Géométrie Riemannienne : exercices du chapitre 2

Exercice 1 *On appelle* projection stéréographique *l'application qui à un point* (x, y) *du disque de rayon 2 associe le point d'intersection de la droite passant par les points* $S = (0, 0, -1)$ *et* $(x, y, 1)$ *avec la pseudosphère. Calculer l'expression dans ces coordonnées de la métrique induite par la forme quadratique* $dX^2 + dY^2 - dZ^2$ *sur la pseudosphère. On l'appelle traditionnellement* métrique de Poincaré dans le disque de rayon 2.

Solution de l'exercice 1. *La pseudosphère en projection stéréographique.*

$$(1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \in \Psi S \Leftrightarrow t(x^2 + y^2 - 4) = -4 \quad \text{et} \quad -1 + 2t > 0.$$

On trouve donc la paramétrisation

$$X = \frac{4x}{4 - x^2 - y^2}, \quad Y = \frac{4y}{4 - x^2 - y^2}, \quad Z = \frac{4 + x^2 + y^2}{4 - x^2 - y^2}.$$

On calcule

$$dX = xdt + tdx, \quad dY = ydt + tdy, \quad dZ = 2dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 - dZ^2 &= x^2dt^2 + 2xtdtdx + t^2dx^2 + y^2dt^2 + 2ytdtdy + t^2dy^2 - 4dt^2 \\ &= (x^2 + y^2 - 4)dt^2 + 2tdt(xdx + ydy) + t^2(dx^2 + dy^2). \end{aligned}$$

Or de l'identité $t(x^2 + y^2 - 4) = -4$ on tire

$$dt(x^2 + y^2 - 4) + 2t(xdx + ydy) = 0,$$

puis en multipliant par dt,

$$dt^2(x^2 + y^2 - 4) + 2tdt(xdx + ydy) = 0.$$

On conclut que la métrique induite est

$$t^2(dx^2 + dy^2) = \frac{16(dx^2 + dy^2)}{(4 - x^2 - y^2)^2}.$$

Exercice 2 *Soit* $H = \{\Im m(z) > 0\}$ *le demi-plan,* $D = \{|z| < 2\}$ *le disque de rayon 2. On pose*

$$\Phi : H \to D, \quad \Phi(z) = 2\frac{z - i}{z + i}.$$

Vérifier que Φ *est un difféomorphisme de* H *sur* D *et que c'est une isométrie pour les métriques de Poincaré de respectives du demi-plan et du disque.*

Solution de l'exercice 2. *Isométrie du disque et du demi-plan de Poincaré.*

Exercice 3 *Soit $M_{l,L}$ le quotient du plan euclidien par le groupe G engendré par les deux translations $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y + L)$. Montrer que la distance quotient*

$$d(\overline{P}, \overline{Q}) = \min\{|P - Q| \mid P, Q \in \mathbf{R}^2, \; P \in \overline{P}, Q \in \overline{Q}\}$$

est riemannienne. Pour chaque point $\overline{P}$ de M, donner une carte locale de l'espace quotient et écrire la métrique dans cette carte.

Solution de l'exercice 3. *Métrique quotient.*

Soit $P \in \mathbf{R}^2$. L'application

$$\Phi_P :]-\frac{l}{4}, \frac{l}{4}[\times]-\frac{L}{4}, \frac{L}{4}[\to M_{l,L}, \quad Q \mapsto \overline{P+Q}$$

est un homéomorphisme sur un voisinage ouvert de $\overline{P}$ dans $M_{l,L}$. On remarque que si P, $Q \in \mathbf{R}^2$ satisfont $|x_Q - x_P| < \frac{l}{2}$ et $|y_Q - y_P| < \frac{L}{2}$, alors $d(\overline{P}, \overline{Q}) = |P - Q|$. La métrique riemannienne à mettre sur le quotient doit donc coïncider avec la métrique euclidienne dans la carte Φ_P. Comme les changements de cartes $\Phi_P \circ \Phi_Q^{-1}$ sont des translations isométriques, la métrique est bien définie sur le quotient. En relevant les chemins de $\overline{P}$ à $\overline{Q}$ en des chemins d'un représentant de $\overline{P}$ à un représentant de $\overline{Q}$, on voit que la distance riemannienne dans le quotient est supérieure ou égale à la distance quotient. En projetant les segments de droite de $\mathbf{R}^2$ dans $M_{l,L}$, on voit que la distance quotient est égale à la distance riemannienne.

