

Chapitre 3

Distributions

3.1 Introduction

Il y a plusieurs raisons pour introduire la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même) alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques.

3.1.1 Unité pour la convolution.

Comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de la convolution des fonctions intégrables, il n'y a pas de fonction intégrable Δ qui puisse servir d'unité pour le produit de convolution de ces fonctions. Dans l'espace des distributions, il y a effectivement une telle distribution unité pour le produit de convolution : c'est la distribution de Dirac, qui satisfait à

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

3.1.2 Densité de charge d'une charge ponctuelle

En électrostatique, le potentiel électrique $V(\vec{r})$ en un point \vec{r} donné de l'espace, pour une distribution de charge de densité $\rho(\vec{r})$ donnée est solution de l'équation de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{r}).$$

La question qu'on se pose est de savoir ce que signifie cette équation dans la limite où la charge, source du potentiel, peut d'une manière physiquement raisonnable être assimilée à une charge ponctuelle. On sait que dans ce cas le potentiel créé (mesuré physiquement) est un potentiel en $\frac{1}{r}$. L'équation de Laplace pose par contre dans ce cas un problème mathématique sérieux : quelle est la densité de charge d'une charge ponctuelle ? La réponse la plus simple se trouve naturellement dans la théorie des distributions. La densité d'une telle charge est en fait proportionnelle à une distribution de Dirac située au point où se trouve la charge électrique.

3.1.3 Mesure d'une grandeur physique

Considérons la mesure d'une grandeur physique relativement courante comme la température d'un fil rectiligne "en un point donné". On peut se convaincre que pour des raisons évidentes, une telle mesure n'est jamais réalisable parfaitement. Tout thermomètre, quel que soit le principe physique utilisé pour la mesure, possède une *extension spatiale* qu'il est impossible de réduire à celle d'un point : ce qu'il faudrait réaliser pour pouvoir mesurer la température en *un point* x_0 . On peut cependant admettre, dans le cas d'une mesure réaliste de température, que le thermomètre prend en compte toutes les températures dans un "voisinage" du point x_0 selon une fonction de sensibilité ϕ_0 (fig.1.) de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la température le

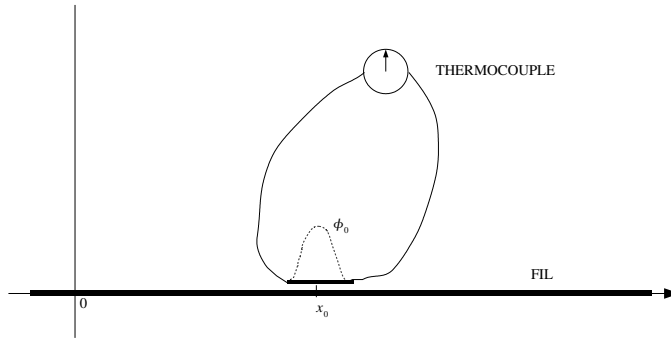


FIG. 3.1 – Mesure d’une température le long d’une barre

long de la barre (fonction dont on ignore *a priori* ce qu’elle vaut *vraiment* en un point précis de la barre), on puisse dire que la température mesurée T sera en fait

$$T_0 = \int T(x)\phi_0(x) dx.$$

Si on effectuait la mesure en un autre point x_1 on obtiendrait

$$T_1 = \int T(x)\phi_1(x) dx$$

etc...

On voit que la température mesurée T , dans l’hypothèse où les fonctions $T(x)$, ϕ_0 , ϕ_2 etc... sont suffisamment régulières, se présente sous la forme d’une expression linéaire en la fonction de sensibilité ϕ . On peut noter avantageusement cette expression sous la forme

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx$$

Lorsque le produit $x \mapsto T(x)\phi(x)$ est intégrable Lebesgue, cette écriture est parfaitement justifiée. Cependant, dans beaucoup de cas concrets, la grandeur physique en question (ici il s’agirait de $T(x)$) se révèle être trop *singulière* pour que l’intégrale écrite puisse avoir un sens quelconque avec un choix réaliste pour la fonction ϕ .

Partant de cet échec, on a progressivement abstrait l’idée de concepts mathématiques qui ne préserveraient que l’indispensable de l’expression

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx,$$

partant d’un ensemble de fonctions ϕ représentant de manière suffisante toutes les mesures d’une grandeur physique donnée qu’il est possible d’effectuer. L’ensemble des fonctions ϕ prend alors naturellement le nom d’ensemble de **fonctions “test”** ou **fonctions “d’essai”**. La mesure d’une grandeur physique T est alors représentée par le “crochet”

$$\langle T, \phi \rangle$$

indépendamment d'une forme intégrale ou non pour cette expression. L'ensemble des grandeurs T "mesurables" par les fonctions d'essai prend alors le nom générique de **distributions**.

Quel doit être le minimum exigé pour les objets ainsi considérés ?

1. L'ensemble des fonctions d'essai constitue un *espace vectoriel de fonctions*. C'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions d'essai est encore une fonction d'essai.
2. L'ensemble des distributions est l'ensemble des **formes linéaires** sur l'espace vectoriel des fonctions d'essai.
3. Le résultat de la mesure de T par ϕ est alors le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$.

Remarque. Dans un esprit d'utilisation pratique (et élémentaire) des distributions, nous réduisons ici, les considérations d'analyse fonctionnelle au minimum. Pour cette raison, nous considérerons que **toutes** les formes linéaires sur nos espaces de fonctions test sont des formes linéaires *continues*. Mathématiquement on sait que de telles formes linéaires non continues existent, mais comme personne n'a réussi, à ce jour, à les écrire explicitement, nous ferons comme si elles n'existaient pas !

3.2 L'espace des fonctions d'essai \mathcal{D}

Choisissons pour commencer un espace de fonctions test qui présente toutes les caractéristiques nécessaires aussi bien physiques que mathématiques.

