Université de Paris XI | **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques | **1er semestre 05/06**

Feuille d'Exercices 2

Dérivées–Théorème des accroissements finis

Les exercices marqués d'une *star* sont facultatifs.

Exercice 2.1.— Calculer les dérivées des fonctions (on donnera les domaines de définition) :

$$f(x) = \sqrt{1 + (x\cos x)^2}, \qquad g(x) = \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) + 1}{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1},$$

$$h(x) = \ln(\tan x), \qquad k(x) = \frac{x^4}{(1+x)^4}.$$

Exercice 2.2.— Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin(f(x)^2)$ et $x \mapsto \sin(f(x^2))$.
b) On suppose que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée de $x \mapsto \ln(|f(x)|)$.

Exercice 2.3.— En utilisant la définition, calculer la dérivée de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ au point $x_0 = 2$.

Exercice 2.4.— Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x|x|, \quad g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}, \quad h(x) = \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 2.5.— La fonction $x \mapsto \cos|x|$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 2.6.— Déterminer les nombres réels a et b pour que la fonction f soit dérivable en 0. On donne

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + a & \text{si} \quad x \geq 0 \\ bx + 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2.7.— Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$. Montrer que le graphe de f admet deux tangentes parallèles à la droite d'équation $y = -3x$.

Exercice 2.8.— Étudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 2.9.—
1. Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

3. Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

Exercice 2.10.— Montrer que le rectangle d'aire maximale à périmètre fixé est le carré. Que vaut son aire en fonction du périmètre ?

Exercice 2.11.— Trouver les dimensions d'un cylindre (une boite de conserve !) de surface minimale pour un volume fixé.

⋆ **Exercice 2.12.— Loi de Snell-Descartes**

Un maitre nageur assis sur sa chaise C aperçoit un nageur en train de se noyer en N. En supposant que sur le sable le maitre-nageur court à vitesse constante v_i, que dans l'eau, il nage à vitesse constante v_r et en supposant que le rivage est rectiligne,

1. Montrer qu'il existe un unique trajet optimisant le temps de parcours de C à N traversant le rivage au point R.

Faire un dessin en prenant pour axe des abscisses le rivage et écrire le temps de parcours en fonction de l'abscisse x

2. On appelle α_i l'angle entre (CR) et la perpendiculaire au rivage et α_r l'angle entre (NR) et la perpendiculaire. Donner une relation liant v_i, v_r, $\sin \alpha_i$, $\sin \alpha_r$.

Réécrire la condition de minimalité du point R avec ces paramètres, il faut peut-être être plus précis quant à la définition des angles

⋆ **Exercice 2.13.—** **1.** On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, admet un maximum local en a, que peut-on dire de $f'(a)$?

2. Donner des exemples simples où $f'(a) < 0$.

Exercice 2.14.— **1.** Calculer la dérivée de $x \mapsto (x^2 + 1) \sin x$.

2. Montrer que l'équation $(x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x = 0$ admet au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 2.15.— Soit f la fonction définie par $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$. Démontrer, sans grands calculs, que l'équation $f'(x) = 0$ d'inconnue réelle x admet exactement trois solutions.

Exercice 2.16.— Montrer les inégalités suivantes

1. Pour tous réels a et b, $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

2. Pour tous réels x et h, $|\cos(x + h) - \cos x| \leq |h|$

3. Pour tout réel x, $|e^{2x} - e^x| \leq |x|e^{2|x|}$

Exercice 2.17.— En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$ démontrer que

1. pour tout réel x on a $e^x \geq 1 + x$;

2. pour tout $x > -1$ on a $\ln(1 + x) \leq x$.

⋆ **Exercice 2.18.—** **1.** A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$.

3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

4. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

⋆ **Exercice 2.19.—** A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

⋆ **Exercice 2.20.—** Étant donné α un nombre réel **non nul**, montrer que pour tout entier naturel $n \neq 0$

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un encadrement de la quantité $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1-\alpha}}$, ($N$ est un entier naturel ≥ 1). Quelle est la limite de cette quantité lorsque $N \to +\infty$?

Exercice 2.21.— Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ et donner une formule pour sa dérivée sur cet ensemble.

2. Quelle est la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 1$? La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

⋆ **Exercice 2.22.—** Soit a, b deux réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = a(x^2 - 1) + b \text{ si } x > 1.$$

Déterminer a et b de manière à ce que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

⋆ **Exercice 2.23.— Introduction à la convexité.**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non trivial et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que f', la dérivée de f est croissante sur I.

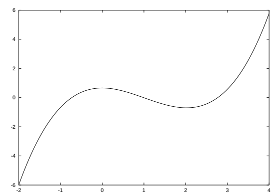
1. Montrer que si $x, y, z \in I$, $x < y < z$ alors $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$.
Indication :Sur un schéma, indiquer les cordes au graphe de f dont les deux quantités précédentes sont les coefficients directeurs

2. Soient $x, z \in I$, montrer qu'un nombre y est strictement entre x et z si et seulement si il existe $t \in]0, 1[$ tel que $y = t.x + (1-t).z$. En déduire que pour tout $t \in]0, 1[$,

$$f(t.x + (1-t).z) \leq t.f(x) + (1-t).f(z).$$

3. Interpréter géométriquement cette inégalité en termes de position du graphe de f par rapport à l'une quelconque de ses cordes.

La fonction représentée schématiquement par le graphe ci-contre relève-t-elle du contexte de cet exercice ?



4. Montrer, en se servant des question précédentes les inégalités suivantes.

(i) Pour tous $x, y > 0$, tout $p \geq 1$, $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$

(ii) Montrer que pour tous $x, y > 0$, tout $0 < t < 1$, $x^{1-t}.y^t \leq (1-t).x + t.y$. Vérifier que pour $t = \frac{1}{2}$, cette inégalité peut se démontrer directement à l'aide d'une identité remarquable bien connue.

(iii) Montrer que la fonction $f(x) = x\ln(x)$ définie sur $I =]0, +\infty[$ a une dérivée croissante. Quelle inégalité obtient-on alors naturellement ?