# Géométrie Riemannienne : exercices du chapitre 1

**Exercice 1** *Soit $s \mapsto (r(s), 0, z(s))$ une courbe tracée dans un plan vertical. Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe, baptisée* méridienne, *autour de l'axe $Oz$.*

**Solution de l'exercice 1.** *Paramétrisation d'une surface de révolution.*

On applique au vecteur $\begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix}$ la matrice $\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de la rotation d'angle $v$ autour de l'axe $Oz$. Il vient

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} r(u)\cos(v) \\ r(u)\sin(v) \\ z(u) \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2** *Paramétrer la surface d'égale pente $\alpha$ s'appuyant sur une courbe plane.*

**Solution de l'exercice 2.** *Paramétrisation de la surface d'égale pente $\alpha$ s'appuyant sur une courbe plane.*

Par hypothèse, la courbe plane donnée $c$ est contenue dans la surface $X$ cherchée, donc on peut prendre $\gamma = c$. De plus, comme les plans dont on prend l'enveloppe sont tangents à $c$, $c' \cdot \nu = 0$, donc $\sigma = \gamma = c$ est solution des équations (**??**) et (**??**). Supposons $c$ paramétrée par son abscisse curviligne. Le vecteur normal $\nu$ au plan $\Pi$ cherché doit satisfaire

$$\nu \cdot e_3 = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \nu \cdot c' = 0.$$

Il vient

$$\nu = \cos\alpha e_3 \pm \sin\alpha e_3 \wedge c',$$

d'où

$$\begin{aligned} \nu' &= \pm\sin\alpha e_3 \wedge c'' && (1) \\ &= \mp\sin\alpha\kappa c' && (2) \end{aligned}$$

où $\kappa$ est la courbure de $c$ dans le plan horizontal orienté par sa normale $e_3$. La droite $D(s)$ qui engendre $X$ est donc parallèle au vecteur

$$\frac{\mp 1}{\kappa\sin\alpha}\nu \wedge \nu' = \mp\sin\alpha e_3 + \cos\alpha e_3 \wedge c'.$$

Elle se projette sur la normale à $c$ dans le plan horizontal. On peut donc paramétrer la surface $X$ par

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u) - vy'(u)\cos\alpha \\ y(u) + vx'(u)\cos\alpha \\ \pm v\sin\alpha \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

**Exercice 3** *Soit $c$ une courbe sans point d'inflexion. En utilisant le trièdre de Frenet, paramétrer le tube de largeur $\epsilon$ autour de $c$.*

**Solution de l'exercice 3.** *Paramétrisation d'un tube.*

Soit $u \mapsto c(u)$ une courbe gauche sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne. Le plan vectoriel orthogonal à la tangente $\tau := c'$ à $c$ est engendré par la normale unitaire $\nu$ (colinéaire à l'accélération $c''$) et la binormale $b := \tau \wedge \nu$. On choisit de paramétrer la surface $X$ balayée par le cercle de rayon $\epsilon$ par

$$(u, v) \mapsto c(u) + \epsilon \cos(v)\nu(u) + \epsilon \sin(v)b(u).$$

**Exercice 4** *On paramètre la sphère unité par la latitude $\theta$ et la longitude $\phi$. Ecrire cette paramétrisation. La normale orientée sort elle ou rentre-t-elle dans la sphère ? Ecrire la première forme fondamentale. Calculer la longueur d'un parallèle. Calculer l'aire de la sphère unité.*

**Solution de l'exercice 4.** *Première forme fondamentale de la sphère.*

Le point de longitude $\phi = 0$ et de latitude $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ a pour coordonnées $(\cos\theta, 0, \sin\theta)$. Le point de longitude $\phi \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ et de latitude $\theta$ s'obtient en lui appliquant une rotation d'angle $\phi$ autour de l'axe des $z$, i.e.

$$X(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ 0 \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

On calcule

$$ds^2 = d\theta^2 + (\cos\theta)^2 d\phi^2.$$

Un parallèle est paramétré par $\phi \mapsto (\theta, \phi)$, $\phi \in [0, 2\pi[$, donc sa longueur est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos\theta)^2}\, d\phi = 2\pi\cos\theta.$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial X}{\partial\phi} = -X(\theta, \phi)$$

donc le vecteur unitaire normal orienté est $\Gamma(\theta, \phi) = -X(\theta, \phi)$, il pointe vers l'intérieur de la sphère. L'élément d'aire vaut $\cos\theta\, d\theta\, d\phi$ donc l'aire de la sphère vaut