Définition 1 Les fonctions test $x \mapsto \phi(x)$ sont définies pour x réel et sont à valeurs complexes. On exige d'elles qu'elles soient indéfiniment dérivables pour toutes les valeurs de x (elles sont donc C^∞). Elles sont de plus, nulles en dehors d'un intervalle borné. L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ou simplement \mathcal{D} .

L'ensemble des fonctions test de \mathcal{D} constitue un espace vectoriel sur \mathbf{C} . On peut se convaincre que ce sont là des propriétés raisonnables pour des fonctions de sensibilité d'appareil.

Exemple 2 La fonction ξ_a définie par

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exemple 3 Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de \mathcal{D} , alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} .

On montre (voir au paragraphe 3.11.1) que la classe de toutes les fonctions α telles que $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} quel que soit ϕ appartenant à \mathcal{D} , est précisément l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ .

Remarque 4 Pour ceux qui veulent en savoir plus, il faut dire qu'il est possible de définir une notion de proximité entre deux fonctions de \mathcal{D} . C'est ce qu'on désigne sous le nom de topologie sur \mathcal{D} (voir au paragraphe 3.11.2).

Exemple 5 Soient f une fonction intégrable sur \mathbf{R} , nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors leur produit de convolution

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\phi(x-t) dt$$

est une fonction de \mathcal{D} .

Exemple 6 Soit ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans \mathcal{D} . On rappelle que

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x - a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exemple 7 Les fonctions d'essai de \mathcal{D} ainsi que toutes leurs dérivées sont intégrables et bornées.

Ces deux propriétés sont souvent utilisées dans les calculs.

3.3 L'espace des distributions \mathcal{D}'

En accord avec la discussion de l'introduction, nous définissons les distributions de la façon suivante.

Définition 8 Une distribution est une application T qui à chaque fonction de \mathcal{D} fait correspondre un nombre complexe $T(\phi)$ FINI qui vérifie la propriété suivante

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$$

pour tous nombres complexes a et b et toutes fonctions d'essai ϕ et ψ dans \mathcal{D} .

Remarque 9 En termes algébriques, on voit donc qu'une distribution T est une **forme linéaire** sur l'espace vectoriel \mathcal{D} . D'où la notation \mathcal{D}' qui indique que l'espace des distributions est en fait **un espace dual** de l'espace vectoriel des fonctions d'essai (voir au paragraphe 3.11.3).

En théorie des distributions on note en général $T(\phi)$ sous la forme $\langle T, \phi \rangle$ et on dit que la distribution T est appliquée à ϕ . Ceci est en conformité avec notre notation de l'introduction qui exprime le fait qu'on peut dire que physiquement $\langle T, \phi \rangle$ est le résultat d'une mesure "par ϕ " de la distribution T .

L'espace des distributions \mathcal{D}' est aussi un *espace vectoriel* sur \mathbf{C} , il suffit pour cela de définir la somme $T_1 + T_2$ de deux distributions ainsi que le produit aT d'un nombre complexe a et d'une distribution T . On définit

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} , et

$$\langle aT, \phi \rangle = a \langle T, \phi \rangle .$$

pour tout nombre complexe a et tout ϕ dans \mathcal{D} .

La *distribution nulle*, quant à elle, est définie par

$$T = 0 \iff \langle T, \phi \rangle = 0$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} .

Remarquons qu'une telle définition est parfaitement raisonnable du point de vue expérimental puisqu'elle veut dire qu'une quantité physique est nulle si et seulement si n'importe quelle mesure représentée par ϕ donne un résultat nul.

Mise en garde. Il n'est pas question de définir le produit de deux distributions quelconques entre elles car cela, on le verra par la suite, ne peut se faire que dans des cas **extrêmement limités**. Ce dernier point est bien entendu une des tares principale de la théorie des distributions et limite ainsi leur utilisation aux *problèmes linéaires*. Il touche d'ailleurs aux aspects les plus fondamentaux de la physique quantique moderne.

3.3.1 Les distributions régulières

Définition 10 Une fonction f est dite **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout intervalle borné (fini). On note $f \in L^1_{loc}$ cette propriété.

Exemple 11 À toute fonction localement intégrable on peut associer une distribution définie par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ dans \mathcal{D} .

Exemple 12 Étant données deux fonctions localement intégrables f et g égales presque partout, i.e.

$$f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x,$$

les distributions associées sont égales,

$$T_f = T_g.$$

La réciproque est aussi vraie (voir au paragraphe 3.11.4). D'où

Théorème 1

$$T_f = 0 \iff f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x.$$

Définition 13 Une distribution T est **régulière** si elle est associée à une fonction localement intégrable f .

Notation 14 Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter T_f tout simplement f .

Par contre la notation $f(x)$, tolérée pour une fonction f l'est moins pour la distribution T_f , car elle laisse croire à tort qu'il est possible de connaître la valeur d'une distribution en un point précis x (elle est cependant utilisée!).

Exemple 15 C'est ainsi que nous définissons la distribution (régulière) constante C par

$$\langle C, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} C\phi(x) dx = C \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ . En particulier $C = 0$ définit la distribution (régulière) nulle.

Exemple 16 De même, la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

définit la distribution de Heaviside H par

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} H(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^+} \phi(x) dx,$$

et la fonction $2H(x) - 1 = \text{sgn}(x)$ définit la distribution ϵ , qui est aussi notée sgn_x .

3.3.2 Distributions non régulières

Définition 17 Toute distribution qui n'est pas régulière est dite non régulière.

Exemple 18 La distribution de Dirac à l'origine δ est définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Elle n'est pas régulière.

