Chapitre 1 : Calcul des variations

Pierre Pansu

12 juillet 2005

On présente les équations d'Euler-Lagrange caractérisant les extrémales des problèmes variationnels lagrangiens, puis un théorème d'E. Noether fournissant pour chaque symétrie infinitésimale du lagrangien une intégrale première des équations.

Ensuite, on relie les équations d'Euler-Lagrange aux équations de Hamilton. Ce nouveau point de vue éclaire le théorème de Noether et ouvre la voie à une méthode, dite d'Hamilton-Jacobi, pour trouver des intégrales premières qui ne sont pas nécessairement liées à des symétries.

Si le point de vue lagrangien est proche des problèmes de contrôle optimal, le point de vue hamiltonien, qui est celui qui se prête le mieux à la quantification, a la faveur des physiciens.

Dans ce chapitre, suivant une tradition pluricentenaire, on notera typiquement q un point de l'espace, $\dot{q}$ un vecteur.

1 Equations d'Euler-Lagrange

Avant de donner la définition générale d'un problème variationnel lagrangien, on décrit deux exemples, la recherche des plus courts chemins sur une surface, et le principe de Fermat en optique géométrique. Une fois obtenues les équations qui caractérisent les extrémales, on reconnaitra la nature variationnelle des équations de la dynamique pour une particule dans un champ de potentiel (principe de moindre action de Hamilton).

1.1 Métriques riemanniennes

Définition 1.1 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Une* métrique riemannienne ***(Riemannian metric)*** *sur U est la donnée d'une application lisse g de U dans l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $q \in U$, g_q soit définie positive. Etant données des coordonnées $q = (q_1, \ldots, q_n)$ sur $\mathbf{R}^n$, on peut écrire $g_q = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(q)\, dq_i\, dq_j$.*

Si $t \mapsto q(t)$, $[a, b] \to U$, est une courbe lisse dans U, sa longueur ***(length)*** *est*

$$\mathrm{Long}(c) = \int_a^b \sqrt{g_{q(t)}(\dot{q}(t))}\, dt.$$

Exercice 1 *L'application*

$$]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[\to \mathbf{R}^3, \quad (\theta,\phi)\mapsto X(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\cos(\phi)\\ \cos(\theta)\sin(\phi)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix},$$

est une paramétrisation d'un ouvert de la sphère unité de $\mathbf{R}^3$. *Etant donnée une courbe lisse* $t\mapsto q(t)=(\theta(t),\phi(t))\in U=]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\pi,\pi[$, *vérifier que la longueur de son image* $X\circ c$ *dans* $\mathbf{R}^3$ *est égale à la longueur de* c *relative à la métrique riemannienne* $d\theta^2+(\cos\theta)^2 d\phi^2$ *sur* U.

Exercice 2 *Soit* $s\mapsto(r(s),0,z(s))$ *une courbe tracée dans un plan vertical, paramétrée par son abscisse curviligne. Paramétrer la surface de révolution engendrée par la rotation de cette courbe, baptisée* méridienne, *autour de l'axe* Oz. *Calculer la métrique induite dans cette paramétrisation.*

1.2 Optique géométrique

La vitesse à laquelle la lumière voyage dans un milieu transparent n'est pas constante en général : elle dépend du point où on se trouve, et parfois aussi de la direction (milieux anisotropes). L'*indice* du milieu en un point q (et dans une direction $\dot q$) est le quotient de la vitesse de la lumière dans le vide par la vitesse de la lumière dans le milieu, $n(q,\dot q)=c/v\geq 1$.

Le *Principe de Fermat* énonce que le trajet suivi par un rayon lumineux qui passe par deux points Q_1 et Q_2 minimise le temps de parcours parmi tous les trajets possibles. Le long d'un chemin $t\mapsto q(t)$, la vitesse vaut $v=\parallel \dot q(t)\parallel$. Par conséquent, le temps de parcours vaut

$$\int dt=\int\frac{1}{v}\parallel \dot q(t)\parallel\; dt=\int\frac{1}{c}n(q(t),\dot q(t))\parallel \dot q(t)\parallel\; dt.$$

Si le matériau est isotrope (n ne dépend pas de la direction), cette intégrale (appelée parfois *chemin optique*) s'interprète comme la longueur relative à la métrique riemannienne n^2ds^2, *conforme* à la métrique euclidienne. Si le matériau est anisotrope (c'est le cas de certains cristaux), on se trouve en présence d'un problème plus général, qui motive la définition suivante.

Exercice 3 *On modélise un bloc de verre par un demi-espace optiquement homogène et isotrope, i.e. d'indice constant* $n>1$, *le complementaire étant vide. On considère un rayon lumineux qui entre dans le verre. On note* i *l'angle d'incidence (angle du rayon avec la normale à l'interface dans le vide) et* r *l'angle de réfraction (angle du rayon avec la normale dans le verre). Etablir la loi de Snell* $\sin(i)=n\sin(r)$.

1.3 Problèmes variationnels lagrangiens

Définition 1.2 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$. *Un* lagrangien *(`Lagrangian`) sur* U *est la donnée d'une fonction lisse* $L:U\times\mathbf{R}^n\times[a,b]\to\mathbf{R}$. *Le* problème variationnel associé *`(variational problem)` consiste à chercher, étant donnés deux points Q_1 et Q_2 de U, les courbes $c : [a,b] \to U$ tracées dans U, telles que $c(a) = Q_1$ et $c(b) = Q_2$, qui minimisent la fonctionnelle*

$$\Phi(c) = \int_a^b L(c(t), \dot c(t), t)\, dt.$$

Exemple 1.3 *La recherche des plus courts chemins riemanniens est le problème variationnel associé au lagrangien $L(q,\dot q,t) = \sqrt{g_q(\dot q)}$.*

Ce lagrangien possède les propriétés particulières suivantes.

1. il est indépendant du temps ;
2. il est homogène de degré 1 ;
3. il est convexe.

La propriété 1 rend le problème variationnel indépendant de l'intervalle $[a,b]$. 2 le rend invariant par les reparamétrisations de l'intervalle.

Exercice 4 *On s'intéresse au mouvement d'une bille glissant sans frottement dans une gouttière située dans un plan vertical, en partant d'un point P avec vitesse nulle et passant par un point Q. Suivant Bernoulli (1696), on cherche, parmi tous les profils de gouttière reliant P à Q, celui qui rend minimal le temps que la bille met à rejoindre Q depuis P. Montrer qu'il s'agit d'un problème variationnel lagrangien, équivalent à la recherche des géodésiques d'une métrique riemannienne dans un demi-plan.*

Lemme 1.4 *La fonctionnelle Φ est différentiable, sa différentielle est donnée par la formule suivante. Soit $s \mapsto c_s$ une famille lisse de courbes telle que $c_0 = c$ et $\frac{d}{ds} c_{s|s=0} = h$. Alors*

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Phi(c_s)_{|s=0} &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}(c(t),\dot c(t),t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(t),\dot c(t),t))\right)(h(t))\, dt \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(b),\dot c b, b)(h(b)) - \frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(a),\dot c a, a)(h(a)).\end{aligned}$$

Preuve. On dérive sous le signe somme,

$$\frac{d}{ds}\Phi(c_s)_{|s=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q}(c(t),\dot c(t),t)(h(t)) + \frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(t),\dot c(t),t)(\dot h(t))\right)\, dt$$

puis on intègre par parties

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(t),\dot c(t),t)(\dot h(t))\, dt &= [\frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(t),\dot c(t),t)(h(t))]_a^b \\ &\quad - \int_a^b \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(c(t),\dot c(t),t))(h(t))\, dt. \ \blacksquare\end{aligned}$$

1.4 Equations d'Euler-Lagrange

Définition 1.5 *Une* extrémale *(`extremal curve`) d'un problème variationnel lagrangien est une courbe qui annule la différentielle de Φ restreinte aux courbes d'extrémités fixées.*

Théorème 1 *La courbe c est une extrémale du problème variationnel associé au lagrangien L si et seulement si pour tout $t \in [a, b]$, la forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$*

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)) = 0.$$

Ce système de n équations différentielles du second ordre s'appelle les équations d'Euler-Lagrange *(`Euler-Lagrange equations`) du problème variationnel.*

Preuve. Pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ qui s'annule aux extrémités, on construit une famille $c_s(t) = q(t) + sh(t)$ de courbes d'extrémités fixées dont h est la dérivée. Alors

$$\frac{d}{ds}\Phi(q_s)_{|s=0} = \int_a^b J(t)(h(t))\,dt,$$

où $J(t)$ est la forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ donnée par

$$J(t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t), t) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)).$$

c est extrémale si et seulement si $\int_a^b J(t)(h(t))\,dt$ pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ qui s'annule aux extrémités. Le lemme suivant entraîne que c est extrémale si et seulement si $J \equiv 0$. ∎