Exercice 4 *Soit ∇ une connexion qui, dans un repère $(e_1, \ldots, e_n)$, s'écrit $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$. On change de repère. On note P la matrice de passage (contenant les composantes des vecteurs e'_j du nouveau repère dans l'ancien). Montrer que $\nabla = \nabla'^0 + \Gamma'$ où*

$$\Gamma' = P^{-1}dP + P^{-1}\Gamma P.$$

Solution de l'exercice 4. *Changement de repère pour la matrice d'une connexion.*

Notons α_{ij} les composantes de la matrice Γ, p_{ij} celles de P et q_{ij} celles de P^{-1}. On calcule

$$\begin{aligned}
\nabla e'_j &= \nabla(\sum_k p_{kj} e_k) \\
&= \sum_k dp_{kj} e_k + p_{kj} \nabla e_k \\
&= \sum_k dp_{kj} e_k + \sum_{k,\ell} p_{kj} \alpha_{\ell k} e_\ell \\
&= \sum_{k,i} dp_{kj} q_{ik} e'_i + \sum_{k,\ell,i} p_{kj} \alpha_{\ell k} q_{i\ell} e'_i \\
&= \sum_j (P^{-1}dP + P^{-1}\Gamma P)_{ij} e'_i.
\end{aligned}$$

Exercice 5 *Soit* $(e_1, \dots, e_n)$ *un champ de repères, et* ∇^0 *la connexion naïve associée. Vérifier que la torsion de* ∇^0 *est identiquement nulle si et seulement si il existe des systèmes de coordonnées locales* $(x_1, \dots, x_n)$ *tels que* $\frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$.

Solution de l'exercice 5. *Torsion d'une connexion naïve.*

Par définition, les champs de vecteurs e_i sont parallèles pour ∇^0, i.e. $\nabla^0 e_i = 0$. Par conséquent

$$T(e_i, e_j) = -[e_i, e_j].$$

Si la torsion de ∇^0 est identiquement nulle, les champs de vecteurs e_i engendrent des flots ϕ^i qui commutent deux à deux. On fixe une origine $P \in M$ et on pose

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \phi^1_{x_1} \circ \dots \circ \phi^n_{x_n}(P).$$

On obtient ainsi un difféomorphisme local tel que $\Phi_* \frac{\partial}{\partial x_i} = e_i$.

Exercice 6 *Soit* M *une variété munie d'une connexion* ∇. *Soit* T *un champ d'endomorphismes du fibré tangent. Soient* V, W, Z *des champs de vecteurs sur* M. *Que vaut* $(\nabla_V T)(W)$ *? Est-ce que la valeur de* $(\nabla_V T)(W)$ *en un point* x *dépend des dérivées de* V, *de* W *ou seulement de leur valeur en* x *? Que vaut* $trace(\nabla_V T)$ *? Cas particulier où* $T = f\, Id$ *où* f *est une fonction sur* M *?*

Solution de l'exercice 6. *Dérivée covariante d'un champ d'endomorphismes.*

Par naturalité,

$$\nabla_V(T(W)) = (\nabla_V T)(W) + T(\nabla_V W),$$

d'où

$$(\nabla_V T)(W)(x) = \nabla_V(T(W))(x) - T(\nabla_V W)(x)$$

ne dépend que de $V(x)$ et de $W(x)$. En effet, si on remplace W par fW où f est une fonction,

$$\begin{aligned}
(\nabla_V T)(fW) &= \nabla_V(T(fW)) - T(\nabla_V fW) \\
&= \nabla_V(fT(W)) - T(\nabla_V fW) \\
&= f(\nabla_V(T(W)) - T(\nabla_V W)) + (\nabla_V f)T(W) - T((\nabla_V f)W) \\
&= f(\nabla_V T)(W).
\end{aligned}$$