Exemple 19 La distribution de Dirac δ_{x_0} au point $x_0 \in \mathbf{R}$ est définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Mise en garde. Les ouvrages de Physique et d'Électronique utilisent dans leur grande majorité la notation $\delta(x)$ pour la distribution δ et $\delta(x - x_0)$ pour la distribution δ_{x_0} . Cette notation est une source d'erreur constante dans les calculs, puisqu'elle laisse supposer que ces distributions ont une valeur donnée en un point donné. Pour éviter les erreurs, il est donc fortement recommandé d'effectuer les calculs au sens des distributions, quitte à présenter ensuite les formules finales comme le font traditionnellement les physiciens et les électroniciens.

Exemple 20 La forme linéaire $vp\frac{1}{x}$ définie par

$$\langle vp\frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x < -\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{x > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \right]$$

pour toute fonction d'essai ϕ , est une distribution non régulière.

3.4 Suites et séries de distributions

3.4.1 Limite d'une suite de distributions.

Définition 21 On dit que la suite de distributions $\{T_n\}_0^\infty$ de \mathcal{D}' , converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $\langle T_n, \phi \rangle$ tend vers le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$ pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

On écrit cela sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D})T_n = T.$$

Ce qui, d'après la définition est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

Remarque 22 Si cette distribution limite T existe, elle est unique.

Remarque 23 Si on peut trouver un nombre $K(\phi)$ qui dépend de la fonction d'essai ϕ choisie et qui est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = K(\phi)$$

Alors la suite de distributions T_n tend vers la distribution T , et on a

$$\langle T, \phi \rangle = K(\phi).$$

Remarque 24 *Du point de vue expérimental, cette limite au sens des distributions veut dire que pour n suffisamment grand la mesure par ϕ de la grandeur T_n donne pratiquement la même valeur que celle de T . Il ne devient plus possible de distinguer expérimentalement ces deux distributions.*

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une *distribution régulière*.

Exercice 25 *Montrer que si T_λ est la distribution associée à la fonction $\sin \lambda x$, on a*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_\lambda = 0.$$

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une *distribution non régulière*.

Exercice 26 *On définit la fonction porte Π par*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on pose $g_k(x) = k\Pi(kx)$. Montrer que l'on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')g_k = \delta.$$

3.4.2 Séries de distributions

Définition 27 *On considère la suite de distributions $\{T_n\}_1^\infty$. On dit que la série de distributions*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

définit une distribution T de \mathcal{D}' , si la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^N T_n$$

converge au sens des distributions vers T , c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \sum_{n=1}^N T_n = T.$$

Dans la pratique, on a très souvent des séries du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$. Dans ce cas la définition de la convergence est tout à fait analogue au cas précédent : il suffit en fait de considérer la convergence de la suite des sommes partielles "symétriques" $S_N = \sum_{n=-N}^N T_n$.

Exemple 28 *La suite $\Delta_N = \sum_{n=-N}^N \delta_n$ converge dans \mathcal{D}' vers une distribution notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$, qu'on appelle *Cha* et qu'on note *III* (lettre de l'alphabet cyrillique). En physique on l'appelle aussi "Peigne de Dirac".*

3.4.3 Suites de fonctions convergeant vers δ

Deux théorèmes sont d'un usage courant et permettent de reconnaître si une suite de distributions régulières converge vers δ .

Théorème 2 *Soit $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ une suite de fonctions positives intégrables telles que $\int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = 1$ et que $f_n(x)$ soit nulle en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n]$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Alors la suite de distributions régulières définies par f_n tend vers δ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')f_n = \delta.$$

Théorème 3 Soit f une fonction intégrable vérifiant $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1$. On considère, pour $\varepsilon > 0$ la distribution régulière définie par la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors f_ε tend vers δ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{D}') f_\varepsilon = \delta.$$

Exercice 29 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = k\Pi(kx)$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{\xi_a(kx)}{\int_{\mathbf{R}} \xi_a(kx) dx}$$

où Π et ξ_a ont été définis précédemment.

Exercice 30 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = \frac{\sin^2 kx}{\pi k x^2}$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{1}{k\pi} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Exercice 31 En admettant (voir au paragraphe 3.11.5) que l'on a pour $\lambda > 0$ (avec des notations incorrectes !)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \frac{\sin \lambda x}{x} = \pi \delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(k) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi kx} dx.$$

Remarque 32 On voit donc sur ces derniers exemples qu'il est possible d'approcher une distribution aussi "singulière" que δ par des distributions "extrêmement" régulières. Le cas le plus spectaculaire étant celui qui est fourni par le deuxième exemple de l'exercice 30, où les distributions approchant δ sont associées à des fonctions $g_k(x)$ qui se trouvent être des fonctions d'essai dans \mathcal{D} .

Ceci est en fait une propriété générale. On démontre qu'on peut approcher toute distribution de \mathcal{D}' par une suite de distributions régulières associées à des fonctions d'essai de \mathcal{D} . On dit que l'espace \mathcal{D} est **dense** dans \mathcal{D}' .

3.5 Opérations élémentaires sur les distributions

Exercice 33 Désignons par f et g les distributions régulières associées aux deux fonctions localement intégrables f et g . Montrer que l'on a, pour toute fonction d'essai ϕ

- a) $\langle f + g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$
- b) $\langle \lambda f, \phi \rangle = \lambda \langle f, \phi \rangle$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$
- c) $\langle \alpha f, \phi \rangle = \langle f, \alpha \phi \rangle$ pour α , fonction C^∞
- d) $\langle \tau_a f, \phi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbf{R}$
- e) $\langle d_a f, \phi \rangle = \langle f, |a| d_{1/a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbf{R} - 0$

Pour pouvoir reproduire ces résultats particuliers, on pose par définition, pour toute fonction test ϕ :

Somme. Pour deux distributions T_1 et T_2 ;

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle .$$

Produit par un nombre. Pour une distribution T et un nombre complexe $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle .$$

Produit par une fonction C^∞ . Soient une distribution T de \mathcal{D}' et α une fonction C^∞ , on définit leur produit αT par

$$\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle .$$

Exemple 34 Pour α , fonction C^∞

$$\alpha \delta = \alpha(0) \delta .$$

Cette relation est souvent interprétée en physique en disant que δ est une **distribution propre** de l'**opérateur de multiplication** par une fonction α , avec la **valeur propre** $\alpha(0)$.