Lemme 1.6 *Soit J une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ dépendant différentiablement de $t \in [a, b]$. On suppose que pour toute fonction lisse h sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, nulle au voisinage des extrémités, $\int_a^b J(t)(h(t))\,dt = 0$. Alors $J \equiv 0$.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe $\hat{t} \in]a, b[$ tel que $J(\hat{t}) \neq 0$. Soit $H(t) = J(t)^\top$ le vecteur dual de $J(t)$. Soit χ une fonction lisse, positive ou nulle, à support dans un petit voisinage de $\hat{t}$. On pose $h(t) = \chi(t)H(t)$. Si le support de χ est assez petit, $\int_a^b J(t)(h(t))\,dt = \int_a^b \chi(t) \parallel J(t) \parallel^2\, dt > 0$, contradiction. ∎

Exemple 1.7 *Plus courts chemins riemanniens.*

Ici, $L(q, \dot{q}) = \sqrt{g_q(\dot{q})}$. Ce problème variationnel étant invariant par reparamétrisation, on peut se contenter de chercher les extrémales paramétrées à vitesse constante 1. Fixons des coordonnées. Alors

$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{q}_i}(q, \dot{q}) = 2\sum_k \dot{q}_k g_{ki}(q).$$

Il vient

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t))_i = (g_{q(t)}(\dot q(t)))^{-1/2}\left(\sum_k \dot q_k(t) g_{ki}(q(t))\right).$$

Comme on a supposé que la courbe est paramétrée à vitesse constante 1, $g_{q(t)}(\dot q(t)) \equiv 1$, d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t),\dot q(t))_i\right) = \sum_k \ddot q_k(t) g_{ki}(q(t)) + \sum_k \dot q_k(t)(\sum_j \frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j}(q(t))\dot q_j(t)).$$

D'autre part,

$$\frac{\partial L^2}{\partial q}(q(t),\dot q(t))_i = \frac{\partial L^2}{\partial q_i}(q(t),\dot q(t)) = \sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}(q(t))\dot q_j(t)\dot q_k(t),$$

d'où

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot q(t))_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}(q(t))\dot q_j(t)\dot q_k(t).$$

Par conséquent, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\sum_{j,k}(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial q_i}(q(t)) - \frac{\partial g_{ki}}{\partial q_j}(q(t)))\dot q_j(t)\dot q_k(t) - \sum_k \ddot q_k(t) g_{ki}(q(t)) = 0,$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et $t \in [a,b]$.

Remarque 1.8 *On appelle* géodésiques *d'une variété riemannienne les extrémales du lagrangien $L^2(q,\dot q) = g_q(\dot q)$ qui est la carré de la norme. Alors les géodésiques coïncident avec les extrémales de L qui sont parcourues à vitesse constante.*

Il reste à vérifier que $L^2(q,\dot q) = g_q(\dot q)$ est constant le long d'une géodésique, i.e. d'une extrémale de L^2. Comme L^2 est homogène de degré 2 par rapport à $\dot q$,

$$2L^2(q,\dot q) = \frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q,\dot q)\dot q.$$

En dérivant par rapport à t, et en utilisant les équation d'Euler-Lagrange pour L^2, à savoir $\frac{\partial L^2}{\partial q}(q,\dot q) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q,\dot q))$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}2L^2(q,\dot q) &= \frac{d}{dt}(\frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q,\dot q))\dot q + \frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q,\dot q)\ddot q \\ &= \frac{\partial L^2}{\partial q}(q,\dot q)\dot q + \frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q,\dot q)\ddot q \\ &= \frac{d}{dt}L^2(q,\dot q),\end{aligned}$$

donc $\frac{d}{dt}L^2(q,\dot q) = 0$. ■

Exercice 5 *Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange du problème de la brachistochrone (exercice 4), et la résoudre : on trouve (Newton 1697) des cycloïdes ayant une tangente verticale au point de départ.*

Exercice 6 *On cherche quelle forme d'équilibre doit prendre une corde inélastique de densité constante, située dans un plan vertical, fixée à ses extrémités, soumise à la seule gravité. S'agit-il d'un problème variationnel lagrangien ? Ecrire les deux lagrangiens en jeu et leurs équations d'Euler-Lagrange. En admettant le théorème des extrema liés, résoudre le problème. A translation et dilatation près, on trouve la courbe représentative de la fonction cosinus hyperbolique (Bernoulli, 1691).*

1.5 Principe de moindre action de Hamilton

Cherchant à calquer la mécanique sur l'optique géométrique, Hamilton a observé que le mouvement d'un point matériel dans un champ de potentiel est solution d'un problème variationnel lagrangien.

Proposition 1.9 *Considérons un point matériel de masse m évoluant dans un champ de force dérivant d'un potentiel V. Les équations de la dynamique newtonnienne*

$$\frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)) = -\nabla_{q(t)}V$$

qui le gouvernent coïncident avec les équations d'Euler-Lagrange du lagrangien $L = T - V$ où $T(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$ est l'énergie cinétique et $V = V(q)$ est l'énergie potentielle.

Preuve. Par définition, $\dfrac{\partial T}{\partial q} = \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$. On note $\dot{q}^\flat$ la forme linéaire duale d'un vecteur $\dot{q}$, de sorte que $dV = (\nabla V)^\flat$. Alors $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}^\flat$. Il vient

$$\frac{\partial(T-V)}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))\right) = -dV - \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)^\flat),$$

donc les équations d'Euler-Lagrange sont équivalentes à $\nabla_{q(t)}V + \frac{d}{dt}(m\dot{q}(t)) = 0$. ∎

1.6 Problèmes variationnels lagrangiens sur les variétés

On peut parler de problèmes lagrangiens sur les variétés.

Soit M une variété différentiable. Un *lagrangien* L sur M est une fonction sur l'espace tangent TM. Le problème variationnel correspondant consiste à minimiser l'intégrale $\Phi = \int L(q(t),\dot{q}(t))\,dt$ parmi les courbes tracées sur M, d'extrémités fixées.

Exemple 1.10 *Soit $L(q,\dot{q})$ un lagrangien sur $\mathbf{R}^3$ et $M \subset \mathbf{R}^3$ une surface. Les équations d'Euler-Lagrange du problème variationnel associé à la restriction de L à TM s'écrivent comme suit : pour tout t, la forme linéaire*

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t),\dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t),\dot{q}(t))) \textit{ s'annulle sur } T_{q(t)}M.$$

En effet, si $q : [a,b] \to M$ est une courbe tracée sur M, toute application $h : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ tel que $h(t) \in T_{q(t)}M$ (on appelle cela un *champ de vecteurs le long de* q) est la dérivée première d'une famille de courbes tracées sur M. Une variante du lemme 1.6 donne alors que pour une extrémale du problème restreint, le champ de formes linéaires $J(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}))$ s'annule sur TM. Inversement, si pour tout t, $J(q(t))$ est nulle sur $T_{q(t)}M$, la différentielle de la fonctionnelle Φ restreinte aux courbes tracées sur M, d'extrémités fixées, est nulle. ∎

Exercice 7 *Montrer qu'une courbe tracée sur une surface de* $\mathbf{R}^3$ *est une géodésique si et seulement si son accélération est normale à la surface. En déduire que les méridiens d'une surface de révolution (resp. d'un tube) sont des géodésiques.*

Proposition 1.11 (Principe de d'Alembert). *Soit* V *un potentiel sur* $\mathbf{R}^3$ *et* $M \subset \mathbf{R}^3$ *une surface. Les équations de la dynamique pour un point matériel astreint à se déplacer sur* M *dérivent d'un problème variationnel sur* M*, c'est le problème associé à la restriction de* $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V$ *à* TM.

Preuve. Pour obtenir les équations du mouvement $t \mapsto q(t)$, on écrit le principe fondamental de la dynamique en ajoutant une force inconnue, normale à la surface M, la *réaction*. Autrement dit, l'équation s'écrit

$$m\ddot{q} + \nabla_{q(t)}V \text{ est normal à } T_{q(t)}M.$$

Or, si $L(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)$,

$$J(t) = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) = -(m\ddot{q}(t) + \nabla_{q(t)}V)^\flat.$$

Dire que $J(t)$ s'annulle sur $T_{q(t)}M$, c'est dire que $m\ddot{q} + \nabla_{q(t)}V$ est orthogonal à $T_{q(t)}M$. ∎

1.7 Mouvement du solide

Un solide, ce sont des points reliés par une contrainte : leurs distances mutuelles restent constantes. Autrement dit, le mouvement d'un solide dans un champ de forces, c'est le mouvement d'un point dans une sous-variété d'un espace produit. Le principe de d'Alembert indique que, lorsque le champ de forces dérive d'un potentiel, les équations du mouvement du solide résultent encore d'un problème variationnel.