De nouveau par naturalité

$$trace(\nabla_V T) = \nabla_V trace(T) = d(trace(T))(V).$$

Si $T = f\, Id$, alors

$$\begin{aligned}
(\nabla_V T)(W) &= \nabla_V(fW) - f(\nabla_V W) \\
&= \nabla_V(f)W
\end{aligned}$$

donc $\nabla_V T = \nabla_V f \, Id$ est la multiplication par la fonction $\nabla_V f = df(V)$. On peut aussi choisir un repère local $(e_i)_{i=1..n}$, écrire $\nabla = \nabla^0 + \Gamma$ où Γ est une matrice de 1-formes. Le champ d'endomorphismes est donné par une matrice T. Alors ∇T est la matrice de 1-formes

$$\nabla T = dT + \Gamma T - T\Gamma,$$

$$d(trace\, T) = trace(\nabla T)$$

$$\nabla f I = df\, I.$$

Exercice 7 *Soient g et g' deux métriques* conformes `(conformal)`*, i.e. telles que $g' = e^{2f} g$ où f est une fonction lisse. Montrer que la connexion de Levi-Civita ∇' de g' s'exprime au moyen de f et de la connexion de Levi-Civita ∇ de g par la formule*

$$\nabla'_V W = \nabla_V W + df(V)W + df(W)V - (V \cdot W)\nabla f, \tag{1}$$

où le produit scalaire $V \cdot W$ et le gradient ∇f sont calculés relativement à la métrique g.

Solution de l'exercice 7. *Connexion de Levi-Civita d'une métrique conforme.*

D'après la formule pour la connexion de Levi-Civita,

$$2\nabla'_V W \cdot' Z = d(W \cdot' Z)(V) + \cdots + [V, W] \cdot' Z + \cdots,$$

soit

$$\begin{aligned} e^{2f} 2\nabla'_V W \cdot Z &= d(e^{2f} W \cdot Z)(V) + \cdots + e^{2f}[V, W] \cdot Z + \cdots \\ &= e^{2f} 2\nabla_V W \cdot Z + (W \cdot Z) d(e^{2f})(V) + \cdots \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} 2\nabla'_V W \cdot Z &= 2\nabla_V W \cdot Z + 2(W \cdot Z) df(V) + 2(V \cdot Z) df(W) - 2(V \cdot W) df(Z) \\ &= 2(\nabla_V W + W df(V) + V df(W) - (V \cdot W)\nabla f) \cdot Z. \end{aligned}$$

Exercice 8 *Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur M dans lequel la connexion de Levi-Civita s'écrit*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma^k_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Montrer qu'une courbe $t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ est géodésique si et seulement si pour tout k,

$$x''_k + \sum_{i,j} \Gamma^k_{i,j} x'_i x'_j = 0. \tag{2}$$

Solution de l'exercice 8. *Equation des géodésiques en coordonnées.*

La connexion de Levi-Civita s'écrit

$$\nabla = \nabla^0 + \Gamma$$

où ∇^0 est la connexion naïve du système de coordonnées, de sorte que

$$\nabla^0_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = \sum_i x_i'' \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Comme

$$\gamma'(t) = \sum_i x_i'(t)\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$\begin{aligned}\Gamma(\gamma'(t),\gamma'(t)) &= \sum_{i,j} x_i'(t)x_j'(t)\Gamma(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \sum_{i,j} x_i'(t)x_j'(t)\Gamma^k_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_k}\end{aligned}$$

d'où l'équation

$$x_k'' + \sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}x_i'x_j' = 0.$$

Exercice 9 *En utilisant l'exercice 7, montrer que les droites passant par l'origine sont des géodésiques de la métrique de Poincaré du disque*