Exemple 35 En désignant par x la fonction qui à x donne x

$$x \delta = 0 .$$

Exemple 36

$$x \text{vp} \frac{1}{x} = 1 .$$

Cette relation est extrêmement intéressante, car elle nous dit que l'inverse de x au sens des distributions n'est autre que la distribution $\text{vp} \frac{1}{x}$ et non pas $\frac{1}{x}$ qui, de toute évidence ne *peut pas* définir une distribution régulière (pourquoi?).

Exemple 37 Soit α , une fonction de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ qui est C^∞ et qui ne s'annule jamais. Pour toute distribution T , on a

$$\alpha T = 0 \iff T = 0 .$$

On admettra (voir au paragraphe 3.11.6) que si $T \in \mathcal{D}'$

$$xT = 0 \iff T = k \delta .$$

où k est un nombre complexe arbitraire.

Translation. Pour $a \in \mathbf{R}$, la translattée $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par

$$\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \phi \rangle .$$

Exemple 38

$$\tau_a \delta = \delta_a .$$

Exemple 39 Soit α une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution de \mathcal{D}' . Pour tout a réel,

$$\tau_a(\alpha T) = (\tau_a \alpha)(\tau_a T) .$$

Exemple 40 Pour tout x_0 réel,

$$(x - x_0)T = 0 \iff T = k \delta_{x_0} .$$

Dilatation. Pour $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, la dilatée $d_a T$ d'une distribution T est définie par

$$\langle d_a T, \phi \rangle = \langle T, |a| d_{\frac{1}{a}} \phi \rangle .$$

Exemple 41

$$d_a \delta = |a| \delta .$$

Exemple 42

$$d_a \delta_{x_0} = |a| \delta_{ax_0} .$$

3.5.1 Parité

Posons $\check{T} = d_{-1}T$

Exemple 43 Pour toute fonction test ϕ ,

$$\langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle,$$

où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Définition 44 On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$ et impaire si $\check{T} = -T$.

Exemple 45 La distribution δ est paire, de même que $\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}$.

Exemple 46 La distribution $vp\frac{1}{x}$ est impaire, de même que $sgn_x = 2H - 1$.

Exemple 47 La distribution H n'a pas de parité bien définie, de même que δ_{x_0} pour $x_0 \neq 0$.

Exercice 48 Toute distribution peut s'écrire de façon unique comme somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire

$$T = \frac{T + \check{T}}{2} + \frac{T - \check{T}}{2}$$

Appliquer cette formule aux distributions H et δ_{x_0} .

3.6 Dérivée d'une distribution

C'est une opération qui est *toujours* réalisable et celà autant de fois que l'on veut sur les distributions!

Exemple 49 Considérons une fonction $x \mapsto f(x)$ qui est dérivable à dérivée continue pour tout x , on dit que c'est une fonction C^1 , et on note $x \mapsto f'(x)$ sa dérivée. Les deux fonctions f et f' définissent chacune une distribution que nous noterons aussi respectivement f et f' et on a

$$\langle f', \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle.$$

Définition 50 Par analogie, nous dirons que la dérivée d'une distribution T est la distribution T' définie par

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

On vérifie que pour une distribution régulière T_f associée à une fonction f qui est C^1 , on retrouve la formule précédente.

Exemple 51 a) Pour une constante K on a $K' = 0$.

b) $H' = \delta$

c) $(sgn_x)' = 2\delta$

Exemple 52 La dérivée p -ième $\delta^{(p)}$ de δ est définie par

$$\langle \delta^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \phi^{(p)}(0),$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Exemple 53 Les deux distributions δ et δ' sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que si a et b sont deux nombres complexes arbitraires

$$a\delta + b\delta' = 0 \iff a = b = 0.$$

Exemple 54 Si T est une distribution et α une fonction C^∞ , on a

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

On admettra aussi (voir au paragraphe 3.11.7) que l'on a

$$T' = 0 \iff T = K$$

où K est une constante.

Théorème 4 Formule des sauts. Soit une fonction f qui est C^1 **par morceaux**, on suppose pour simplifier la présentation, qu'elle n'a de discontinuité qu'en un seul point a de l'axe réel, on a

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a \delta_a.$$

où σ_a désigne le **saut (fini)** de la fonction au point a ,

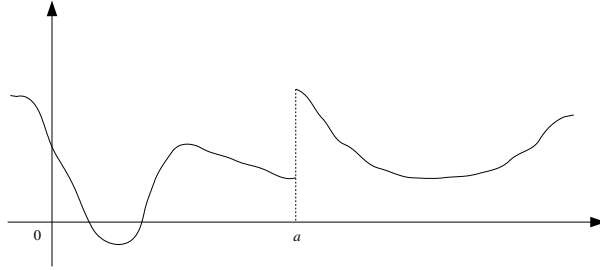


FIG. 3.2 – Fonction C^1 par morceaux

$$\sigma_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a - \varepsilon),$$

et où on a noté $T_{\{f'\}}$ la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout $x \rightarrow f'(x)$.

La généralisation est immédiate au cas où la fonction f possède N sauts aux points $\{a_i\}_1^N$

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^N \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$$

et même au cas où $N = \infty$ sous la condition que la série écrite soit une *série convergente* au sens des distributions.

