Géométrie Riemannienne : exercices du chapitre 3

Exercice 1 *Soit M une variété munie d'une connexion ∇, V et W des champs de vecteurs, f une fonction sur M. Montrer que $\nabla^2_{V,W} f - \nabla^2_{W,V} f = -\nabla_{T(V,W)} f$.*

Exercice 2 *Démontrer la première identité de Bianchi $R_{v,w}z + R_{w,z}v + R_{z,v}w = 0$.*

Exercice 3 *Vérifier que la courbure de Gauss d'une métrique écrite en coordonnées polaires $dr^2 + f(r,\theta)^2 d\theta^2$ vaut $K = -f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.*

Exercice 4 *Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.*

Exercice 5 *Vérifier que si deux métriques riemanniennes $g' = \lambda^2 g$ en dimension 2 sont proportionnelles, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par $K' = \lambda^{-2} K$.*

Exercice 6 *Vérifier que si deux métriques riemanniennes $g' = e^{2f} g$ en dimension 2 sont conformes, alors leurs courbures de Gauss sont reliées par $K' = e^{-2f}(K + \Delta f)$.*

Exercice 7 *Vérifier que la courbure de Gauss de la métrique de Poincaré $\frac{16(dx^2+dy^2)}{(4-x^2-y^2)^2}$ du disque de rayon 2 vaut $K = -1$.*

Exercice 8 *Démontrer le* Theorema Egregium *de Gauss, i.e. le fait que le produit des courbures principales d'une surface de $\mathbf{R}^3$ est égal à la courbure de Gauss intrinsèque, i.e. définie uniquement à partir de la première forme fondamentale.*

Exercice 9 *Soit M une variété riemannienne de dimension 2. On écrit sa métrique en coordonnées polaires, i.e. sous la forme $dr^2 + f(r,\theta)^2\, d\theta^2$. En utilisant l'équation de Jacobi, montrer que la courbure vaut $K = -f^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$.*

Exercice 10 *Soit M une variété riemannienne de dimension 2, $P \in M$, C_r le lieu des points de M dont la distance à P est égale à r. Montrer que*

$$\mathrm{Long}(C_r) = 2\pi r - \frac{\pi}{3} K(P) r^3 + o(r^3)$$

où $K(P)$ est la courbure de Gauss en P.

Exercice 11 *Soit M une variété riemannienne, P un point de M, π un plan vectoriel contenu dans $T_P M$. Notons $N_\pi = \exp_P(\pi)$ la surface balayée par les géodésiques tangentes à π. Vérifier que la courbure sectionnelle $K(\pi)$ est égale à la courbure de Gauss de N_π.*

Exercice 12 *Soit M une variété munie de deux métriques riemanniennes conformes g et $g' = e^{2f} g$. Soit P un point de M, π un plan vectoriel contenu dans $T_P M$. Vérifier que les courbures sectionnelles $K'(\pi)$ et $K(\pi)$ sont reliées par la formule*

$$K'(\pi) = e^{-2f}(K(\pi) + \Delta_\pi f - |\nabla_{\pi^\perp} f|^2)$$

où $\Delta_\pi f$ est l'opposé de la trace de la hessienne $\nabla^2 f$ restreinte à π et $\nabla_{\pi^\perp} f$ la projection du gradient de f sur l'orthogonal de π.

Exercice 13 *Montrer que toute isométrie de la 2-sphère préservant l'orientation possède un point fixe. En déduire une classification des surfaces à courbure 1.*