Solution de l'exercice 9. *Géodésiques de la métrique de Poincaré du disque.*

La métrique g de Poincaré s'écrit $g = e^f g_0$ où $f(x,y) = 2\log(1-(x^2+y^2)$ et g_0 désigne la métrique euclidienne. Si e_r est le champ de vecteurs radial unitaire pour la métrique de Poincaré, alors $\nabla^0_{e_r}e_r$ est colinéaire à e_r. En effet, e_r est colinéaire au champ radial unitaire pour la métrique euclidienne, qui est géodésique. D'après l'exercice 7,

$$\nabla_{e_r}e_r = \nabla^0_{e_r}e_r + 2df(e_r)e_r - (e_r \cdot_0 e_r)\nabla^0 f$$

est colinéaire à e_r. Comme la norme de e_r est constante, $\nabla_{e_r}e_r = 0$.

Exercice 10 *Soient N et N' deux sous-variétés de M et γ une courbe reliant N à N' et de longueur minimale (parmi les courbes reliant N à N'). Montrer que γ est une géodésique orthogonale à N et à N' aux extrémités.*

Solution de l'exercice 10. *Perpendiculaire commune.*

A fortiori, γ est de longueur minimale parmi les courbes reliant ses extrémités, donc c'est une géodésique. Supposons que γ n'est pas orthogonale à N en $\gamma(0)$. Alors il existe un vecteur v tangent à N en $\gamma(0)$ tel que $v \cdot T >$. Soit $s \mapsto \sigma(s)$ une courbe tracée dans N dont la vitesse initiale est v. Etendons γ et σ en une famille de courbes γ_s telle que $\gamma_s(0) = \sigma(s)$, $\gamma_0 = \gamma$ et $\gamma_s(t) = \gamma(t)$ sauf pour t voisin de 0 (c'est une construction locale au voisinage du point $\gamma(0)$). La formule de la variation première donne que

$$\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Long}(\gamma_s)_{|s=0} = -v \cdot \gamma'(0) < 0$$

ce qui contredit l'hypothèse de minimalité.

Exercice 11 *Soit $r \mapsto g_r$ une famille de métriques riemanniennes sur $\mathbf{R}^{n-1}$. On munit $\mathbf{R}^n$ de la métrique $g = dr^2 + g_r$. Montrer que les courbes $t \mapsto (x,t)$ sont des géodésiques* minimisantes, *i.e. elles réalisent la distance entre leurs extrémités. Vérifier aussi au moyen de la connexion de Levi-Civita qu'elles sont solutionsde l'équation des géodésiques.*

Solution de l'exercice 11. *Géodésiques normales à une hypersurface.*

Pour toute courbe reliant les hypersurfaces $\{r = r_1\}$ et $\{r = r_2\}$, la longueur est au moins égale à $\int |dr| \geq |r_2 - r_1|$. Par conséquent, les courbes $t \mapsto (x,t)$ minimisent la longueur parmi toutes les courbes reliant $\{r = r_1\}$ et $\{r = r_2\}$. En particulier, elles sont géodésiques et minimisantes. On peut aussi, notant $T = \frac{\partial}{\partial r}$, calculer $\nabla_T T$. Comme T est unitaire, $\nabla_T T$ est orthogonal à T. Tout vecteur $v \in \mathbf{R}^{n-1}$ se prolonge en un champ de vecteurs constant V tangent aux hypersurfaces de niveau de r, et tel que $[T,V] = 0$. Alors les trois crochets de Lie entrant dans la formule pour $V \cdot \nabla_T T$ sont nuls et les trois produits scalaires sont constants, donc $V \cdot \nabla_T T = 0$. Cela prouve que $\nabla_T T = 0$.