Exercice 55 Calculer la dérivée au sens des distributions de

- La distribution régulière Π définie par la fonction porte $\Pi(x)$.
- La distribution régulière Λ définie par la fonction

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 56 Calculer, au sens des distributions, les dérivées

- a) $(|x|)^{(p)}$.
- b) $(|x|^n)'$ pour n entier et ≥ 1 .
- c) $(\alpha H)^{(p)}$ où α est une fonction C^∞ .

Application. L'étudiant qui a l'occasion d'utiliser un oscillographe cathodique pourra "dériver" à l'oscillographe n'importe quel signal et se convaincre sur un exemple donné (la distribution H par exemple) que le résultat obtenu n'est autre que la dérivée du signal au sens des distributions.

3.7 Les opérateurs continus sur \mathcal{D}'

Définition 57 Un opérateur linéaire A sur \mathcal{D}' est une application linéaire de \mathcal{D}' dans \mathcal{D}' , c'est-à-dire que

$$A(aT_1 + bT_2) = aA(T_1) + bA(T_2)$$

pour tout nombre complexe a, b et toute distribution T_1 et T_2 de \mathcal{D}' .

Définition 58 Un opérateur A est un opérateur continu si, quelle que soit la suite convergente $\{T_n\}$ de distributions T_n de \mathcal{D}'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_n = T,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(AT_n) = AT.$$

La dernière égalité peut encore s'écrire sous la forme lapidaire

$$\lim(AT_n) = A(\lim T_n),$$

indiquant que la continuité d'un opérateur A veut dire qu'on est autorisé à permuter l'action de A et la prise de la limite.

Exemple 59 Les opérateurs suivants, définis sur \mathcal{D}' , sont tous continus

- a) $T \rightarrow T + T_0$ où $T_0 \in \mathcal{D}'$
- b) $T \rightarrow aT$ où $a \in \mathbb{C}$
- c) $T \rightarrow \alpha T$ où $\alpha \in C^\infty$
- d) $T \rightarrow \tau_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- e) $T \rightarrow d_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- f) $T \rightarrow T'$

Exercice 60 Montrer que $\tau_1 III = III$. Que veut dire ce résultat? Montrer que III est paire.

Exercice 61 Calculer III' ; αIII où α est C^∞ . Calculer $(e^{2i\pi x} - 1)III$.

Exercice 62 Calculer $(|\cos x|)''$.

Exercice 63 Montrer que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(\lambda \cos \lambda x) = 0$

Remarque 64 Une catégorie extrêmement importante d'opérateurs continus est constituée par les filtres en théorie du signal.

3.8 Série de Fourier d'une distribution périodique

Définition. On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(R)$ est T -périodique si on a pour une translation positive τ_T

$$\tau_T(U) = U.$$

Le nombre T est une **période** de la distribution U et le plus petit de ces nombres est appelé **période fondamentale**.

Définition 65 Soit U une distribution, I un intervalle de \mathbf{R} . On dit que le support de U est contenu dans I si, pour toute fonction d'essai ϕ nulle sur I , $\langle U, \phi \rangle = 0$.

On dit que U est à support borné si son support est contenu dans un intervalle borné.

Théorème 5 Si U est une distribution périodique de période T , il existe une distribution V à support borné telle que

$$U = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tau_{kT}(V).$$

Exemple 66 Soit f une fonction T -périodique dans $L^1(T)$, elle définit une distribution T -périodique U_f et on peut prendre pour V la distribution régulière définie par la fonction v

$$v(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, a + T[\text{ où } a \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 67 Prenons pour V la distribution de Dirac à l'origine. Donner l'expression de la distribution T -périodique III_T ainsi obtenue.

Définition 68 Soit U une distribution T -périodique telle que $U = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \tau_{kT}(V)$. On appelle coefficients de Fourier de U les nombres complexes

$$c_k(U) = \frac{1}{T} \langle V, e^{-ik\omega t} \rangle,$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k \in \mathbf{Z}$.

Remarque 69 Le nombre $\langle V, e^{-ik\omega t} \rangle$ est parfaitement défini puisque la fonction $t \rightarrow e^{-ik\omega t}$ est une fonction C^∞ et que le support de V est borné.

Théorème 6 Soit U une distribution T -périodique, alors

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(U) e^{ik\omega t},$$

et pour $k \neq 0$, on a $|c_k(U)| \leq \text{Const.} |k|^r$, où r est un entier positif.

Inversement. Une suite de nombres $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfaisant à l'inégalité précédente est la suite des coefficients de Fourier d'une distribution T -périodique.

Proposition 70 Soit U' la dérivée de la distribution T -périodique U , on a alors

$$c_k(U') = ik\omega c_k(U).$$

Exercice 71 Calculer les coefficients de Fourier $c_k(III_T)$ et $c_k III_T$.

3.9 Méthode de la variation de la constante

Motivation. Considérons un système physique, par exemple, un oscillateur harmonique gouverné par une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = F(t)$, où $F(t)$ est un terme de forçage. On donne au système une impulsion brutale au temps $t = 0$. Cela signifie que $F(t)$ est proportionnel à la distribution de Dirac à l'origine. Quelle est la réponse du système ? On est amené à résoudre des équations différentielles dont le second membre est une distribution, avec inconnue distribution.

3.9.1 Cas des équations différentielles du premier ordre

On commence par résoudre les équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y' + b(x)y = U,$$

où a et b sont des fonctions indéfiniment dérivables sur \mathbf{R} , a ne s'annule pas et U est une distribution.

Proposition 72 *La méthode classique de résolution s'étend au cas où le second membre est une distribution.*

1. On résout l'équation homogène. On trouve des solutions proportionnelles, $f(x) = C e^{c(x)}$ où c est une primitive de $-b/a$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation (\mathcal{E}) sous la forme $T = e^{c(x)}U$, où U est une distribution inconnue. Cela conduit à $T' = e^{-c}U$, qui possède une solution T_0 .
3. Toutes les solutions sont de la forme $T = T_0 + C e^{c(x)}$.