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi. \blacksquare$$

**Exercice 5** *Si $P$ et $Q$ sont deux points de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, on définit leur distance $d(P, Q)$ comme la borne inférieure des longueurs des courbes tracées sur la sphère qui relient $P$ à $Q$. Montrer que $d(P, Q) = \mathrm{Arccos}(P \cdot Q)$, i.e. que la borne inférieure est atteinte par un des arcs du grand cercle passant par $P$ et $Q$.*

**Solution de l'exercice 5.** *Distance intrinsèque sur la sphère.*

On note $N = (0,0,1)$ le pôle nord et on utilise les coordonnées $\theta$ (latitude) et $\phi$ (longitude). Si $P = X(\theta,\phi)$ (voir exercice 4), alors $\mathrm{Arccos}(P\cdot N) = (\pi/2) - \theta$. Soit $t \mapsto (\theta(t),\phi(t))$, $t \in [0,1]$, une courbe dans le plan reliant $(\theta_0,\phi_0)$ à $(\pi/2,\phi_1)$. La longueur de son image sur la sphère satisfait

$$\begin{aligned}
\mathrm{Long}(X\circ c) &= \int_0^1 \sqrt{\theta'(t)^2 + \cos(\theta(t))^2\phi'(t)^2}\,dt \\
&\geq \int_0^1 |\theta'(t)|\,dt \\
&\geq |\frac{\pi}{2} - \theta_0|.
\end{aligned}$$

L'égalité a lieu si $\phi' = 0$, i.e. pour un arc de méridien. Par conséquent, parmi toutes les courbes reliant $P = X(\theta_0,\phi_0)$ au pôle nord et qui sont l'image d'une courbe plane par la paramétrisation $X$, l'arc de méridien a une longueur minimum. Il reste à voir que toute courbe évitant les pôles mais convergeant vers le pôle nord est de ce type. C'est un argument topologique.

**Exercice 6** *Calculer l'aire d'une surface de révolution générale, puis dans le cas particulier du tore de révolution dont la méridienne est un cercle de rayon $r_2$ dont le centre est situé à distance $r_1 > r_2$ de l'axe.*

**Solution de l'exercice 6.** *Aire d'une surface de révolution.*

On remplace le méridien semi-circulaire

$$\theta \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\ 0\\ \sin\theta\end{pmatrix}.$$

par une courbe quelconque

$$u \mapsto \begin{pmatrix}r(u)\\ 0\\ z(u)\end{pmatrix}$$

tracée dans le plan $\{y = 0\}$. On obtient pour la surface de révolution la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = \begin{pmatrix}r(u)\cos v\\ r(u)\sin v\\ z(u)\end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix}r'(u)\cos v\\ r'(u)\sin v\\ z'(u)\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix}-r(u)\sin v\\ r(u)\cos v\\ 0\end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v} = r(u)\begin{pmatrix}-z'(u)\cos v\\ -z'(u)\sin v\\ r'(u)\end{pmatrix}$$

d'où

$$\| \frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v} \| = r(u)\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}$$

et enfin, si on considère le secteur de la surface d'angle $\phi$,

$$\mathrm{Aire}(X) = \int\int_0^{\phi} r(u)\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}\,dv\,du = \int_0^{\ell} \phi r(s)\,ds$$

où $s$ est l'abscisse curviligne le long de la méridienne. Si $\ell$ désigne la longueur de la méridienne, la valeur moyenne

$$\ell^{-1}\int r(s)\,ds$$

est la distance du centre de gravité de la méridienne à l'axe. On obtient donc le théorème de Guldin : l'aire d'un secteur d'une surface de révolution est le produit de la longueur de la méridienne par la longueur du cercle parcouru par le centre de gravité de la méridienne. Dans le cas d'un tore de révolution, l'aire vaut donc $2\pi r_1 \times 2\pi r_2$.