Exercice 12 *Soient M_1 et M_2 deux variétés riemanniennes. Leur* produit riemannien *est la variété produit $M_1 \times M_2$ munie de la métrique $g_1 + g_2$. Montrer que les géodésiques de $M_1 \times M_2$ sont les courbes dont les projections sur M_1 et M_2 sont géodésiques.*

Solution de l'exercice 12. *Géodésiques d'un produit.*

L'énergie de la courbe produit

$$t \mapsto c(t) = (c_1(t), c_2(t)) \in M_1 \times M_2$$

est la somme des énergies,

$$E(c) = E(c_1) + E(c_2).$$

Par conséquent, c est point critique de l'énergie à extrémités fixées si et seulement si c_1 et c_2 ont la même propriété.

Exercice 13 *Décrire l'application exponentielle de la sphère de dimension 2, au pôle nord.*

Solution de l'exercice 13. *Exponentielle sur la sphère.*

L'exponentielle au pôle nord $N = (0, 0, 1)$ enroule chaque droite passant par l'origine du plan tangent autour du grand cercle de même direction. Utilisons les coordonées polaires (r, θ) sur le plan tangent et les coordonnées $(u = latitude, v = longitude)$ sur la sphère. L'exponentielle s'écrit donc

$$\exp_N(r, \theta) = (u = \mathrm{scie}(r), v = \theta + \mathrm{creneau}(r))$$

où $\mathrm{scie}(r) = \frac{\pi}{2} - r$, $\mathrm{creneau}(r) = 0$ si $r \in [0, \pi]$ mod 2π, et $\mathrm{scie}(r) = r - \frac{3\pi}{2}$, $\mathrm{creneau}(r) = \pi$ si $r \in [\pi, 2\pi]$ mod 2π.

Exercice 14 *Soit $M = S^1 \times \mathbf{R}$ le produit riemannien d'un cercle de longueur L et d'une droite. Quel est son rayon d'injectivité ? Décrire des coordonnées normales.*

Solution de l'exercice 14. *Rayon d'injectivité d'un cylindre.*

Identifions le cercle de longueur L à $\mathbf{R}/L\mathbf{Z}$. Soit (s, r) un point de M. Alors l'application

$$\Phi_{s,r} :]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[\times \mathbf{R} \to M, \quad (\sigma, \rho) \mapsto (s + \sigma, r + \rho)$$

est un difféomorphisme sur un ouvert de M. Dans ces coordonnées, la métrique de M s'écrit

$$d\sigma^2 + d\rho^2.$$

Autrement dit, $\Phi_{s,r}$ est une isométrie d'une bande euclidienne sur un ouvert de M. Par conséquent, les géodésiques de M sont les courbes qui, lues dans une carte $\Phi_{s,r}$ quelconque, sont des droites. En particulier, la courbe $t \mapsto c(t) = (s+t \; mod \; L, r)$ est une géodésique de vitesse 1, elle s'écrit donc $\exp_{(s,r)} tv$ où v est un vecteur tangent unitaire en (s, r). Comme $c(-\frac{L}{2}) = c(\frac{L}{2})$, le rayon d'injectivité est au plus égal à $\frac{L}{2}$. En fait, $\Phi_{s,r}$ peut être vue comme la restriction de l'exponentielle $\exp_{(s,r)}$ à la bande $]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[\times\mathbf{R}$. En effet, l'application

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \to M, \quad (\sigma, \rho) \mapsto (s + \sigma, r + \rho)$$

envoie les droites passant par l'origine sur des géodésiques parcourues à vitesse constante. Elle est injective sur le disque euclidien de rayon $\frac{L}{2}$, donc le rayon d'injectivité vaut $\frac{L}{2}$. On peut prendre σ et ρ comme coordonnées normales.

Exercice 15 *Soit $M_{l,L}$ le quotient riemannien du plan euclidien par le groupe engendré par les deux translations $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y + L)$. Quel est son rayon d'injectivité ?*

Solution de l'exercice 15. *Rayon d'injectivité d'un tore plat.*

Par définition, la surjection canonique $\pi : \mathbf{R}^2 \to M_{l,L}$ est une isométrie locale. Si $T_{x,y}$ désigne la translation de vecteur (x, y), $\pi \circ T_{x,y}$ envoie les droites passant par l'origine sur des géodésiques passant par le point $(x \; mod \; l, y \; mod \; L)$ de M, donc c'est l'exponentielle en ce point. Elle est injective sur le disque de rayon $\min\{l, L\}$, et n'est pas injective sur un disque plus grand. Par consqéquent, le rayon d'injectivité vaut $\min\{l, L\}$.