Un solide, c'est aussi un ensemble S de l'espace, muni d'une densité de matière ρ, transporté par des déplacements $D(t)$. L'ensemble des déplacements forme une variété de dimension 6, plongée dans l'ensemble des matrices 4×4. En effet, un déplacement est une tranformation affine dont la partie linéaire est une rotation, i.e. une matrice 4×4 de la forme $D = \begin{pmatrix} R & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $v \in \mathbf{R}^3$, $R^\top R = I$ et $det(R) = 1$. On va écrire le problème variationnel dans cette seconde description.

Supposons d'abord le solide formé d'un nombre fini de points q_i de masses m_i. Son énergie cinétique vaut $T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2$, son énergie potentielle $U = \sum V(q_i)$. Le mouvement est gouverné par le lagrangien $T - U$.

Passons à la limite continue. L'énergie cinétique devient $T = \int_S \frac{1}{2} \dot{q}^2 \rho(q)\, dq$ et l'énergie potentielle $U = \int_S V(q)\, dq$. Chaque point q du solide au repos a pour position $q(t) = D(t)q$ dans le solide en mouvement. Par conséquent le mouvement est gouverné par le lagrangien

$$L(D, \dot{D}) = \int_S \frac{1}{2} \parallel \dot{D}(q) \parallel^2 \rho(q)\, dq - \int_S V(Dq)\, dq$$

restreint à la sous-variété des déplacements.

1.8 La toupie

Il s'agit d'étudier le mouvement d'un solide tournant autour d'un point fixe (sa pointe), soumis à la seule gravité.

Dans ce cas, on se limite aux déplacements fixant l'origine, i.e. aux rotations. C'est la sous-variété de dimension 3 de l'espace vectoriel des matrices 3×3 définie par les équations $R^\top R = I$ et $det(R) = 1$. Le potentiel gravitationnel terrestre, en première approximation, est uniforme : $V(q_i) = m_i g q_z$ où g est la constante de gravitation et $q = (q_x, q_y, q_z)$. L'énergie potentielle du solide devient $U = g \int_S q_z \rho(q)\, dq = mgG_z$ où $m = \int_S \rho(q)\, dq$ est la masse totale de S et G son centre de gravité. On obtient le lagrangien

$$L(R, \dot{R}) = \int_S \frac{1}{2} \parallel \dot{R}(q) \parallel^2 \rho(q)\, dq - mgR(G)_z.$$

La dérivée logarithmique $R^{-1}\dot{R}$ d'une famille de rotations est un endomorphisme antisymétrique. Il existe donc un unique vecteur Ω tel que $R^{-1}\dot{R}q = \Omega \wedge q$, c'est le vecteur *vitesse angulaire par rapport au solide* du mouvement. Sa direction est l'axe instantané de rotation du solide. En effet, au premier ordre, on peut assimiler le mouvement à une rotation.

Définition 1.12 *L'application $\Omega \mapsto A(\Omega) = \int_S \parallel \Omega \wedge q \parallel^2 \rho(q)\, dq$ est une forme quadratique appelée le* tenseur d'inertie *de S par rapport à l'origine.*

Le lagrangien de la toupie s'écrit donc

$$L(R, \dot{R}) = \frac{1}{2} A(R^{-1}\dot{R}) - mgR(G)_z.$$

Exercice 8 *Calculer le tenseur d'inertie d'un parallélépipède homogène par rapport à son centre de gravité.*

2 Intégrales premières

2.1 Exemples

Définition 2.1 *Une* intégrale première `(first integral)` *d'une équation différentielle ordinaire est une fonction qui est constante le long des solutions.*

Un système d'équations différentielles du premier ordre indépendantes du temps s'écrit $\dot{x}(x) = V(x(t))$ où V est un champ de vecteurs. Un fonction lisse f est une intégrale première si et seulement si la dérivée $Vf \equiv 0$.

Exemple 2.2 *Le problème de la brachistochrone (exercices 4 et 5) possède une intégrale première.*

En effet, il conduit à l'équation différentielle $\ddot{q} = -\frac{1}{2}\frac{1+\dot{q}^2}{q}$, où q est la hauteur dont est descendue la bille depuis son point de départ, et $\dot{q}$ la dérivée par rapport à l'abscisse x. Dans les coordonnées (p, q) où $p = \dot{q}$, il s'agit du système d'équations différentielles du premier ordre $\dot{p} = -\frac{1}{2}\frac{1+p^2}{q}$, $\dot{q} = p$. La fonction $f(p, q) = (1+p^2)q$ est constante le long des solutions, c'est une intégrale première. C'est cette observation qui permet de calculer explicitement toutes les solutions.

Exemple 2.3 *Pour le mouvement d'un point matériel de masse m dans un champ de forces dérivant d'un potentiel V,* l'énergie mécanique *$E = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + V(q)$ est une intégrale première.*

En effet, $\dot{E} = \dot{q} \cdot m\ddot{q} + \dot{q} \cdot \nabla_q V = 0$.

Exemple 2.4 *Pour les géodésiques sur une variété riemannienne, i.e. les extrémales de l'énergie $\int g_q(\dot{q})\,dt$, le carré de la vitesse $g_q(\dot{q})$ est une intégrale première.*

En effet, les géodésiques sont parcourues à vitesse constante, voir 1.7.

2.2 Symétries

On va voir que les symétries d'un lagrangien produisent des intégrales premières des équations d'Euler-Lagrange correspondantes. Dans ce paragraphe, les lagrangiens $L : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont indépendants du temps.

Définition 2.5 *Par* symétrie*, on entend ici un difféomorphisme ϕ de U tel que $L \circ d\phi = L$, où $d\phi = (\phi, \frac{\partial \phi}{\partial q}) : U \times \mathbf{R}^n \to U \times \mathbf{R}^n$ est la différentielle de ϕ. Une* symétrie infinitésimale *du lagrangien L est un champ de vecteurs V sur U tel que le groupe à un paramètre $s \mapsto \phi_s$ engendré par V soit constitué de symétries de L.*

Théorème 2 (E. Noether). *Soit $L : U \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ un lagrangien indépendant du temps. Soit W une symétrie infinitésimale de L. Alors la fonction f définie sur $U \times \mathbf{R}^n$ par*

$$f(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})(W(q))$$

est une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange associée à L.

Preuve. En dérivant par rapport à s, en $s = 0$, l'équation

$$L(\phi_s(q), \frac{\partial \phi_s}{\partial q}(q, \dot{q})) = L(q, \dot{q}),$$

on trouve la condition que satisfont les symétries infinitésimales du lagrangien L,

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q})(V(q)) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})(\frac{\partial W}{\partial q}(q, \dot{q})) = 0.$$

Soit $t \mapsto (q(t), \dot{q}(t))$ une solution des équations d'Euler-Lagrange. Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(q, \dot{q}) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\right)(W(q(t))) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})\frac{d}{dt} W(q(t)) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q})(W(q(t))) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \circ \frac{\partial W}{\partial q}(\dot{q}(t)) \\ &= 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 2.6 *Le théorème de Noether s'étend aux problèmes lagrangiens dans les variétés.*

Exemple 2.7 *Mouvement à force centrale.*

Il s'agit du mouvement d'un point matériel de masse m dans un champ de forces dérivant d'un potentiel $V = V(r)$ ne dépendant que la distance r à l'origine. D'après le principe de moindre action 1.9, il s'agit d'un problème variationnel, associé au lagrangien $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - V(r)$. Ce lagrangien est invariant par toutes les rotations dont l'axe passe par l'origine. Un groupe à un paramètre de rotations d'axe D est engendré par un champ de vecteur de la forme $W(q) = \Omega \wedge q$ où Ω est un vecteur directeur de D. D'après le théorème de Noether, la fonction

$$f_\Omega(q, \dot{q}) = m\dot{q} \cdot (\Omega \wedge q)$$

est une intégrale première du mouvement.

On peut réécrire

$$f_\Omega(q, \dot{q}) = -\Omega \cdot m(q \wedge \dot{q}).$$

On conclut que le vecteur

$$\mu = m(q \wedge \dot{q})$$

est constant au cours du mouvement. Ce vecteur s'appelle le *moment cinétique* du point matériel.