Exemple 73 *Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = \delta_0$.*

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $f(x) = C e^{x^2}$. Il reste à résoudre $T' = e^{-x^2}\delta_0 = \delta_0$, soit $T_0 = H$, fonction d'Heaviside. Toutes les solutions sont de la forme $T = (H + C)e^{x^2}$.

3.9.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

Revenons au problème initial, un oscillateur qu'on brutalise. Tant que $t < 0$, il ne se passe rien, donc la solution est nulle. Lorsque $t > 0$, le système oscille librement, son mouvement est solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$. Donc on peut penser que la solution est de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène.

Proposition 74 *L'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \delta_0$ possède une solution de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$.*

3.9.3 Seconds membres généraux

Définition 75 *Si U est une distribution et ϕ une fonction d'essai, on peut définir une fonction $U \star \phi$ par*

$$U \star \phi(x) = \langle U, \tau_x \hat{\phi} \rangle.$$

Exemple 76 *Pour toute fonction d'essai ϕ , $\delta \star \phi = \phi$.*

Proposition 77 *Pour toute distribution U et toute fonction d'essai ϕ , la fonction $U \star \phi$ est indéfiniment dérivable, et*

$$(U \star \phi)' = U' \star \phi = U \star \phi'.$$

Preuve. Pour h réel, soit Δ_h l'opérateur sur \mathcal{D}' qui a une distribution U associe $\Delta_h U = \frac{1}{h}(\tau_h U - U)$. Alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h U = U'.$$

En effet, si ϕ est une fonction d'essai, $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_h \phi = \phi'$, donc

$$\langle \Delta_h U, \phi \rangle = -\langle U, \Delta_h \phi \rangle$$

tend vers $-\langle U, \phi' \rangle = \langle U', \phi \rangle$ quand h tend vers 0.

Or les translations commutent avec la convolution. Par conséquent,

$$\Delta_h(U \star \phi) = (\Delta_h U) \star \phi = U \star \Delta_h(\phi).$$

En faisant tendre h vers 0, on trouve que $(U \star \phi)' = U' \star \phi = U \star \phi'$, ce qui montre que $U \star \phi$ est dérivable. Puis, par récurrence, que $U \star \phi$ est indéfiniment dérivable. ■

Corollaire 78 *Si U est une solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \delta_0$, alors $T = U \star \phi$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \phi$.*

3.9.4 Interprétation

Revenons au problème initial, un oscillateur initialement au repos, que l'on soumet à une force $F(t)$. Son mouvement est donc gouverné par l'équation $ay'' + by' + cy = F(t)$.

Supposons que F est une fonction d'essai, nulle tant que $t < 0$. Pour calculer le mouvement, on doit d'abord calculer la *réponse impulsionnelle*, i.e. la solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \delta_0$ qui est de la forme $U = f(t)H$ (la méthode de la variation de la constante peut nous y aider). Ensuite, il suffit de calculer le produit de convolution $U \star F$. Autrement dit, la réponse impulsionnelle sert en quelque sorte de matrice pour l'opérateur qui à une excitation F associe le mouvement résultant $y = U \star F$.

3.10 Retour sur l'équation de la chaleur

3.10.1 Rappel

On rappelle que lorsque la chaleur diffuse le long d'un fil conducteur homogène infini, la température $f(x, t)$ à l'abscisse x et à l'instant t obéit à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

où c est une constante physique. On a vu, dans le cours d'intégration, que lorsque la répartition initiale de la température, la fonction $f_0(x) = f(x, 0)$, est intégrable sur \mathbf{R} , la répartition $f_t(x) = f(x, t)$ de la température au temps $t > 0$ est donnée par

$$f_t = p_t \star f_0, \quad (3.2)$$

où, pour $t > 0$,

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Que signifie cette fonction p_t ?

3.10.2 Equation de la chaleur à donnée initiale distribution

La fonction p_t s'interprète comme la répartition de la température obtenue au temps t lorsqu'une quantité unité de chaleur est placée initialement à l'origine. Comment donner un sens précis à cette affirmation ? En montrant que la formule (3.2) s'étend à toutes les distributions à support borné, et en particulier, à la distribution de Dirac, et en vérifiant que, dans le cas où f_0 est la distribution de Dirac, $f_t = p_t$.

Définition 79 *Soit U une distribution à support borné. On définit la distribution $p_t \star U$ comme suit. Si ϕ est une fonction d'essai,*

$$\langle p_t \star U, \phi \rangle = \langle U, p_t \star \phi \rangle$$

Remarque 80 Pour justifier la définition 79, il faut vérifier qu'elle coïncide avec la définition 75 pour les distributions régulières associées aux fonctions d'essai, i.e. que si ϕ et ψ sont des fonctions d'essai,

$$\int_{\mathbf{R}^2} p_t(y)\psi(x-y)\phi(x) dx dy = \int_{\mathbf{R}^2} p_t(y)\phi(x-y)\psi(x) dx dy.$$

Comme p_t est paire, cette identité équivaut après changement de variable à

$$\int_{\mathbf{R}^2} p_t(y)\psi(-x+y)\phi(-x) dx dy = \int_{\mathbf{R}^2} p_t(y)\phi(x-y)\psi(x) dx dy.$$

Autrement dit,

$$((p_t \star \hat{\psi}) \star \phi)(0) = ((p_t \star \phi) \star \hat{\psi})(0),$$

ce qui résulte de la commutativité et de l'associativité de la convolution des fonctions intégrables.■

Proposition 81 Pour $t > 0$ la distribution $p_t \star U$ est régulière, c'est une fonction indéfiniment dérivable en t et en x , qui est solution de l'équation de la chaleur (3.1). De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\mathcal{D}') p_t \star U = U.$$