**Exercice 7** *Soit $c$ une courbe sans point d'inflexion. Calculer la première forme fondamentale et l'aire du tube de largeur $\epsilon$ autour de $c$, pour $\epsilon > 0$ assez petit.*

**Solution de l'exercice 7.** *Première forme fondamentale et aire d'un tube.*

Pour dériver la paramétrisation obtenue dans l'exercice 3, on utilise les formules de Frenet

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ \nu' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\theta \\ 0 & \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ b \end{pmatrix}$$

où $\kappa :=\| c'' \|$ est la courbure et $\theta := b' \cdot \nu$ est la torsion. Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1 - \epsilon\kappa\cos(v))\tau - \epsilon\theta\sin(v)\nu + \epsilon\theta\cos(v)b, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\epsilon\sin(v)\nu + \epsilon\cos(v)b.$$

On note $J(u,v) = 1 - \epsilon\kappa(u)\cos(v)$ et on suppose que cette quantité est toujours positive. Il vient

$$E =\| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 = J^2 + \epsilon^2\theta^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \epsilon^2\theta,$$

$$G =\| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 = \epsilon^2, \quad EG - F^2 = \epsilon^2 J^2.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Aire}(X) &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \epsilon J\,dv\,du \\ &= \epsilon\int_0^L \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon\kappa(u)\cos(v))\,dv\,du \\ &= 2\pi\epsilon L \end{aligned}$$

où $L$ est la longueur de la courbe $c$.

**Exercice 8** *Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère unité au pôle nord.*

**Solution de l'exercice 8.** *Seconde forme fondamentale de la sphère.*

Au pôle nord $P = (0, 0, 1)$, le plan tangent est le plan vectoriel horizontal $H = \{z = 0\}$, la normale orientée est le vecteur $\nu = (0, 0, -1)$. Au voisinage du pôle nord, la sphère unité est paramétrée par

$$H \mapsto \mathbf{R}^3, \quad v \mapsto P + v + f(v)\Gamma$$

où $f(v) = -\sqrt{1- \parallel v \parallel^2}$. Le développement limité à l'ordre 2 de $f$ en 0 est

$$f(v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 + o(\parallel v \parallel^2)$$

donc la seconde forme fondamentale est simplement $v \mapsto \parallel v \parallel^2$. En fonction des coordonnées $x$ et $y$ sur $H$, elle s'écrit $(x, y) = x^2 + y^2$ ou bien simplement $dx^2 + dy^2$. Les courbures principales valent 1. Toute direction est une direction principale, toute courbe est une ligne de courbure.

**Exercice 9** *Soit $t \mapsto c(t)$ une courbe tracée dans le plan horizontal $\{z = 0\}$ de $\mathbf{R}^3$. Soit $C$ le cylindre droit sur $c$, i.e. la réunion des droites verticales coupant la courbe $c$. Calculer la seconde forme fondamentale du cylindre $C$ en l'un de ses points.*

**Solution de l'exercice 9.** *Seconde forme fondamentale d'un cylindre.*

Au point $P = (c(0), z)$, le plan tangent au cylindre est engendré par $(0, 0, 1)$ et par le vecteur tangent à la courbe $\tau(0)$. La normale unitaire est donc la normale $\nu(0)$ à la courbe. On écrit la courbe comme un graphe

$$u \mapsto P + u\tau + f(u)\Gamma,$$

de sorte que la courbure apparaissent dans le développement limité

$$f(u) = \frac{1}{2}\kappa(0)u^2 + o(u^2).$$

Le cylindre devient un graphe

$$(u, v) \mapsto P + u\tau + (0, 0, v) + f(u)\Gamma$$

avec une fonction qui ne dépend que de $u$. Le développement limité ci-dessus donne pour la seconde forme fondamentale du cylindre l'expression

$$q(u, v) = \kappa(0)u^2.$$

Elle est dégénérée. Les courbures principales valent 1 et $\kappa(s)$. Les directions principales en un point $(c(s), z)$ sont la droite verticale et la tangente à $c$. Les liignes de courbure sont les droites verticales (directrices) et les sections par des plans horizontaux.

**Exercice 10** *Supposons que la surface $X$ contient la droite $D$. Montrer que $D$ est une direction asymptotique de $X$*

**Solution de l'exercice 10.** *Les droites contenues dans les surfaces sont des directions asymptotiques.*

Soit $t \mapsto Y(t) = P + su$ une paramétrisation affine de $D$. Alors $Y'' = 0$ donc en chaque point $II(u) = II(Y'(t)) = Y''(t) \cdot \Gamma(Y(t)) = 0$ et $D$ est une direction asymptotique.