Exercice 16 *Vérifier que les méridiens d'une surface de révolution (resp. d'un tube) sont des géodésiques.*

Solution de l'exercice 16. *Méridiens et géodésiques.*

Evidemment, pour les surfaces de révolution, on le sait dejà de multiples façons. On remarque ici que si un méridien est parcouru a vitesse constante, son accélération est située dans le plan méridien et orthogonale à la vitesse. Elle est donc orthogonale à la fois à $\frac{\partial X}{\partial \theta}$ et à $\frac{\partial X}{\partial \phi}$. Pour les cercles de rayon ϵ qui engendrent un tube, l'accélération est ϵ^{-1} fois la normale.

Exercice 17 *Soit $M_{l,L}$ le quotient riemannien du plan euclidien par le groupe engendré par les deux translations $(x, y) \mapsto (x + l, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, y + L)$. Quel est son aire ?*

Solution de l'exercice 17. *Aire d'un espace quotient.*

Le rectangle euclidien $\{0 \leq x < l, 0 \leq y < L\}$ s'envoie isométriquement et injectivement dans $M_{l,L}$ par la surjection canonique. L'aire de $M_{l,L}$ est donc égale à celle du rectangle, soit lL.

Exercice 18 *Quelle est l'aire de la pseudosphère ?*

Solution de l'exercice 18. *Aire de la pseudosphère.*

On utilise l'exercice 1. En coordonnées stéréographiques, la métrique de la pseudosphère s'écrit

$$g = \frac{16(dx^2 + dy^2)}{(4 - x^2 - y^2)^2}$$

sur le disque D de rayon 2. L'élement d'aire s'écrit donc

$$vol_g = \frac{16\, dx \wedge dy}{(4 - x^2 - y^2)^2},$$

d'où l'aire

$$\begin{aligned}
\mathrm{aire}(\Psi S) &= \int_D \frac{16\, dx \wedge dy}{(4 - x^2 - y^2)^2} \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr\, d\theta}{(4 - r^2)^2} \\
&= \int_0^2 2\pi \frac{r\, dr}{(4 - r^2)^2} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 19 *Soit M une variété riemannienne complète, et $N \subset M$ une sous-variété. Montrer que N est complète si et seulement si N est un sous-ensemble fermé de M.*

Solution de l'exercice 19. *Complétude des sous-variétés.*

Le plongement isométrique $N \to M$ diminue les distances. Une suite de Cauchy dans N l'est aussi dans M, donc converge dans M. Si N est un sous-ensemble fermé de M, la limite est un point P de N. Au voisinage de P, la distance intrinsèque et la distance induite par M sont équivalentes, donc la suite converge dans N, et N est complète. Inversement, supposons N complète. Si une suite de points de N converge vers un point P de M, elle est de Cauchy dans N, par équivalence locale des distances. La limite dans N coïncide avec P, donc $P \in N$, et N est fermée.

Exercice 20 *Soit M le disque muni de sa métrique de Poincaré, et P le centre du disque. En utilisant le résultat de l'exercice 9, montrer que $\exp_P$ est définie globalement. En déduire que la pseudosphère est complète. Que vaut l'aire de la boule de centre P et de rayon δ ?*

Solution de l'exercice 20. *Complétude de la pseudosphère.*

D'après l'exercice 9, les segments de droites passant par l'origine sont des géodésiques. Calculons la longueur du segment $c_{\theta,R} : t \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta)$, $t \in [0, R]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Long}(c_{\theta,R}) &= \int_0^R \frac{4\,dt}{4-t^2} \\
&= \log(\frac{2+R}{2-R}).
\end{aligned}$$