Preuve. La fonction $p_t \star \phi$ est indéfiniment dérivable (proposition 77), mais n'est pas à support borné. C'est pourquoi il faut supposer que U est à support borné pour être sûr que la formule a un sens. La justification est la même que celle donnée pour les coefficients de Fourier des distributions périodiques. L'équation de la chaleur étant satisfaite par p_t , elle est aussi satisfaite par $p_t \star U$, car

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (p_t \star U), \phi \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle p_t \star U, \phi \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \langle U, p_t \star \phi \rangle \\ &= \langle U, \frac{\partial p_t}{\partial t} \star \phi \rangle \\ &= \langle U, c \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2} \star \phi \rangle \\ &= c \langle U, p_t \star \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \rangle \\ &= c \langle p_t \star U, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \rangle \\ &= \left\langle c \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p_t \star U), \phi \right\rangle. \end{aligned}$$

En vertu des hypothèses de continuité des distributions (que nous avons soigneusement évité de détailler), prouver que $\langle U, p_t \star \phi \rangle$ converge lorsque t tend vers 0 revient à prouver que la fonction $p_t \star \phi$ et ses dérivées convergent. Comme la dérivée p -ème de $p_t \star \phi$ est $p_t \star \phi^{(p)}$ (proposition 77), il suffit de montrer que $p_t \star \phi$ converge. Quitte à translater ϕ , il suffit de montrer que $(p_t \star \phi)(0)$ converge. Or, comme p_t est paire,

$$(p_t \star \phi)(0) = \langle p_t, \phi \rangle,$$

donc il s'agit de montrer que les distributions régulières p_t convergent au sens des distributions vers la distribution de Dirac. Comme p_1 est intégrable, d'intégrale 1, et $p_t = \frac{1}{\sqrt{t}} d_{\sqrt{t}} p_1$, il suffit d'appliquer le théorème 3.■

Exemple 82 Cas de la distribution de Dirac : $p_t \star \delta_0 = p_t$.

En effet, pour toute fonction d'essai ϕ ,

$$\begin{aligned} \langle p_t \star \delta_0, \phi \rangle &= \langle \delta_0, p_t \star \phi \rangle \\ &= p_t \star \phi(0) \\ &= \langle p_t, \phi \rangle. \blacksquare \end{aligned}$$

3.10.3 Conclusion

Notons A_t l'opérateur qui à une répartition de température initiale associe la répartition de température obtenue en laissant la chaleur diffuser pendant un temps t . Sur l'espace des polynômes trigonométriques sur un fil fini, on sait diagonaliser l'équation de la chaleur, et donc calculer explicitement A_t . La même méthode marche sur un fil infini, à condition de remplacer une série de Fourier finie par la transformation de Fourier. La matrice finie de A_t est remplacée par une sorte de matrice infinie indexée par les réels, la convolution par le noyau de la chaleur.

Cette démarche est assez générale, elle s'applique à d'autres équations d'évolution à coefficients constants, comme l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes.

Signalons une particularité de l'équation de la chaleur. La température devient, après diffusion, très régulière. L'équation des ondes ne se comporte pas comme cela (les ondes possèdent des fronts). Voici une explication mathématique, qui repose à nouveau sur l'analogie avec les matrices finies. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a toutes ses valeurs propres de la forme $-k^2$, elles sont négatives. Par conséquent, les valeurs propres de A_t sont de forme $e^{-k^2 ct}$, elles tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini. L'opérateur A_t écrase les hautes fréquences, donc il rend les fonctions davantage différentiables.

3.10.4 A retenir

- Une distribution n'a pas de valeur en un point, cela peut seulement être mesuré par une fonction d'essai.
- Il est utile de se savoir translater et dilater des distributions.
- Des distributions non régulières comme la distribution de Dirac, apparaissent souvent comme limites de distributions régulières, par dilatation.
- Toute distribution peut-être dérivée. Pour les fonctions dérivables par morceaux mais possédant des sauts, la dérivée comporte des distributions de Dirac.
- La méthode de la variation de la constante s'étend aux distributions.
- La convolution s'étend à certaines familles de distributions, et c'est utile pour résoudre des équations différentielles.

3.11 Appendices

Ces appendices contiennent des démonstrations éludées en cours de route.

3.11.1 Caractérisation des fonctions C^∞

Soit α telle que $\alpha\phi \in \mathcal{D}$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Ceci entraîne en particulier $\alpha\phi \in C^\infty$. La fonction ξ_2 est strictement positive sur $[-1, +1]$, donc $\frac{1}{\xi_2}$ est C^∞ sur $[-1, +1]$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\xi_2} \cdot f\xi_2 \in C^\infty$$

or

$$\frac{1}{\xi_2} \cdot f\xi_2 = f$$

et f est par conséquent C^∞ sur l'intervalle $[-1, +1]$. Un raisonnement analogue montrerait, en prenant des translatées de ξ_2 , que f est C^∞ sur tout intervalle $[n, n+2]$ avec $n \in \mathbb{Z}$, donc C^∞ sur \mathbb{R} . Par suite

$$\alpha\phi \in \mathcal{D}$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}$ est équivalent à $\alpha \in C^\infty$.

3.11.2 Topologie sur \mathcal{D}

Sur \mathcal{D} nous avons la notion de convergence suivante. On dit qu'une suite ϕ_j de \mathcal{D} converge vers $\phi \in \mathcal{D}$ pour $j \rightarrow \infty$ si

1. Les ϕ_j sont nulles en dehors d'un même intervalle borné.
2. $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_R |\phi_j^{(n)} - \phi^{(n)}| = 0$ pour $n = 1, 2, \dots$

3.11.3 Topologie sur \mathcal{D}'

Une distribution T est une forme linéaire continue sur \mathcal{D} au sens où

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (\mathcal{D})\phi_j = \phi$$

(selon la définition du paragraphe 3.11.2) entraîne que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |T(\phi_j) - T(\phi)| = 0.$$

3.11.4 $T_f = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout

Par définition

$$T_f = 0 \Leftrightarrow \langle T_f, \phi \rangle = 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$. Qui est encore équivalent à

$$\int_R f(x)\phi(x)dx = 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$.