**Exercice 11** *Soit $X$ le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$. Calculer sa seconde forme fondamentale, ses courbures principales. Quelles sont les directions asymptotiques ? On utilisera deux systèmes de coordonnées différents, $(u, v) \mapsto X(u, v) = (u, v, uv)$ et $(u', v') \mapsto X_1(u', v') = (u'/v', v', u')$ et on comparera les résultats obtenus.*

**Solution de l'exercice 11.** *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques d'un paraboloïde hyperbolique.*

A partir de la paramétrisation $(u, v) \mapsto X(u, v) = (u, v, uv)$, on calcule

$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = \sqrt{1 + u^2 + v^2},$$

$A = C = 0$ et

$$B = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}.$$

donc la seconde forme fondamentale s'écrit

$$II = \frac{2}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} du\, dv.$$

Les droites isotropes de cette forme quadratique sont les axes de coordonnées. On retrouve le fait que les droites contenues dans la surfaces sont des courbes asymptotiques. Avec la paramétrisation $(u', v') \mapsto X_1(u', v') = (u'/v', v', u')$, il vient

$$\| \frac{\partial X_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial X_1}{\partial v} \| = v'^{-2} \sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2},$$

puis $A = 0$,

$$B = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}}$$

et

$$C = \frac{2u'}{v' \sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}}$$

d'où

$$II_{(\frac{u'}{v'}, v', u')} = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}} (2\, du'\, dv' - 2 \frac{u'}{v'}\, dv'^2).$$

Il s'agit bien de la même forme quadratique sur le plan tangent. En effet, si on substitue $u' = uv$, $v' = v$, $du' = v\,du + u\,dv$, $dv' = dv$, on trouve

$$II_{(\frac{u'}{v'},v',u')} = \frac{2}{\sqrt{1+u^2+v^2}} du\,dv = II(u,v,uv).$$

En d'autres termes, un vecteur tangent au point $P = (\frac{u'}{v'}, v', u') = (u, v, uv)$ peut s'écrire sous deux formes,

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + b\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) \quad \text{ou} \quad a'\frac{\partial X_1}{\partial u}(u',v') + b'\frac{\partial X_1}{\partial v}(u',v').$$

Nécessairement

$$a' = du'(w) = (v\,du + u\,dv)(w) = va + ub \quad \text{et} \quad b' = dv'(w) = dv(w) = b.$$

Alors

$$II_P(w) = \frac{1}{\sqrt{v'^4 + u'^2 + v'^2}}(2a'b' - 2\frac{u'}{v'}b'^2) = \frac{2ab}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

**Exercice 12** *Soit $c$ une courbe tracée dans le plan $\{z = 0\}$. Soit $V = (0,0,1)$, soit $X$ le cône de sommet $V$ et de base $c$. Calculer sa seconde forme fondamentale. Quelle est sa signature ?*

**Solution de l'exercice 12.** *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques du cône sur une courbe plane.*

On suppose $c$ paramétrée par son abscisse curviligne. On utilise la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = (1-u)V + uc(v) = (ux(v), uy(v), 1-u).$$

Il vient

$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = |u|\sqrt{1 + \det(c,c')^2},$$

$A = B = 0$ et

$$C = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = \frac{-|u|\kappa(v)}{\sqrt{1+\det(c,c')^2}}.$$

La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II = \frac{-|u|\kappa(v)}{\sqrt{1+\det(c,c')^2}}\, dv^2.$$

Elle est dégénérée, du signe de la courbure de $c$. Le long de la directrice passant par un point de $c$ où la courbure de $c$ n'est pas nulle, la droite isotrope est l'axe des $u$. Par conséquent, lorsque $c$ n'a pas de point d'inflexion, les courbes asymptotiques sont les directrices du cône. Le long de la directrice passant par un point d'inflexion de $c$, la seconde forme fondamentale est identiquement nulle.