Exercice 9 *Montrer qu'un mouvement à force centrale se déroule dans un plan. Montrer que l'énergie mécanique s'exprime en fonction de r et $\dot{r}$ seulement. Montrer que cela ramène la résolution à des quadratures (i.e. au calcul de primitives).*

Exercice 10 *On appelle* métrique de révolution *sur* $\mathbf{R}^2$ *une métrique de la forme* $g_{(u,v)} = du^2 + r(u)^2\, dv^2$ *où* r *est une fonction positive. En appliquant le théorème de Noether et la conservation de la vitesse, trouver des intégrales premières de l'équation des géodésiques, et montrer que la résolution de l'équation se ramène à deux quadratures.*

3 Mouvement du solide autour d'un point fixe, sans forces extérieures

Suivant Euler et Poinsot, on résoud en détail l'exemple le plus simple de dynamique du solide, la toupie dont on néglige le poids.

3.1 Conservation du moment cinétique

L'espace de configuration est le groupe $SO(3)$ des rotations. D'après le paragraphe 1.8, le mouvement est gouverné par le lagrangien

$$L(R,\dot{R}) = \frac{1}{2}A(R^{-1}\dot{R}),$$

où A est le tenseur d'inertie du solide. Ce lagrangien est invariant par les translations à gauche de $SO(3)$. En effet, si $h \in SO(3)$, la translation à gauche $L_h = R \mapsto hR$ agit sur les vecteurs tangents par $TL_h(R,\dot{R}) = (hR, h\dot{R})$. Alors

$$L \circ TL_h(R,\dot{R}) = L(hR, h\dot{R}) = \frac{1}{2}A((hR)^{-1}(h\dot{R})) = \frac{1}{2}A(R^{-1}\dot{R}) = L(R,\dot{R}).$$

Par conséquent, le théorème de Noether fournit un vecteur d'intégrales premières, le *moment cinétique par rapport à l'origine dans le repère de l'espace* du solide. Le moment cinétique (voir 2.7) d'un point est $\mu_i = m_i q_i \wedge q_i'$. Celui du solide est

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \int_S q(t) \wedge \dot{q}(t)\, \rho(q) dq \\ &= \int_S R(t)q \wedge \dot{R}(t)q\, \rho(q) dq \\ &= R(t)M(t), \end{aligned}$$

où

$$M(t) = \int_S q \wedge R(t)^{-1}\dot{R}(t)q\, \rho(q) dq$$

est le *moment cinétique dans le repère du solide.*

Exercice 11 *Retrouver la conservation du moment cinétique par rapport à l'espace μ en appliquant directement le théorème de Noether au lagrangien du solide.*

Exercice 12 *On note $\mu(R,\dot R) = R\int_S q \wedge R^{-1}\dot R q\,\rho(q)dq$ le moment cinétique et $E = L(R,\dot R) = \frac{1}{2}A(R^{-1}\dot R)$ l'énergie cinétique d'un solide en mouvement autour de l'origine. Quelles sont les valeurs critiques de l'application $(\mu, E) : TSO(3) \to \mathbf{R}^4$?*

3.2 Equation d'Euler

Elle consiste à transformer les équations du mouvement, qui sont du second ordre en $t \mapsto R(t)$, en des équations du premier ordre en une quantité qui dépend algébriquement de $t \mapsto R(t)^{-1}\dot R(t)$. Cette quantité, c'est le moment cinétique dans le repère du solide M. Elle s'obtient à partir de $R^{-1}\dot R$ en identifiant cette matrice antisymétrique à un vecteur Ω, puis en appliquant l'endomorphisme symétrique (noté abusivement A) associé à la forme quadratique A. Inversement, étant donné $t \mapsto M(t)$, on reconstruit le vecteur $\Omega(t) = A^{-1}M(t)$, l'endomorphisme antisymétrique $a(t) : q \mapsto \Omega(t) \wedge q$, puis on résoud l'équation différentielle linéaire $\dot R = Ra(t)$ avec condition initiale $R(0) = I$ pour calculer le mouvement.

Proposition 3.1 (L. Euler). *En fonction du moment cinétique dans le repère du solide $t \mapsto M(t)$, les équations du mouvement du solide en l'absence de forces extérieures s'écrivent*

$$\dot M = M \wedge A^{-1}M.$$

Preuve. On sait que le moment cinétique dans le repère de l'espace $\mu = RM$ est constant. Par conséquent, $0 = \dot\mu = R\dot M + \dot R M$, donc

$$\dot M = -R^{-1}\dot R M = -\Omega \wedge M = -A^{-1}M \wedge M. \blacksquare$$

On voit sur l'équation que $\dot M \cdot M = \dot M \cdot A^{-1}M = 0$, donc $\parallel M \parallel$ et $M \cdot A^{-1}M$ sont constants (remarquer que $\frac{1}{2}M \cdot A^{-1}M = \frac{1}{2}A(\Omega) = E$ est l'énergie cinétique). Le mouvement de M se déroule donc sur des sphères, et à l'intérieur de chaque sphère Σ, sur les lignes de niveau de la restriction à Σ de l'énergie E. Les point critiques de E restreinte à une sphère sont des vecteurs propres de A^{-1} (les *axes principaux d'inertie* du solide). Il y a donc 3 types de trajectoires.

- Les trajectoires ponctuelles, aux points critiques ; elles correspondent à des mouvement de rotation stationnaire (Ω est constante) autour des axes principaux d'inertie.
- Les trajectoires situées sur les niveaux non critiques. Elles sont périodiques. Cela n'entraîne pas nécessairement que le mouvement est périodique.
- Les trajectoires non ponctuelles situées sur le niveau critique. Elles ne sont pas périodiques.

3.3 Résolution des équations

Soit $v \in \mathbf{R}^3$ un vecteur qui n'est pas vecteur propre de A. Alors $E(v)$ n'est pas une valeur critique de la restriction de E à la sphère de rayon $\| v \|^2$, et $\{M\,;\, \| M \|^2 = \| v \|^2,\ E(M) = E(v)\}$ est une réunion de courbes fermées simples. Autrement dit, une fois la ligne de niveau qui porte la trajectoire paramétrée, la résolution de l'équation d'Euler avec condition initiale v est ramenée à celle d'une équation différentielle autonome en une dimension, autrement dit, à une quadrature.

Supposant $t \mapsto M(t)$ calculé, soit $t \mapsto R_0(t)$ une famille de rotations telles que $R_0(t)M(t) = v$. Le mouvement cherché est une autre rotation $R(t)$ telle que $R(t)M(t) = v$ et $R(t)^{-1}\dot{R}(t) = A^{-1}M(t)$ pour tout t. Comme $R(t)R_0(t)^{-1}$ fixe v, il existe $\theta(t) \in \mathbf{R}$ tel que

$$R(t) = \exp(\theta(t)a_v)R_0(t).$$

L'équation différentielle $R(t)^{-1}\dot{R}(t) = a_{A^{-1}M(t)}$ se traduit par

$$\dot{\theta}(t)a_{M(t)} + R_0(t)^{-1}\dot{R}_0(t) = a_{A^{-1}M(t)}.$$

Une quadrature livre $\theta(t)$ et donc l'expression du mouvement $R(t)$.

3.4 Quasipériodicité

Le mouvement dans le deuxième cas (niveaux non critiques) n'est pas périodique, en général, mais il s'en approche. En effet, les solutions sont confinées dans des variétés compactes de dimension 2, les fibres de l'application $(\mu, E) : TSO(3) \to \mathbf{R}^4$.

Proposition 3.2 *Soit $(v, e) \in \mathbf{R}^4$ une valeur régulière de (μ, E). Il existe des fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sur $(\mu, E)^{-1}(v, e)$ à valeurs dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ telles que*
- *le long des solutions, $\dot{\phi}_1$ et $\dot{\phi}_2$ sont constants,*
- *la restriction de (ϕ_1, ϕ_2) à une fibre de (μ, E) est un difféomorphisme.*

Autrement dit, les fibres non singulières de l'application $(\mu, E) : TSO(3) \to \mathbf{R}^4$ sont des tores, sur lesquels le mouvement est constitué de translations.

Preuve. Soit $t \mapsto R(t)$ une solution de moment cinétique v et d'énergie cinétique e. Alors $M(t) = R(t)v$ est une solution de l'équation d'Euler qui est confinée dans une courbe fermée simple c, composante d'une ligne de niveau de la restriction de E à une sphère. Par conséquent, M est périodique. Soit T sa plus petite période. On définit une fonction $\phi_1 : c \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par $\phi_1(M(t)) = t/T$. La fibre $F = (\mu, E)^{-1}(v, e)$ est l'ensemble des rotations R telles qu'il existe un point $m \in c$ tel que $Rm = v$. On prolonge ϕ_1 en une fonction sur F en posant $\phi_1(R) = \phi_1(m)$.