Lorsque R tend vers 2, la longueur tend vers l'infini. Par conséquent, la paramétrisation de $c_{\theta,2}$ par son abscisse curviligne est définie sur $\mathbf{R}_+$ tout entier. $\exp_P$ est définie globalement. Le théorème de Hopf-Rinow entraîne que la pseudosphère est complète. Comme on connait tous les segments géodésiques issus de P et leurs longueurs, on connaît la distance à P : un point (x, y) est à distance δ de P si et seulement si $R = \sqrt{x^2+y^2}$ satisfait $\delta = \log(\frac{2+R}{2-R})$, c'est à dire

$$R = 2\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathrm{aire}(\{x^2+y^2 < R^2\}) &= \int_0^R 2\pi \frac{16\, r\, dr}{(4-r^2)^2} \\
&= 16\pi \int_0^{R^2} \frac{du}{(4-u)^2} \\
&= \frac{4\pi R^2}{4-R^2} \\
&= 4\pi(\cosh(\delta) - 1).
\end{aligned}$$

Exercice 21 *Soit M une variété riemannienne complète. Soit G un groupe d'isométries de M agissant sans points fixes sur M. On munit G de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, et on suppose G discret. Montrer que* *l'espace des orbites $N = G \setminus M$, muni de la distance quotient (voir exercice 3), est une variété riemannienne complète. Exprimer son rayon d'injectivité en un point P en fonction du rayon d'injectivité de M aux points de l'orbite et des distances mutuelles entre points de l'orbite.*

Solution de l'exercice 21. *Rayon d'injectivité d'un espace quotient.*

Montrons que G agit proprement discontinument sur M. Soit $K \subset M$ un compact. Supposons que G compte une infinité déléments g tels que $g(K) \cap K \neq \emptyset$. Soit g_j une suite d'éléments distincts de G tels que $g_j(K) \cap K \neq \emptyset$. Fixons un point P de K. Alors $d(P, g_j(P)) \leq 2\,diam(K)$. Les applications g_j sont équicontinues (1-Lipschitziennes), elles envoient la boule $B(P,R)$ dans la boule fermée $B(P, R + 2\,diam(K))$ qui est compacte. D'après le théorème d'Ascoli, il existe une sous-suite convergeant uniformément sur $B(P,R)$. Par un procédé diagonal, on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur toute boule donc sur tout compact. Comme G est discret pour cette topologie, la suite g_j est stationnaire, contradiction. On en déduit que l'espace des orbites $N = G \setminus M$ possède une structure de variété, et que la projection $M \to N$ est un revêtement. Comme G agit par isométries, la métrique riemannienne de M passe au quotient. On vérifie que la distance riemannienne coïncide avec la distance quotient comme dans l'exercice 3. Les géodésiques de N sont les projections des géodésiques de M, donc elles sont définies globalement. Par conséquent, N est complète. La projection $\pi : M \to N$ est localement isométrique donc elle commute avec les exponentielles. Si $\pi(Q) = P$,

$$\pi \circ \exp_Q = \exp_P \circ d_Q\pi.$$

Par conséquent, $\mathrm{inj}_Q \geq \mathrm{inj}_P$. Si Q, $Q' \in \pi^{-1}(P)$ et $2r > d(Q,Q')$, les boules $B(Q,r)$ et $B(Q',R)$ se coupent, donc π n'est pas injective sur $B(Q,r)$, donc $\exp_P \circ d_Q\pi = \pi \circ \exp_Q$ n'est pas injective sur la boule de rayon r. Par conséquent, $\mathrm{inj}_P \leq \frac{1}{2} d(Q,Q')$. Inversement, si $r = \min\{\mathrm{inj}_Q, \frac{1}{2}\inf_{Q' \in GQ} d(Q,Q')\}$, alors $\exp_P \circ d_Q\pi = \pi \circ \exp_Q$ est injective sur la boule ouverte de rayon r. On conclut que

$$\mathrm{inj}_P = \min\{\mathrm{inj}_Q, \frac{1}{2} \inf_{Q' \in GQ} d(Q,Q')\}.$$