**Exercice 13** *Soit $c$ une courbe tracée sur la sphère unité. Soit $X$ le cône de sommet l'origine et de base $c$. Calculer sa seconde forme fondamentale.*

**Solution de l'exercice 13.** *Seconde forme fondamentale et lignes asymptotiques du cône sur une courbe tracée sur la sphère unité.*

On suppose $c$ paramétrée par son abscisse curviligne. On utilise la paramétrisation

$$(u,v) \mapsto X(u,v) = uc(v).$$

Il vient

$$\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \| = |u|$$

car $c' \cdot c = 0$, $A = B = 0$ et

$$C = \| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \|^{-1} \det(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}) = |u| \det(c, c', c'').$$

Autrement dit, $C$ s'annule si et seulement si le plan osculateur de la courbe $c$ passe par l'origine. La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II = |u| \det(c, c', c'')\, dv^2.$$

Elle est dégénérée, son signe dépend de la position de l'origine par rapport au plan osculateur de la courbe $c$. Le long de la directrice passant par un point de $c$ où la courbure de $c$ n'est pas nulle, la droite isotrope est l'axe des $u$. Par conséquent, lorsque le plan osculateur de $c$ ne passe jamais par l'origine, les courbes asymptotiques sont les directrices du cône.

**Exercice 14** *Soit $X$ la surface de révolution décrite par une courbe plane située dans un plan vertical (la* méridienne*) qu'on fait tourner autour de l'axe des $z$. Paramétrer $X$, calculer les courbures principales et les directions principales. Traiter le cas particulier du tore de révolution de méridienne circulaire.*

**Solution de l'exercice 14.** *Courbures principales, directions principales d'une surface de révolution. Cas particulier d'un tore de révolution.*

On paramètre la méridienne par

$$u \mapsto \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix}$$

et la surface entière en faisant tourner la méridienne autour de l'axe des $z$, soit

$$X(u,v) = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(u)\cos v \\ r(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \begin{pmatrix} r'(u)\cos v \\ r'(u)\sin v \\ z'(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = \begin{pmatrix} -r(u)\sin v \\ r(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma(X(u,v)) = \sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}^{-1} \begin{pmatrix} -z'(u)\cos v \\ -z'(u)\sin v \\ r'(u) \end{pmatrix}.$$

La première forme fondamentale est donc

$$(r'(u)^2 + z'(u)^2)du^2 + r(u)^2 dv^2.$$

On calcule ensuite

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} r''(u)\cos v \\ r''(u)\sin v \\ z''(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -r'(u)\sin v \\ r'(u)\cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -r(u)\cos v \\ -r(u)\sin v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{(-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u))}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}},$$

$B = 0$ et

$$C = \frac{r(u)z'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

La seconde forme fondamentale s'écrit donc

$$II_{X(u,v)} = \frac{(-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u))du^2 + (r(u)z'(u))dv^2}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

La matrice $S$ qui permet d'exprimer la seconde forme fondamentale par rapport à la première est donc

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} r'(u)^2 + z'(u)^2 & 0 \\ 0 & r(u)^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{-z'(u)r''(u)+z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r(u)z'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-z'(u)r''(u)+z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}^3} & 0 \\ 0 & \frac{z'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2+z'(u)^2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc les directions principales sont les axes, les lignes de courbure sont les méridiens et les parallèles, les courbures principales sont

$$k_1(X(u,v)) = \frac{-z'(u)r''(u) + z''(u)r'(u)}{\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}^3}$$

(c'est la courbure de la méridienne) et

$$k_2(X(u,v)) = \frac{z'(u)}{r(u)\sqrt{r'(u)^2 + z'(u)^2}}.$$

**Cas particulier du tore de révolution.** Dans ce cas, la méridienne est un cercle ne rencontrant pas l'axe de rotation, soit

$$r(u) = r_1 + r_2 \cos u, \quad z(u) = r_2 \sin u$$

où $0 < r_2 < r_1$. Les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{1}{r_1} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{\cos u}{r_1 + r_2 \cos u}.$$

La courbure de Gauss change de signe le long des 2 cercles de points où le plan tangent est horizontal, elle est positive dans la partie convexe et négative du côté de l'axe, comme il se doit.