Mais toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}\psi,$$

où $u \in R$ et $\psi \in \mathcal{D}$ (il suffit d'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}e^{2i\pi ux}\phi(x)$$

et de poser $\psi(x) = e^{2i\pi ux}\phi(x)$).

Alors

$$\int_R f(x)\phi(x) dx = \int_R e^{-2i\pi ux} f(x)\psi(x) = 0$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$

$$= F[f\psi](u) = 0$$

pour tout $u \in R$.

Or $F[f\psi](u) = 0$ implique que $f\psi = 0$ presque partout, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, donc, en particulier pour une fonction de la forme $\psi = \tau_n \xi_1$, où $n \in Z$. Donc $f = 0$ presque partout sur chaque intervalle de la forme $[n, n + 1]$, c'est-à-dire que l'ensemble E_n des points de $[n, n + 1]$ où $f \neq 0$ est de longueur nulle. Comme $\bigcup_n [n, n + 1] = \mathbf{R}$, on peut dire que l'ensemble des points de \mathbf{R}^n où $f \neq 0$ est de longueur nulle.

3.11.5 Convergence des distributions $\frac{\sin \lambda x}{x}$

Ceci est un simple exercice, à condition de montrer d'abord le lemme suivant

Lemme 83 Toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme

$$\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x),$$

où la fonction ψ est une fonction C^∞ .

3.11.6 Résolution de l'équation $xT = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Par définition

$$xT = 0 \Leftrightarrow \langle xT, \phi \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$.

Or

$$\langle xT, \phi \rangle = \langle T, x\phi \rangle.$$

Il en résulte que T est nulle sur toute fonction χ de la forme $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$. Mais ces fonctions χ ne remplissent pas tout \mathcal{D} . Elles sont en fait caractérisées par la condition $\chi(0) = 0$.

En effet, si $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$, on a $\chi(0) = 0$.

Inversement, si $\chi \in \mathcal{D}$ vérifie $\chi(0) = 0$, on peut l'écrire (voir au paragraphe 3.11.5)

$$\chi(x) = x\phi(x),$$

où $\phi \in \mathcal{D}$.

Soit alors $\psi_0 \in \mathcal{D}$ une fonction fixée, choisie de telle sorte que $\psi_0(0) = 1$. On peut écrire, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, lequel est un espace vectoriel

$$\psi = \psi(0)\psi_0 + \chi$$

$$\psi(0) = \psi(0)\psi_0(0) + \chi(0)$$

$$= \psi(0) + \chi(0)$$

d'où $\chi(0) = 0$.

Alors

$$\langle T, \psi \rangle = \psi(0) \langle T, \psi_0 \rangle + \langle T, \chi \rangle$$

et compte tenu de ce que

$$\langle T, \chi \rangle = 0$$

$$= \psi(0) \langle T, \psi_0 \rangle$$

$$= C\psi(0)$$

en posant $\langle T, \psi_0 \rangle = C$

$$= \langle C\delta, \psi \rangle$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$. Donc, T est nécessairement de la forme

$$T = C\delta.$$

La réciproque est évidente, car si $T = C\delta$, on a $xT = 0$ pour toute constante C .

En résumé

$$xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta,$$

où C est un nombre complexe.

3.11.7 Résolution de l'équation $T' = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Cette équation est équivalente à

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi \rangle = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}.$$

Par conséquent, T est nulle lorsqu'elle est testée par toute fonction qui est la dérivée d'une fonction de \mathcal{D} . Mais les fonctions ϕ_0 de ce type ne remplissent pas tout \mathcal{D} . Elles sont caractérisées en fait par les deux conditions

$$\phi_0 \in \mathcal{D}$$

et

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_0 = 0,$$

constituant ainsi un sous-espace vectoriel $E_0 \subset \mathcal{D}$.

On a donc

$$\langle T, \phi_0 \rangle = 0$$

pour toute fonction $\phi_0 \in E_0$.

Rappelons que T ne sera connue que si ses valeurs $\langle T, \phi \rangle$ sont connues pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Considérons alors une fonction $\phi_1 \in \mathcal{D}$ n'appartenant pas à E_0 , choisie de telle sorte que

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_1 = 1.$$

L'espace \mathcal{D} étant un espace vectoriel, on peut toujours écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque

$$\phi = \phi_1 \int_{\mathbf{R}} \phi + \phi_0$$

où $\phi_0 \in \mathcal{D}$.

On remarque que nécessairement $\phi_0 \in E_0$ car

$$\int_{\mathbf{R}} \phi = \int_{\mathbf{R}} \phi_1 \cdot \int_{\mathbf{R}} \phi + \int_{\mathbf{R}} \phi_0,$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}} \phi_0 = 0.$$

De plus, la valeur de T testée par $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque sera alors connue si on connaît $\langle T, \phi_1 \rangle$. En effet

$$\langle T, \phi \rangle = \langle T, \phi_1 \rangle \int_{\mathbf{R}} \phi + \langle T, \phi_0 \rangle$$

Le dernier terme étant nul, on a en posant $\langle T, \phi_1 \rangle = k$,

$$\langle T, \phi \rangle = k \int_{\mathbf{R}} \phi = \langle k, \phi \rangle$$

pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Il en résulte que T est nécessairement de la forme

$$T = k.$$

Réciproquement, si $T = k$ on a $T' = 0$. En résumé

$$T' = 0 \Leftrightarrow T = k,$$

où k est une constante complexe.