On se donne à nouveau une famille de rotations $t \mapsto R_0(t)$ telle que $R_0(t)M(t) = v$. Elle n'est pas nécessairement périodique. Soit $\psi_T \in \mathbf{R}$ tel que

$$R_0(T) = \exp(\psi_T a_v)R_0(0).$$

On note $\Omega_0(t)$ le vecteur tel que $R_0(t)^{-1}\dot{R}_0(t) = a_{\Omega_0(t)}$. De même, $a_{\Omega(t)} = R(t)^{-1}\dot{R}(t)$. On remarque que, comme $R_0M = RM$, $(\Omega - \Omega_0) \wedge M \equiv 0$, donc il existe une fonction $t \mapsto \lambda(t)$ telle que

$$\Omega - \Omega_0 = \lambda M.$$

On cherche une fonction $t \mapsto \psi(t)$ telle que $R_1 = \exp(-\psi a_v)R_0$ soit périodique, et telle que si $R = \exp(\eta a_v)R_1$, alors $\dot{\eta}$ est constant. Or

$$\begin{aligned} \dot{\eta} a_M &= R^{-1}\dot{R} - R_1^{-1}\dot{R}_1 \\ &= a_\Omega - a_{\Omega_0} + \dot{\psi} a_M, \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{\eta} = \dot{\psi} + \lambda.$$

On pose

$$\psi(t) = \int_0^t -\lambda(s)\, ds + \frac{t}{T}\left(\int_0^T \lambda(s)\, ds \; + \psi_T\right).$$

Alors $\psi(T) = \psi_T$, donc R_1 est périodique, et $\dot{\eta}$ est constant.

On définit une fonction $\phi_2 : F \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ en posant

$$\phi_2(\exp(\theta a_v)R_1(t)) = \frac{\theta}{2\pi}.$$

Alors $(\phi_1, \phi_2) : F \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ est un difféomorphisme, $\dot{\phi}_1 = 1/T$ et $\dot{\phi}_2 = \dot{\eta}/2\pi$ est constant. ∎

4 Transformation de Legendre

4.1 Motivation

Manifestement, dans les équations d'Euler-Lagrange, la quantité $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t))$ joue un rôle particulier. Cela conduit à étudier l'application $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} : \mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^*$. On va voir qu'elle a une interprétation géométrique intéressante.

4.2 Définition

Définition 4.1 *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction convexe. Sa* transformée de Legendre `(Legendre transform)` *est la fonction convexe $g : (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}$ définie par*

$$g(p) = \sup_{\dot{q} \in \mathbf{R}^n} p(\dot{q}) - f(\dot{q}).$$

Exercice 13 *Vérifier que la transformation de Legendre est involutive, i.e. que si g est la transformée de Legendre de f, alors f est la transformée de Legendre de g.*

Définition 4.2 *Soit f une fonction lisse sur $\mathbf{R}^n$. On dit que f est* surlinéaire *si*

$$\lim_{\|\dot{q}\|\to+\infty} \frac{f(\dot{q})}{\| \dot{q} \|} = +\infty.$$

On dit que f est fortement convexe *si la forme quadratique $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{q}^2}$ est définie positive en tout point.*

Lemme 4.3 *Soit f une fonction lisse, surlinéaire et fortement convexe. Alors la borne inférieure qui définit $g(p)$ est atteinte en un unique point $\dot{q}_p$ caractérisé par*

$$p = d_{\dot{q}_p} f = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p).$$

En particulier, g est lisse, et sa différentielle est donnée par

$$d_p g = \frac{\partial g}{\partial p}(g) = \dot{q}_p.$$

Autrement dit, les applications

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} : \mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^* \quad \textit{et} \quad \frac{\partial g}{\partial p} : (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n$$

sont des difféomorphismes réciproques l'un de l'autre.

Preuve. La surlinéarité garantit que les sur-niveaux $\{\dot{q}\,;\, p(\dot{q}) - f(\dot{q}) \geq x\}$ sont compacts, donc la borne supérieure est atteinte. Par convexité, $\{\dot{q}\,;\, p(\dot{q}) - f(\dot{q}) = g(p)\}$ est un convexe. En chacun de ses points, on a $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}} = p$. Or le théorème des fonctions implicites s'applique à l'équation $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}) - p = 0$: les solutions $\dot{q}$ sont isolées et dépendent différentiablement du paramètre p. On conclut que la solution $\dot{q}_p$ est unique, et que $g(p) = f(\dot{q}_p)$ dépend différentiablement de p.

Fixons $p_0 \in (\mathbf{R}^n)^*$ et soit $\dot{q}_0 = \dot{q}_{p_0}$ le point où $\dot{q} \mapsto p_0(\dot{q}) - f(\dot{q})$ atteint son maximum $g(p_0)$. Pour tout $p \in (\mathbf{R}^n)^*$,

$$g(p) = \sup_{\dot{q}} p(\dot{q}) - f(\dot{q}) \geq p(\dot{q}_0) - f(\dot{q}_0) = p(\dot{q}_0) - p_0(\dot{q}_0) + g(p_0),$$

i.e.

$$p(\dot{q}_0) - g(p) \leq p_0(\dot{q}_0) - g(p_0).$$

Ceci prouve que p_0 est le point où $p \mapsto p(\dot{q}_0) - g(p)$ atteint son maximum, et que $\frac{\partial g}{\partial p}(p_0) = \dot{q}_0$. Les applications $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}$ et $\frac{\partial g}{\partial p}$ sont donc réciproques l'une de l'autre. ∎

Exemple 4.4 *La transformée de Legendre d'une forme quadratique définie positive f est une forme quadratique définie positive g, et on a $f(\dot{q}_p) = g(p)$.*

En effet, si f est une forme quadratique définie positive, de matrice $\frac{1}{2}G$, alors $\frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q})$ est la forme linéaire de matrice $\dot{q}^\top G$. Par conséquent l'équation $p = \dot{q}^\top G$ a pour solution $\dot{q}_p = G^{-1}p^\top$, et

$$\begin{aligned} g(p) &= p(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) \\ &= pG^{-1}p^\top - \frac{1}{2}pG^{-1}GG^{-1}p^\top \\ &= \frac{1}{2}pG^{-1}p^\top \\ &= f(\dot{q}_p). \end{aligned}$$

Remarque 4.5 *Le fait que $f(\dot{q}_p) = g(p)$ est vrai plus généralement pour les fonctions positivement homogènes de degré 2. En effet, comme $p = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p)$,*

$$\begin{aligned} g(p) &= p(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \dot{q}}(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) \\ &= 2f(\dot{q}_p) - f(\dot{q}_p) \\ &= f(\dot{q}_p). \end{aligned}$$

5 Equations de Hamilton

Il est courant de ramener un système d'équations différentielles du second ordre dans $\mathbf{R}^n$ à un système d'équations du premier ordre dans $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, en introduisant la variable supplémentaire $\dot{q}$. Dans le cas des équations d'Euler-Lagrange, il se trouve qu'en appliquant à une transformation de Legendre, les équations obtenues, dans $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$, prennent une forme particulièrement élégante.

5.1 Une reformulation des équations de la dynamique

Soit un point matériel q de masse m évoluant dans un champ de potentiel V. On appelle *impulsion* de q la quantité $p(t) = m\dot{q}(t)$. Le principe fondamental de la dynamique $m\ddot{q} = -\nabla V(q)$ peut aussi s'écrire comme un système de deux équations,

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{m}p, \\ \dot{p} &= -\nabla V(q). \end{cases}$$

Le second membre s'exprime en fonction de l'énergie mécanique $E = \frac{1}{2}m(\dot{q})^2 + V(q)$ ou, mieux, de la fonction $H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$, car $\frac{1}{m}p = \nabla_p H$ et $-\nabla V(q) = -\nabla_q H$. On peut éviter d'utiliser le gradient si on accepte de voir l'impulsion p comme un vecteur ligne, i.e. comme une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$. Autrement dit, on définit l'impulsion par $p = m\dot{q}^\top$, on voit

$$H(q,p) = \frac{1}{2m}p\,p^\top + V(q)$$

comme une fonction sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$, et alors les équations s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{1}{m}p^\top &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \dot{p} &= -dV(q) &= -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases}$$

5.2 Définition

On commence par introduire une classe d'équations différentielles remarquables.

Définition 5.1 *Soit* $H : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction lisse. Le système d'équations différentielles*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

s'appelle équations de Hamilton ***(Hamilton equations)*** *associées au* hamiltonien ***(Hamiltonian)*** H.

