Géométrie différentielle : exercices du chapitre 0

Exercice 1 *L'application*

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]\pi,\pi[\to \mathbf{R}^3, \quad (\theta,\phi)\mapsto X(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix},$$

est une paramétrisation d'un ouvert de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. *Etant donnée une courbe lisse* $t\mapsto q(t)=(\theta(t),\phi(t))\in U=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]\pi,\pi[$, *vérifier que la longueur de son image* $X\circ c$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *est égale à la longueur de* c *relative à la métrique riemannienne* $d\theta^2+\cos(\theta)^2d\phi^2$ *sur* U.

Exercice 2 *Soit* $s\mapsto(r(s),0,z(s))$ *une courbe tracée dans un plan vertical, paramétrée par son abscisse curviligne. Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe, baptisée* méridienne, *autour de l'axe* Oz. *Calculer la métrique induite dans cette paramétrisation.*

Exercice 3 *On modélise un bloc de verre par un demi-espace optiquement homogène et isotrope, i.e. d'indice constant* $n>1$, *le complementaire étant vide. On considère un rayon lumineux qui entre dans le verre. On note* i *l'angle d'incidence (angle du rayon avec la normale à l'interface dans le vide) et* r *l'angle de réfraction (angle du rayon avec la normale dans le verre). Etablir la loi de Snell* $\sin(i)=n\sin(r)$.

Exercice 4 *On s'intéresse au mouvement d'une bille glissant sans frottement dans une gouttière située dans un plan vertical, en partant d'un point* P *avec vitesse nulle et passant par un point* Q. *Suivant Bernoulli (1696), on cherche, parmi tous les profils de gouttière reliant* P *à* Q, *celui qui rend minimal le temps que la bille met à rejoindre* Q *depuis* P. *Montrer qu'il s'agit d'un problème variationnel lagrangien, équivalent à la recherche des géodésiques d'une métrique riemannienne dans un demi-plan.*

Exercice 5 *Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème de la brachistochrone (exercice 4), et la résoudre : on trouve (Newton 1697) des cycloïdes ayant une tangente verticale au point de départ.*

Exercice 6 *On cherche quelle forme d'équilibre doit prendre une corde inélastique de densité constante, située dans un plan vertical, fixée à ses extrémités, soumise à la seule gravité. S'agit-il d'un problème variationnel lagrangien ? Ecrire les deux lagrangiens en jeu et leurs équations d'Euler-Lagrange. En admettant le théorème des extrema liés, résoudre le problème. A translation et dilatation près, on trouve la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique (Bernoulli, 1691).*

Exercice 7 *Calculer le tenseur d'inertie d'un parallélépipède homogène par rapport à son centre de gravité.*

Exercice 8 *Montrer qu'un mouvement à force centrale se déroule dans un plan. Montrer que l'énergie mécanique s'exprime en fonction de* r *et* $\dot{r}$ *seulement. Montrer que cela ramène la résolution à des quadratures (i.e. au calcul de primitives).*

Exercice 9 *On appelle* métrique de révolution *sur* $\mathbf{R}^2$ *une métrique de la forme* $g_{(u,v)} = du^2 + r(u)^2\, dv^2$ *où* r *est une fonction positive. En appliquant le théorème de Noether et la conservation de la vitesse, trouver des intégrales premières de l'équation des géodésiques, et montrer que la résolution de l'équation se ramène à deux quadratures.*

Exercice 10 *Retrouver la conservation du moment cinétique par rapport à l'espace* μ *en appliquant directement le théorème de Noether au lagrangien du solide.*

Exercice 11 *On note* $\mu(R, \dot{R}) = R \int_S q \wedge R^{-1}\dot{R}q\, \rho(q)dq$ *le moment cinétique et* $E = L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2}A(R^{-1}\dot{R})$ *l'énergie cinétique d'un solide en mouvement autour de l'origine. Quelles sont les valeurs critiques de l'application* $(\mu, E) : TSO(3) \to \mathbf{R}^4$ *?*

Exercice 12 *Vérifier que la transformation de Legendre est involutive, i.e. que si* g *est la transformée de Legendre de* f*, alors* f *est la transformée de Legendre de* g*.*

Exercice 13 *On suppose que la fonction* $H(p, q, t) = H(q)$ *ne dépend ni de* p *ni de* t*. Vérifier que, dans ce cas, les équations d'Hamilton s'intègrent explicitement.*

Exercice 14 *Soit* g *une métrique riemannienne définie sur un ouvert* U *de* $\mathbf{R}^n$*. Ecrire le hamiltonien défini sur* $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ *qui décrit les géodésiques paramétrées à vitesse constante.*

Exercice 15 *Soit* H *un hamiltonien sur* $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$*. Soient* f *et* g *deux intégrales premières de* H*. Montrer que* $\{f, g\}$ *est encore une intégrale première. Dans le cas du mouvement d'un solide dans l'espace soumis à aucune force extérieure, montrer qu'il existe 6 intégrales premières (la vitesse du centre de gravité et le moment cinétique), et calculer leurs crochets de Poissons deux à deux.*

Exercice 16 *Déduire le théorème de Noether de sa version hamiltonienne, dans le cas où le lagrangien est surlinéaire et fortement convexe.*