Le groupe $PO(3,\mathbb{C})$

Définition 87 *On note $PO(3,\mathbb{C})$ le sous-groupe de $PGl(3,\mathbb{C})$ qui laisse stable la cônique non dégénérée d'équation homogène $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$.*

Pour en savoir plus sur ce groupe, on va étudier une cônique naturelle, c'est l'ensemble des quadriques dégénérées de la droite projective.

Remarque 88 *Soit $\mathbb{P}(V)$ une droite projective. L'espace des quadriques de $\mathbb{P}(V)$ est un plan projectif $\mathbb{P}(S^2V^*)$, et les quadriques dégénérées forment une cônique non dégénérée $\mathcal{QD}\subset\mathbb{P}(S^2V^*)$.*

En effet, l'espace S^2V^* des formes bilinéaires symétriques sur V est de dimension 2, le déterminant d'une matrice symétrique 2×2 est une forme quadratique non dégénérée. A une constante près, elle est invariante par chaque élément du groupe linéaire de V.

Corollaire 89 *Le stabilisateur d'une cônique non dégénérée $\mathcal{C}$ agit transitivement sur le complémentaire de $\mathcal{C}$ ainsi que sur l'ensemble des droites non tangentes à $\mathcal{C}$.*

Preuve. Pour la cônique naturelle $\mathcal{QD}$, le complémentaire est l'ensemble des quadriques non dégénérées, sur lequel l'image du groupe $PGl(V)$ dans $PGl(S^2V^*)$ agit déjà transitivement. ■

Remarque 90 *Dans une droite projective $\mathbb{P}(V)$, une quadrique dégénérée, c'est un point de $\mathbb{P}(V)$. La bijection obtenue $b:\mathbb{P}(V)\to\mathcal{QD}$ préserve le birapport.*

En fait, b est une paramétrisation unicursale de $\mathcal{QD}$. Fixons un point $o\in\mathbb{P}(V)$, ainsi qu'un vecteur directeur $z\in o$. Etant donné $v\in V$, la forme linéaire sur S^2V^* définie par $q\mapsto q(z,v)$ dépend linéairement de q. Cela donne une application linéaire injective $V\to(S^2V^*)^*$, donc une application projective $\iota:\mathbb{P}(V)\to\mathbb{P}((S^2V^*)^*)$. Cette application est une paramétrisation projective du faisceau $\mathcal{F}$ des droites de l'espace des quadriques qui passent par le point $b(o)$. En effet, $b(o)$ est représenté par les formes quadratiques q dont le noyau est o, ces formes satisfont $q(z,v)=0$ pour tout v. Pour la même raison, la droite $\iota(p)$ coupe $\mathcal{QD}$ en $b(p)$.

Calculatoirement, une quadrique affine de la droite, c'est le lieu des zéros d'un trinôme $x\mapsto x^2+2bx+c$. A chaque point a de la droite affine correspond la quadrique dégénérée $b(a):x\mapsto(x-a)^2$. La droite $b(0)b(a)$ (dans l'espace affine des quadriques affines), est paramétrée par $t\mapsto(1-t)b(0)+tb(a)=x\mapsto x^2-2tax+ta^2$, autrement dit, $b=-ta$, $c=ta^2$. Elle est donnée par l'équation affine $c=-ab$, autrement dit, sa pente est $-a$, c'est bien une fonction homographique de a.

Corollaire 91 *Toute bijection d'une cônique non dégénérée qui préserve le birapport s'étend de façon unique en une bijection projective du plan projectif.*

Preuve. Pour la cônique naturelle $\mathcal{QD}$, une bijection projective est réalisée par un élément de $PGl(V)$, qui agit déjà sur $\mathbb{P}(S^2V^*)$. L'unicité vient du fait que 4 points distincts d'une cônique forment un repère projectif. ■

Remarque 92 *Soit $PO(\mathcal{QD})$ le sous-groupe du groupe projectif $PGl(S^2V^*)$ qui laisse stable la quadrique $\mathcal{QD}$. Alors $PO(\mathcal{QD})$ est isomorphe à $PGl(V)$.*