Exercice 14 *On suppose que la fonction* $H(q,p,t) = H(q)$ *ne dépend ni de* p *ni de* t*. Vérifier que, dans ce cas, les équations d'Hamilton s'intègrent explicitement.*

5.3 Equivalence entre Euler-Lagrange et Hamilton

Théorème 3 *Soit* L *un lagrangien lisse qui, comme fonction de* $\dot{q}$*, est surlinéaire et fortement convexe. Les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont équivalentes aux équations de Hamilton associées à la fonction*

$$H : (\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad H(q,p,t) = \sup_{\dot{q}} p(\dot{q}) - L(q,\dot{q},t),$$

transformée de Legendre de L *par rapport à la variable* $\dot{q}$*.*

A une solution $t \mapsto (q(t), p(t))$ des équations d'Hamilton correspond la solution $t \mapsto q(t)$ des équations d'Euler-Lagrange. Inversement, toute solution $t \mapsto q(t)$ des équations d'Euler-Lagrange se relève par $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t), t)$ en une solution des équations d'Hamilton.

Preuve. Notons $(q,p,t) \mapsto \dot{q}_p$ le point tel que

$$H(q,p,t) = p(\dot{q}_p) - L(q,\dot{q}_p,t).$$

On calcule

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) &= p(\frac{\partial \dot{q}_p}{\partial q}) - \frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q}_p,t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}_p,t)(\frac{\partial \dot{q}_p}{\partial q}) \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q}(q,\dot{q}_p,t), \end{aligned}$$

car, d'après le lemme 4.3, $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q,\dot{q}_p,t)$.

Soit $t \mapsto q(t)$ une courbe dans $\mathbf{R}^n$. Posons $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t), \dot q(t), t)$. D'après le lemme 4.3, à q et t fixé, l'application $\frac{\partial L}{\partial \dot q}$ est un difféomorphisme réciproque de $\frac{\partial H}{\partial p}$, donc $\dot q(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t)$. Si $t \mapsto q(t)$ est une solution des équations d'Euler-Lagrange, alors $\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot q(t), t) - \dot p(t) = 0$, donc $\dot p(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t)$. Ceci prouve que $t \mapsto (q(t), p(t))$ est solution des équations de Hamilton.

Réciproquement, supposons que $t \mapsto (q(t), p(t))$ est une solution des équations de Hamilton. D'après le lemme 4.3, l'équation $\dot q(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(q(t), p(t), t)$ montre que $\dot q(t) = \dot q_{p(t)}$, d'où $p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t), \dot q(t), t)$ et $\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) = -\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot q(t), t)$. Avec la deuxième équation de Hamilton, $\dot p(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t)$, il vient

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q(t), \dot q(t), t) = \frac{d}{dt}p(t) = \dot p(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(q(t), p(t), t) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot q(t), t),$$

ce sont les équations d'Euler-Lagrange. ∎

Exemple 5.2 *Les équations fondamentales de la dynamique pour un point matériel de masse m évoluant dans un champ de potentiel V sont équivalentes aux équations de Hamilton de hamiltonien*

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p\, p^\top + V(q).$$

En effet, ajouter une constante (ici, $-V(q)$) au potentiel la retranche à la transformée de Legendre, et le calcul de la transformée de Legendre d'une forme quadratique a été fait en 4.4.

5.4 Cas des lagrangiens homogènes de degré 1

Si le lagrangien est homogène de degré un (c'est le cas notamment pour la longueur riemannienne), le théorème 3 ne s'applique pas. Ce n'est pas étonnant. La famille des extrémales est alors invariante par reparamétrisation, elle est de dimension infinie, trop riche pour correspondre aux solutions des équations de Hamilton. En revanche les extrémales paramétrées à vitesse constante sont d'origine hamiltonnienne.

Proposition 5.3 *Soit L un lagrangien qui, comme fonction de $\dot q$, est homogène de degré 1, et dont les hypersurfaces de niveau sont lisses et fortement convexes. Alors les extrémales de L qui sont paramétrées à vitesse constante (i.e. $t \mapsto L(q, \dot q, t)$ est constante) sont des extrémales du lagrangien L^2, qui est surlinéaire et fortement convexe.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^2}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^2}{\partial \dot q}(q, \dot q, t)\right) &= 2L\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(2L\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t)\right) \\ &= 2L(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot q}(q, \dot q, t)))\end{aligned}$$

si $L(q, \dot q, t)$ est constant. ∎

Exercice 15 *Soit g une métrique riemannienne définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^n$. Ecrire le hamiltonien défini sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ qui décrit les géodésiques paramétrées à vitesse constante.*

6 Origine symplectique des équations de Hamilton

6.1 La 1-forme canonique

On notera typiquement p une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$, vue comme un vecteur ligne.

Définition 6.1 *Sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$, on note $\alpha = pdq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ la 1-forme différentielle définie par*

$$\alpha_{(q,p)}(\dot{q}, \dot{p}) = p\dot{q}.$$

Lemme 6.2 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, soit ϕ un difféomorphisme de U, soit*

$$\Phi = T^*\phi : U \times (\mathbf{R}^n)^* \to U \times (\mathbf{R}^n)^*, \quad (q,p) \mapsto (\phi(q), p(\frac{\partial \phi}{\partial q})^{-1})$$

le difféomorphisme induit. Alors $\Phi^*\alpha = \alpha$.

Preuve.

$$\begin{aligned}(\Phi^*\alpha)_{(q,p)}(\dot{q}, \dot{p}) &= \alpha_{(\phi(q), p(\frac{\partial \phi}{\partial q})^{-1})}(d_{(q,p)}\Phi(\dot{q}, \dot{p})) \\ &= p(\frac{\partial \phi}{\partial q})^{-1}\frac{\partial \phi}{\partial q}\dot{q} \\ &= p\dot{q} \\ &= \alpha_{(q,p)}(\dot{q}, \dot{p}). \blacksquare\end{aligned}$$

6.2 La 2-forme canonique

Définition 6.3 *Sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$, on note*

$$\omega = d\alpha = dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

Autrement dit,

$$\omega_{(q,p)}((\dot{q}, \dot{p}), (\dot{q}', \dot{p}')) = \dot{p}\dot{q}' - \dot{p}'\dot{q}.$$

Lemme 6.4 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, soit ϕ un difféomorphisme de U, soit*

$$\Phi = T^*\phi : U \times (\mathbf{R}^n)^* \to U \times (\mathbf{R}^n)^*, \quad (q,p) \mapsto (\phi(q), p(\frac{\partial \phi}{\partial q})^{-1})$$

le difféomorphisme induit. Alors $\Phi^*\omega = \omega$.

Preuve.

$$\Phi^*\omega = \Phi^* d\alpha = d\Phi^*\alpha = d\alpha = \omega. \blacksquare$$

Lemme 6.5 *La forme Ω est non dégénérée, i.e. pour tout vecteur $(\dot{q}, \dot{p})$ non nul, il existe $(\dot{q}', \dot{p}')$ tel que $\omega((\dot{q}, \dot{p}), (\dot{q}', \dot{p}')) \neq 0$.*

Preuve. On pose $\dot{p}' = -\dot{q}^\top$ et $\dot{q}' = \dot{p}^\top$. Il vient

$$\begin{aligned} \omega_{(q,p)}((\dot{q}, \dot{p}), (\dot{q}', \dot{p}')) &= \dot{p}\dot{q}' - \dot{p}'\dot{q} \\ &= \| \dot{p} \|^2 + \| \dot{q} \|^2 > 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Définition 6.6 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soit f une fonction lisse sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$. Il existe un unique champ de vecteurs ξ_f tel que $\iota_{\xi_f}\omega = -df$, i.e.*

$$\omega(\xi_f, \cdot) = -df.$$

On l'appelle le champ de vecteurs hamiltonien *attaché à f, ou bien le* gradient symplectique *de f.*

Proposition 6.7 *Les équations de Hamilton définissent les lignes intégrales du gradient symplectique ξ_H du hamiltonien H.*

Preuve. Les composantes de ξ_H sont précisément $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ et $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$. $\blacksquare$

6.3 Transformations canoniques

On vient de voir que les équations de Hamilton sont produites à partir de la 2-forme ω et du hamiltonien H. Par conséquent, tout difféomorphisme Φ de $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ qui préserve ω envoie les solutions des équations de Hamilton relatives à H sur les solutions des équations de Hamilton relatives au hamiltonien $H \circ \Phi$.

