Géométrie Riemannienne : exercices du chapitre 5

Exercice 1 *Montrer que le fibré normal de la sphère* $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *est trivial.*

Exercice 2 *Montrer que l'espace total du fibré* γ_1 *est un ruban de Möbius.*

Exercice 3 *Soit* ξ_f *le fibré de rang 1 sur* S^1 *obtenu par recollement de deux fibrés triviaux au moyen de l'application* $f : S^0 \to Gl(1, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^*$ *définie par* $f(1) = 1$ *et* $f(-1) = -1$. *Montrer que* ξ_f *est isomorphe au fibré tautologique* γ_1.

Exercice 4 *Soit* ξ_f *le fibré vectoriel complexe de rang 1 sur* S^2 *obtenu par recollement de deux fibrés triviaux au moyen de l'application* $f : S^1 \to Gl(1, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^*$ *définie par* $f(z) = z$. *Montrer que* ξ_f *est isomorphe au fibré tautologique* $\gamma_1^{\mathbf{C}}$.

Exercice 5 *Soit* ξ *un fibré euclidien sur* B *et* $\eta \subset \xi$ *un sous-fibré. Vérifier que l'orthogonal* $\eta^\perp \subset \xi$ *est un sous-fibré.*

Exercice 6 *Soit* $N \subset M$ *une sous-variété. Vérifier que* $TN \oplus \nu N = TM_{|N}$.

Exercice 7 *Soient* ξ *et* η *deux fibrés vectoriels sur* B. *Soit* f *une section continue de* $Hom(\xi, \eta)$. *On suppose que le rang des applications linéaires* f_b *est constant sur* B. *Vérifier que le noyau* $\mathrm{ker} f$ *est un sous-fibré de* ξ *et que l'image* $\mathrm{im} f$ *est un sous-fibré de* η.

Exercice 8 *Montrer que le fibré tangent à* $\mathbf{C}P^1$ *est induit du fibré tautologique par l'application* $z \mapsto \bar{z}^2$. *En déduire que sa classe d'Euler vaut* $-2h$.

Exercice 9 *Montrer que fibré tangent d'une sphère de dimension paire n'admet aucun sous-fibré orientable.*

Exercice 10 *Pour* k *entier positif, on note* $O(k) = (\gamma_1^{\mathbf{C}})^{\otimes k}$ *la puissance tensorielle* k*-ième du fibré tautologique sur* $\mathbf{C}P^1$. *On note* $O(0)$ *le fibré trivial,* $O(-1)$ *le dual de* $\gamma_1^{\mathbf{C}}$. *Enfin, pour* k *entier négatif, on note* $O(k) = O(-1)^{\otimes -k}$. *Montrer que la famille* $O(k)$ *contient exactement un représentant de chaque classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de rang un sur* $\mathbf{C}P^1$.

Exercice 11 *Montrer que le fibré tangent d'une sphère a une classe de Stiefel--Whitney triviale.*

Exercice 12 *Montrer que le fibré tautologique* γ_d^1 *de l'espace projectif réel* $\mathbf{R}P^d$ *a pour classe de Stiefel-Whitney* $1 + a$ *où* a *est le générateur de* $H^1(\mathbf{R}P^d, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Exercice 13 *Montrer que le fibré tangent de l'espace projectif réel* $\mathbf{R}P^d$ *a pour classe de Stiefel-Whitney* $(1 + a)^{d+1}$.

Exercice 14 *Montrer que pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, *le fibré* $O(k)$ *de l'exercice 10 a pour classe de Chern* $1 + kh$.

Exercice 15 *Montrer que le fibré tautologique* $\gamma_d^{1,\mathbf{C}}$ *sur l'espace projectif complexe* $\mathbf{C}P^d$ *a pour classe de Chern* $1 + h$ *où* h *est le dual de Poincaré d'un hyperplan projectif. De même, montrer que la classe de Chern de son dual* $(\gamma_d^{1,\mathbf{C}})^*$ *vaut* $1 - h$.