**Exercice 15** *Soit $c$ une courbe gauche sans point d'inflexion. Soit $X$ le tube de largeur $\epsilon$ autour de $c$. Calculer l'intégrale par rapport à l'élément d'aire de la courbure de Gauss ainsi que de sa valeur absolue, les courbures principales et les directions principales.*

**Solution de l'exercice 15.** *Courbures principales d'un tube.*

Soit $u \mapsto c(u)$ une courbe gauche sans point d'inflexion, paramétrée par son abscisse curviligne. Le plan vectoriel orthogonal à la tangente $\tau$ à $c$ est engendré par la normale unitaire $\nu$ et la binormale $b$. On choisit de paramétrer la surface $X$ balayée par le cercle de rayon $\epsilon$ par

$$(u, v) \mapsto c(u) + \epsilon \cos(v)\nu(u) + \epsilon \sin(v)b(u).$$

On calcule

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1 - \epsilon\kappa \cos(v))\tau - \epsilon\theta \sin(v)\nu + \epsilon\theta \cos(v)b, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\epsilon \sin(v)\nu + \epsilon \cos(v)b.$$

On note $J(u, v) = 1 - \epsilon\kappa(u) \cos(v)$ et on suppose que cette quantité est toujours positive. Il vient

$$E = \| \frac{\partial X}{\partial u} \|^2 = J^2 + \epsilon^2\theta^2, \quad F = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \epsilon^2\theta,$$

$$G = \| \frac{\partial X}{\partial v} \|^2 = \epsilon^2, \quad EG - F^2 = \epsilon^2 J^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(X) &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \epsilon J \, dv \, du \\ &= \epsilon \int_0^L \int_0^{2\pi} (1 - \epsilon\kappa(u) \cos(v)) \, dv \, du \\ &= 2\pi\epsilon L \end{aligned}$$

où $L$ est la longueur de la courbe $c$. Le vecteur unitaire normal est

$$\Gamma(X(u,v)) = -\cos(v)\nu(u) - \sin(v)b(u) = c(u) - X(u,v).$$

On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \epsilon(\kappa(u)\theta(u)\sin(v) - \kappa'(u)\cos(v))\tau(u) + (\kappa(u)J(u,v) - \epsilon\theta'(u)\sin(v) \\
&\quad -\epsilon\theta(u)^2\cos(v))\nu(u) + \epsilon(\theta'(u)\cos(v) - \theta(u)^2\sin(v))b(u), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \epsilon\kappa(u)\sin(v)\tau(u) - \epsilon\theta(u)\cos(v)\nu(u) - \epsilon\theta(u)\sin(v)b(u), \\
\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= -\epsilon\cos(v)\nu(u) - \epsilon\sin(v)b(u).
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \cdot \Gamma(X(u,v)) = -\kappa(u)\cos(v)J(u,v) + \epsilon\theta(u)^2, \\
B &= \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \cdot \Gamma(X(u,v)) = \epsilon\theta(u), \\
C &= \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \cdot \Gamma(X(u,v)) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Pour la courbure de Gauss, on utilise la formule

$$\begin{aligned}
K(X(u,v)) &= \frac{AC - B^2}{EG - F^2} \\
&= \frac{-\epsilon\kappa\cos(v)J}{\epsilon^2 J^2}
\end{aligned}$$

puis on intègre par rapport à l'élément d'aire $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. Il vient

$$\begin{aligned}
\int K\, dA &= \int_0^L \int_0^{2\pi} K(X(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv \\
&= \int_0^L \int_0^{2\pi} -\kappa(u)\cos(v)\, du\, dv \\
&= 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int |K|\, dA &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \kappa(u)|\cos(v)|\, du\, dv \\
&= 4\int_0^L \kappa(u)\, du.
\end{aligned}$$

Pour trouver les courbures principales, on calcule la matrice de l'endomorphisme $S$ au moyen de la formule

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} &= \frac{1}{\epsilon^2 J^2} \begin{pmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon^2\theta \\ -\epsilon^2\theta & J^2 + \epsilon^2\theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa J\cos(v) + \epsilon\theta^2 & \epsilon\theta \\ \epsilon\theta & \epsilon \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\kappa\cos(v)}{J} & 0 \\ \frac{\theta\kappa}{J}\cos(v) - \epsilon & \frac{1}{\epsilon} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice, soit $-\dfrac{\kappa}{J}\cos(v)$ et $\frac{1}{\epsilon}$. Les directions principales sont $\{du = 0\}$ (tangent au cercle) et $\{\epsilon(\theta\kappa\cos(v) - \epsilon J)du + (J + \epsilon\kappa\cos(v))dv = 0\}$. On constate que les cercles sont des lignes de courbure.