Définition 6.8 *On appelle* transformation canonique *ou* difféomorphisme symplectique *tout difféomorphisme de $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ qui préserve la 2-forme différentielle ω.*

Exemple 6.9 *D'après le lemme 6.4, tout difféomorphisme ϕ de U se relève en une transformation canonique.*

Exercice 16 *Soit $\phi : (q, p) \mapsto (Aq + Bp^\top, q^\top C + pD)$ une application linéaire $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. A quelle conditions sur les matrices $n \times n$ A, B, C et D ϕ est-elle une transformation canonique ?*

Lemme 6.10 *Soit f une fonction sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$. Soit $s \mapsto \Phi_s$ le groupe à un paramètre (local) de difféomorphismes de $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ engendré par le gradient symplectique ξ_f. Alors, pour tout s, ϕ_s est une transformation canonique.*

Réciproquement, si $s \mapsto \phi_s$ est une groupe à un paramètre de transformations canoniques, et si U est simplement connexe, alors le champ de vecteurs qui engendre ϕ_s est hamiltonien, i.e. c'est le gradient symplectique d'une fonction.

Preuve. D'après la formule de Cartan (proposition 9.11),

$$\mathcal{L}_{\xi_f}\omega = d\iota_{\xi_f}\omega = d(-df) = 0.$$

D'après la proposition 9.3, cela entraîne que $\phi_s^*\omega = \omega$ pour tout s.

Réciproquement, si le champ de vecteurs V engendre des transformations canoniques, la 1-forme différentielle $-\iota_V\omega$ est fermée. Si U est simplement connexe, elle est exacte, $-\iota_V\omega = df$, et V est hamiltonien. ∎

6.4 Crochet de Poisson

Définition 6.11 *Soient f et g des fonctions lisses sur $U \times \mathbf{R}^n$. Il existe une fonction lisse notée $\{f, g\}$ telle que*

$$\xi_{\{f,g\}} = [\xi_f, \xi_g].$$

On l'appelle le crochet de Poisson ***(Poisson bracket)*** *de f et de g. Il est donné par les formules*

$$\{f, g\} = (\xi_f)g = -(\xi_g)f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Preuve. Soit $s \mapsto \phi_s$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes engendré par ξ_f. Comme ϕ_s préserve ω, l'image par ϕ_s du gradient symplectique ξ_g est $\xi_{\phi_s^* g}$. En dérivant par rapport à s en $s = 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}
[\xi_f, \xi_g] &= \mathcal{L}_{\xi_f}\xi_g \\
&= \frac{d}{ds}((\phi_s)_*\xi_g)_{|s=0} \\
&= \frac{d}{ds}(\xi_{\phi_s^* g})_{|s=0} \\
&= \xi_{\mathcal{L}_{\xi_f} g} \\
&= \xi_{(\xi_f)g}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 6.12 *Le crochet de Poisson possède les propriétés suivantes.*

- Antisymétrie. $\{g, f\} = -\{f, g\}$.
- Dérivation. $\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$.
- Identité de Jacobi. $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

Preuve. Ces propriétés résultent de propriétés analogues du crochet de Lie des champs de vecteurs. ∎

Remarque 6.13 *Un espace vectoriel muni d'une multiplication associative et d'un crochet satisfaisant aux trois propriétés ci-dessus s'appelle une* algèbre de Poisson.

Exercice 17 *Soient $f(q, p) = aq + pb$, $g(q, p) = cq + pd$ deux fonctions linéaires sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. Calculer leur crochet de Poisson.*

6.5 Intégrales premières et hamiltoniens

Proposition 6.14 *Soient f et H des fonctions sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$. Alors f est une intégrale première des équations de Hamilton relatives à H si seulement si $\{H, f\} = 0$.*

Corollaire 6.15 *Les équations d'Hamilton possèdent toujours au moins une intégrale première, à savoir le hamiltonien H lui-même.*

Corollaire 6.16 *Les équations d'Euler-Lagrange associées à un lagrangien surlinéaire et fortement convexe possèdent au moins une intégrale première.*

Preuve. La transformation de Lagrange fournit un difféomorphisme $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} : U \times \mathbf{R}^n \to U \times (\mathbf{R}^n)^*$ qui transporte les solutions des équations d'Euler-Lagrange sur celles des équations de Hamilton relatives à un certain hamiltonien H. Alors $H \circ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ est une intégrale première des équations d'Euler-Lagrange. ∎

Remarque 6.17 *Lorsque le lagrangien est quadratique, il est lui-même intégrale première des équations d'Euler-Lagrange.*

Cela résulte de la remarque 4.5.

Exercice 18 *Soit H un hamiltonien sur $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. Soient f et g deux intégrales premières de H. Montrer que $\{f, g\}$ est encore une intégrale première. Dans le cas du mouvement d'un solide dans l'espace soumis à aucune force extérieure, montrer qu'il existe 6 intégrales premières (la vitesse du centre de gravité et le moment cinétique), et calculer leurs crochets de Poisson deux à deux.*

6.6 Symétries hamiltoniennes

On rappelle qu'un champ de vecteurs sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ est dit *hamiltonien* si c'est un gradient symplectique.

Exemple 6.18 *Soit V un champ de vecteurs sur U. Alors V se relève en un champ de vecteurs hamiltonien W sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$, le gradient symplectique de la fonction linéaire dans les fibres $f_V(q, p) = p(V(q))$. Le flot de W est formé des difféomorphismes Φ_s relevant le flot ϕ_s de V.*

Voici une version hamiltonienne du théorème de Noether.

Théorème 4 *Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Soit H un hamiltonien défini sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$. Soit f une fonction sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$, soit W le champ de vecteurs hamiltonien sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$ correspondant. Si W est une symétrie infinitésimale de H, i.e. $\mathcal{L}_W H = 0$, alors f est une intégrale première des équations de Hamilton associées à H.*

Preuve. Le crochet de Poisson

$$\{f, H\} = \mathcal{L}_{\xi_f} H = \mathcal{L}_W H = 0,$$

donc f est une intégrale première de H. ▪

Remarque 6.19 *Cet énoncé a une portée plus générale que le théorème 2, puisqu'on admet comme symétrie infinitésimale tout champ hamiltonien et non seulement ceux qui relèvent des champs de vecteurs sur U. Toutefois, il n'implique le théorème 2 que lorsque le lagrangien est suffisamment régulier.*

Exercice 19 *Déduire le théorème 2 de Noether de sa version hamiltonienne, le théorème 4, dans le cas où le lagrangien est surlinéaire et fortement convexe.*

6.7 Equations de Hamilton sur les variétés

Si on remplace $U \subset \mathbf{R}^n$ par une variété M, ce qui remplace $U \times (\mathbf{R}^n)^*$, c'est le fibré cotangent T^*M. Il possède une 1-forme différentielle tautologique α, cela résulte, par exemple, du lemme 6.2, et sa différentielle $\omega = d\alpha$ est non dégénérée. Etant donné un hamiltonien $H : T^*M \to \mathbf{R}$, on peut donc parler de gradient symplectique et formuler les équations de Hamilton, dont les solutions sont les lignes intégrales du gradient symplectique de H.

Exercice 20 *On utilise le difféomorphisme $SO(3) \times (\mathbf{R}^3)^* \to T^*SO(3)$ donné par les translations à gauche. Ecrire la 1-forme et la 2-forme canoniques, ainsi que le hamiltonien du solide tournant autour de l'origine, dans un champ de potentiel V.*

Théorème 5 (Liouville). *Les équations de Hamilton définissent sur T^*M un groupe à un paramètre $s \mapsto \phi_s$ de difféomorphismes qui conserve le volume ω^n.*

Preuve. D'après la formule de Cartan 9.11,

$$\mathcal{L}_{\xi_H}\omega = d\iota_{\xi_H}\omega + \iota_{\xi_H} d\omega = d(-dH) = 0.$$

Par conséquent, le groupe à un paramètre ϕ_s préserve la forme ω, et aussi sa puissance extérieure n-ème.

