Surfaces NURBS : solutions des exercices

Pierre Pansu

May 18, 2004

Exercice 1 *Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour un quart de cylindre droit d'axe vertical, de hauteur h et de section circulaire de rayon 1 et pour un huitième de la sphère unité.*

Solution de l'exercice 1. *Un cylindre de section circulaire, un huitième de sphère comme surface NURBS.*

Le cylindre est la surface de révolution balayée par la rotation autour de l'axe Oz du segment d'extrémités $P_{00} = (1, 0, 0)$ et $P_{01} = (1, 0, h)$. Le segment est une courbe de Bézier de degré 1. D'après la proposition **??**, le polyèdre $P_{20} = (0, 1, 0)$, $P_{21} = (0, 1, h)$ et les poids $w_{0j} = w_{1j} = 1$, $w_{2j} = 2$ conviennent.

Le huitième de sphère est la surface de révolution balayée par la rotation autour de l'axe Oz du quart de cercle d'extrémités $P_{00} = (1, 0, 0)$ et $P_{02} = (0, 0, 1)$. Le quart de cercle est une courbe de Bézier rationnelle de degré 2, avec un troisième point de contrôle $P_{01} = (1, 0, 1)$ et des poids $w'_i = 1, 1, 2$. D'après la proposition **??**, le polyèdre $P_{20} = (0, 1, 0)$, $P_{21} = (0, 1, 1)$ $P_{22} = (0, 0, 1)$, $P_{10} = (1, 1, 0)$, $P_{11} = (1, 1, 1)$, $P_{12} = (0, 0, 1)$ et les poids $w_{ij} = w'_i w'_j$ conviennent. Autrement dit, les points de contrôle sont certains des sommets du cube unité, et trois d'entre eux sont confondus. D'ailleurs, la paramétrisation est dégénérée au pôle nord.

Exercice 2 *Soit V un vecteur de $\mathbf{R}^3$. Soit γ une courbe NURBS dans $\mathbf{R}^3$. Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour la surface balayée par la translation de γ le long de V.*

Solution de l'exercice 2. *Extrusion d'une courbe NURBS.*

La surface cherchée peut être paramétrée par

$$(u, v) \mapsto X(u, v) = (1 - u)\gamma(v) + u(\gamma(v) + V).$$

Or $B_{0,1}(u) = 1 - u$ et $B_{1,1}(u) = u$ sont les polynômes de Bernstein de degré 1. Soit P_{0j} le polygone de contrôle et w_j les poids de γ. Posons $P_{1j} = P_{0j} + V$. Il vient

$$\begin{aligned}
X(u, v) &= B_{0,1}(u)\frac{\sum_j B_{j,k}(v) w_j P_{0j}}{\sum_j B_{j,k}(v) w_j} + B_{1,1}(u)(\frac{\sum_j B_{j,k}(v) w_j (P_{0j} + V)}{\sum_j B_{j,k}(v) w_j}) \\
&= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u) B_{j,k}(v) w_j P_{ij}}{\sum_j B_{j,k}(v) w_j} \\
&= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u) B_{j,k}(v) w_j P_{ij}}{\sum_j B_{i,1}(u) B_{j,k}(v) w_j}
\end{aligned}$$

donc X est la surface NURBS associée au polygone de contrôle P_{ij} où P_{1j} s'obtient en translatant P_{0j} de V, et aux noeuds $w_{ij} = w_{0j}$.

Exercice 3 *Soit Q un point de $\mathbf{R}^3$. Soit γ une courbe NURBS dans $\mathbf{R}^3$ ne passant pas par Q. Déterminer le polyèdre de contrôle et les poids pour le cône de sommet Q sur γ, i.e. la réunion des segments reliant Q aux point de γ.*

Solution de l'exercice 3. *Cône sur une courbe NURBS.*

La surface cherchée peut être paramétrée par

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = (1-u)\gamma(v) + uQ.$$

Or $B_{0,1}(u) = 1-u$ et $B_{1,1}(u) = u$ sont les polynômes de Bernstein de degré 1. Soit P_{0j} le polygone de contrôle et w_j les poids de γ. Posons $P_{1j} = Q$ pour tout j. Il vient

$$\begin{aligned} X(u,v) &= B_{0,1}(u)\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j P_{0j}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} + B_{1,1}(u)(\frac{\sum_j B_{j,k}(v)w_j Q}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j}) \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{j,k}(v)w_j} \\ &= \frac{\sum_{i,j} B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j P_{ij}}{\sum_j B_{i,1}(u)B_{j,k}(v)w_j} \end{aligned}$$

donc X est la surface NURBS associée au polygone de contrôle P_{ij} où $P_{1j} = Q$ et aux noeuds $w_{ij} = w_{0j}$.