Corollaire 93 *Les groupes $PGl(2,\mathbb{C})$ et $PO(3,\mathbb{C})$ sont isomorphes.*

Remarque 94 *Que se passe-t'il si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?*

Fin du cours $n^0 8$

5.6 Division harmonique

Définition 95 *On appelle* involution *une homographie h d'une droite projective telle que $h \circ h = id$ mais $h \neq id$.*

Exemple 96 *Une quadrique non dégénérée d'une droite projective, c'est une paire de points distincts $\mathcal{Q} = \{a, b\}$. La polarité $p \mapsto p^0$ par rapport à $\mathcal{Q}$ est une involution. Elle fixe a et b.*

Proposition 97 *Toute involution de la droite projective fixe deux points distincts a et b, et coïncide avec la polarité par rapport à la quadrique $\mathcal{Q} = \{a, b\}$.*

Preuve. Soit i une involution de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Alors i se relève en un endomorphisme I de $\mathbb{C}^2$ tel que I^2 est un multiple de l'identité. Par conséquent, I est diagonalisable. Comme I n'est pas un multiple de l'identité, ses valeurs propres sont distinctes, donc i fixe deux points distincts a et b. Comme $i(i(p)) = p$, $[a, b, p, i(p)] = [a, b, i(p), p]$, donc $[a, b, p, i(p)]^2 = 1$.

1. Ou bien $[u, v, p, i(p)] = 1$, i.e. $i(p) = p$. Alors i est l'identité, contradiction.
2. Ou bien $[a, b, p, i(p)] = -1$, ce qui détermine i uniquement. ■

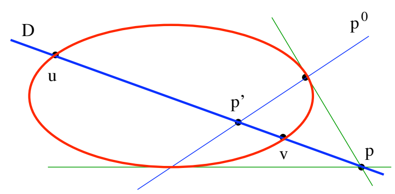
Cette preuve suggère la définition suivante.

Définition 98 *On dit que 4 points a, b, c et d d'un droite projective forment une* division harmonique *si $[a, b, c, d] = -1$. Dans ce cas, on dit aussi que c et d sont* conjugués harmoniques *par rapport à la paire $\{a, b\}$.*

Remarque 99

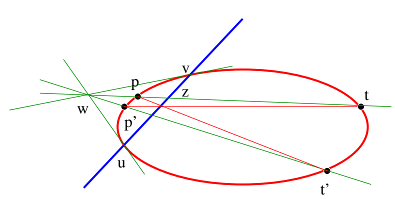
1. *Si (a, b, c, d) forment une division harmonique d'une droite projective, il en est de même de (a, b, d, c), (b, a, c, d) et (c, d, a, b).*
2. *4 points (a, b, c, d) d'une droite projective forment une division harmonique si et seulement si d est le polaire de c par rapport à la quadrique $\mathcal{Q} = \{a, b\}$.*
3. *Dans la projectivisée d'une droite affine, le conjugué harmonique du point à l'infini par rapport à la paire $\{a, b\}$ est le milieu de $\{a, b\}$.*

Exemple 100 *Soit $\mathcal{C}$ une cônique non dégénérée du plan. Soit D une droite qui coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts u et v. Pour tout $p \in D$, le conjugué harmonique p' de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de D est $D \cap p^0$.*



Exercice 101 *Soit $\mathcal{C}$ une cônique non dégénérée du plan. Soient u et v deux points distincts de $\mathcal{C}$, soit w le point polaire de la droite uv.*

1. *Pour tout $p \in \mathcal{C}$, $t = pw \cap \mathcal{C}$ est conjugué harmonique de p par rapport à $\{u, v\}$ le long de $\mathcal{C}$.*
2. *Soient p, $p' \in \mathcal{C}$, t, t' leurs conjugués harmoniques par rapport à $\{u, v\}$ le long de $\mathcal{C}$. Alors les droites tp' et $t'p$ se coupent en un point de la droite uv.*



Solution. Soit $z = uv \cap wp$, $t = wp \cap \mathcal{C}$. Alors (w, p, z, t) est une division harmonique de la droite wp. Par conséquent, (vw, vp, vz, vt) est une division harmonique du faisceau des droites passant par v. Ces droites coupent donc la cônique $\mathcal{C}$ en une division harmonique (v, p, u, t). Par conséquent, $t = i(p)$ où i est l'involution homographique qui fixe u et v. Comme toute homographie de $\mathcal{C}$, i se prolonge en une bijection projective du plan qui préserve $\mathcal{C}$. Celle-ci fixe chaque point de la droite uv donc $pt' \cap uv = i(pt' \cap uv) = tp' \cap uv$. ■

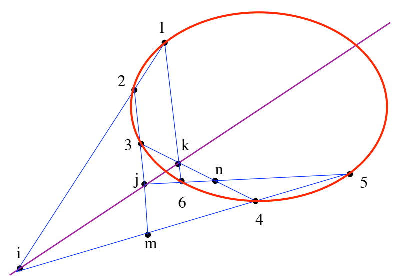
5.7 L'hexagramme mystique de Pascal

Remarque 102 *5 points du plan projectif sont en position générale si trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Par 5 points en position générale passe une et une seule cônique non dégénérée. Et par 6 points ?*

Lemme 103 *Soient, sur deux droites distinctes D et D', sécantes en a, des points distincts b, c et d (resp. b', c' et d'), supposés tous distincts de a. Alors les droites bb', cc' et dd' sont concourantes si et seulement si $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$.*

Preuve. Si les droites bb', cc' et dd' sont concourantes en z, la projection de centre z de D sur D' est une bijection projective, donc elle préserve le birapport. Réciproquement, soit $z = bb' \cap cc'$, soit $d'' = D' \cap dz$. Alors $[a, b, c, d] = [a, b', c', d'']$. Si on suppose que $[a, b, c, d] = [a, b', c', d']$, alors $[a', b', c', d''] = [a, b', c', d']$, ce qui entraîne que $d'' = d'$. Autrement dit, bb', cc' et dd' sont concourantes. ■

Théorème 8 B. Pascal (1640). *Les côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une cônique non dégénérée se coupent suivant des points alignés. Autrement dit, si* $1, 2, \ldots, 5, 6$ *sont des points distincts sur la cônique, alors les points* $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ *et* $k = 34 \cap 61$ *sont alignés. Réciproquement, tout hexagone dont les côtés opposés se coupent en des points alignés est inscrit dans une cônique non dégénérée.*



Preuve. Soient $m = 23 \cap 45$ et $n = 34 \cap 56$. Alors

$$[i, m, 4, 5] = [21, 23, 24, 25] = [1, 3, 4, 5] = [61, 63, 64, 65] = [k, 3, 4, n],$$

où le birapport du milieu est calculé sur la conique. D'après le lemme, cela entraîne que les droites ik, $m3 = 23$ et $5n = 56$ sont concourantes. Autrement dit, le point $j = 23 \cap 56$ appartient à la droite ik.

Réciproquement, soient $1, 2, \ldots, 5, 6$ des points du plan projectif en position générale, tels que les points $i = 12 \cap 45$, $j = 23 \cap 56$ et $k = 34 \cap 61$ sont sur une même droite D. Soit $\mathcal{C}$ l'unique conique non dégénérée passant par $1, 2, \ldots, 5$. La droite 56 coupe $\mathcal{C}$ en un second point noté 7. Comme l'hexagone $1, 2, \ldots, 5, 7$ est inscrit dans $\mathcal{C}$, les points i, j et $k' = 34 \cap 71$ sont alignés, donc $k' \in D$, $k' = D \cap 56 = k$, et enfin $6 = 1k \cap 56 = 1k' \cap 56 = 7$ est sur $\mathcal{C}$. ■

Exercice 104 *Quel est l'énoncé dual du théorème de Pascal ?*

Exercice 105 *Que devient le théorème de Pascal quand la conique dégénère vers une paire de droites distinctes ?*

Fin du cours $n^0 9$