En coordonnées, on calcule

$$\begin{aligned} \omega^n &= (dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n)^n \\ &= n!\, dp_1 \wedge dq_1 \wedge \cdots \wedge dp_n \wedge dq_n, \end{aligned}$$

qui ne s'annule jamais, c'est bien un élément de volume. ▪

Corollaire 6.20 (Principe de récurrence de Poincaré). *Soit M une variété compacte. Soit $H : T^*M \to \mathbf{R}$ un hamiltonien* propre, *i.e. tel que les ensembles de sous-niveau $\{H \le c\}$ soient compacts. Dans tout ouvert U de T^*M, il existe $(q, p) \in U$ tel que, pour des s arbitrairement grands, $\phi_s(q, p) \in U$.*

Preuve. On peut supposer U contenu dans un $N = \{H \leq c\}$. Fixons $s_0 > 0$. Les ensembles $\phi_{ks_0}(U)$, $k \in \mathbf{N}$, ne peuvent pas être tous disjoints, car ils ont même volume, ils sont contenus dans N et $vol(N)$ est fini. Par conséquent, il existe $k < \ell$ tels que $\phi_{ks_0}(U) \cap \phi_{\ell s_0}(U) \neq \emptyset$. Alors $U \cap \phi_{(\ell-k)s_0}(U) \neq \emptyset$. En appliquant ce résultat à des ouverts contenus dans U, on conclut que pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$U_m = \{(q,p) \in U \,;\, \exists s > m \text{ tel que } \phi_s(q,p) \in U\}$$

est dense dans U. Comme les U_m sont ouverts, d'après le théorème de Baire, leur intersection est dense dans U. Autrement dit, il existe un point (q,p) de U qui revient une infinité de fois dans U. ∎

Exercice 21 *Soit $H : T^*M \to \mathbf{R}$ un hamiltonien qui, comme fonction de p seul, est quadratique et défini positif. Soit $N_c = \{H = c\}$ une hypersurface de niveau de H, avec $c \neq 0$. Vérifier que la $2n-1$-forme différentielle $\alpha \wedge \omega^{n-1}$, restreinte à N_c, ne s'annule jamais, et qu'elle est invariante par le flot du gradient symplectique ξ_H.*

6.8 Structure symplectique

Plus généralement, pour définir les équations de Hamilton, le crochet de Poisson, etc... sur une variété quelconque (et non seulement le fibré cotangent d'une variété), il suffit de se donner une *forme symplectique*.

Définition 6.21 *Une* structure symplectique *(symplectic structure) sur une variété M est la donnée d'une 2-forme différentielle ω sur M telle que*
- *ω est fermée, i.e. $d\omega = 0$;*
- *ω est non dégénérée, i.e. pour tout point $q \in M$ et tout vecteur non nul $\dot{q} \in T_qM$, il existe un vecteur $\dot{q}' \in T_qM$ tel que $\omega_q(\dot{q}, \dot{q}') \neq 0$.*

Noter que l'existence d'une 2-forme non dégénérée entraîne que la dimension de M est paire, $dim(M) = 2n$. Alors la $2n$-forme

$$\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$$

se s'annule pas. Elle détermine une orientation de M. Si M est compacte,

$$\int_M \omega^n \neq 0.$$

Par conséquent, ω n'est pas exacte. En effet, si $\omega = d\beta$, alors

$$\omega^n = d(\beta \wedge \omega^{n-1}),$$

d'où $\int_M \omega^n = 0$, contradiction. Par conséquent, certaines variétés n'admettent pas de structure symplectique : les variétés de dimension impaire, les variétés non orientables, comme le ruban de Möbius, les variétés compactes dont le second groupe de cohomologie de de Rham est nul, comme les sphères S^{2n}, $n > 1$.

Définition 6.22 *Soit (M, ω) une variété symplectique. Soit $H : M \to \mathbf{R}$ une fonction lisse. Les* équations de Hamilton *correspondantes caractérisent les lignes intégrales du* gradient symplectique *de H, i.e. du champ de vecteurs ξ_H tel que $\iota_{\xi_H} = -dH$.*

Le théorème de Liouville se généralise immédiatement : les équations de Hamilton définissent un groupe à un paramètre $s \mapsto \phi_s$ de difféomorphismes de M qui conserve le volume ω^n. Le principe de récurrence de Poincaré garantit alors que si M est compacte, pour tout ouvert U de M, il existe $q \in U$ tel que $\phi_s(q) \in U$ pour des s arbitrairement grands.

7 Méthode d'Hamilton-Jacobi

Etant donné un hamiltonien H, il s'agit de construire une transformation canonique ϕ de l'espace des phases telle que $H \circ \phi$ ait une forme plus simple que H, de sorte que le changement de variables ϕ permette d'avancer vers la résolution des équations.

7.1 Fonction génératrice

Convenons de noter $\alpha = pdq = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$ la 1-forme différentielle tautologique sur le fibré cotangent d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Soit $\phi : U \times (R^n)^* \to U' \times (R^n)^*$, $(q,p) \mapsto \phi(q,p) = (Q(q,p), P(q,p))$ une transformation canonique. Alors la forme

$$\alpha - \phi^*\alpha = pdq - PdQ$$

est fermée. Si U est simplement connexe, il existe donc une fonction S sur $U \times (R^n)^*$ telle que

$$\alpha - \phi^*\alpha = dS.$$

Supposons que l'application $(q,p) \mapsto (q, Q(q,p))$ est un difféomorphisme de $U \times (R^n)^*$ sur $U \times U'$. On peut alors voir S comme une fonction sur $U \times U'$, et l'équation $dS = pdq - PdQ$ s'interprète comme

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = -P_i.$$

Inversement, étant donnée une fonction S sur $U \times U'$, on va reconstruire le difféomorphisme ϕ. Pour cela, il faut supposer que pour tout $q \in U$, le système d'équations

$$\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q) = p$$

possède une unique solution $Q = Q(q,p)$. Une condition nécessaire, localement suffisante, est que la différentielle seconde $\dfrac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q}$ soit une forme bilinéaire non dégénérée. Dans ce cas, on peut poser $P(q,p) = -\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q(q,p)) \in (\mathbf{R}^n)^*$. L'application $\phi = (Q,P) : U \times (R^n)^* \to U' \times (R^n)^*$ satisfait

$$\phi^*\alpha = PdQ = pdq - dS = \alpha - dS,$$

où on a noté abusivement S la fonction sur $U \times (R^n)^*$ définie par $S(q,p) = S(q, Q(q,p))$. Il vient $\phi^*\omega = \omega$, donc ϕ est un difféomorphisme local, car ω est non dégénérée. Si de plus ϕ est bijective, alors ϕ est une transformation canonique.

Définition 7.1 *On appelle S la* fonction génératrice *(`generating function`) de ϕ.*

Moralité. Au moins localement, et sous des conditions de non dégénerescence, toute transformation canonique possède une fonction génératrice. Inversement, étant donnée une fonction S dépendant de la position q (mais pas du moment p), ainsi que de n paramètres supplémentaires Q_i, au moins localement et sous des hypothèses de non dégénérescence, on peut construire une transformation canonique à partir de S.

Remarque 7.2 *La condition de non dégénénérescence n'est pas satisfaite par les transformations canoniques induites par les difféomorphismes de U sur U'. La méthode des fonctions génératrices fournit donc des changements de coordonnées d'une nature différente.*

Exercice 22 *Soit $\phi : (q,p) \mapsto (Aq + Bp^\top, q^\top C + pD)$ une application linéaire $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^*$. On suppose que ϕ est une transformation canonique. Montrer que si B est inversible, alors ϕ possède une fonction génératrice.*

7.2 Equation d'Hamilton-Jacobi

On se donne un hamiltonien H sur $U \times (\mathbf{R}^n)^*$. On cherche une transformation canonique $\phi : U \times (\mathbf{R}^n)^* \to U' \times (\mathbf{R}^n)^*$, $(q,p) \mapsto (Q,P)$ telle que la fonction $H \circ \phi^{-1}$ sur $U' \times (\mathbf{R}^n)^*$ ne dépende que de la position Q mais pas du moment P. Si ϕ est engendré par la fonction génératrice $S = S(q,Q)$, alors $p = \frac{\partial S}{\partial q}(q,Q)$. On veut donc que $H \circ \phi^{-1}(Q,P) = H(q, \frac{\partial S}{\partial q})$ ne dépende que de Q. Autrement dit, pour chaque valeur des paramètres Q_i, S, vue comme fonction de la position q, doit satisfaire une équation aux dérivées partielles de la forme

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}) = \mathrm{const.}(Q).$$

Définition 7.3 *Soit M une variété, soit $H : T^*M \to \mathbf{R}$ un hamiltonien. Soit $S : M \to \mathbf{R}$ une fonction sur M. On dit que S est solution de l'*équation d'Hamilton-Jacobi *si $q \mapsto H(q, \frac{\partial S}{\partial q})$ est constante.*

Exemple 7.4 *Soit M une variété riemannienne. On utilise la métrique riemannienne (multipliée par $\frac{1}{2}$) comme lagrangien. Soit $H : T^*M \to \mathbf{R}$ le hamiltonien correspondant. Alors la fonction distance à un point q_0,*

$$r(q) = \inf\{\mathrm{long}(c)\,;\, c \text{ relie } q_0 \text{ à } q\}$$

est une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi dans un voisinage de q_0.

En effet, on verra au chapitre 3 que r est lisse au voisinage de q_0 (sauf en q_0), et que dans ce voisinage, $r(q)$ est la longueur de l'unique géodésique reliant q_0 à q. Par unicité, le long de la géodésique $t \mapsto q(t)$ telle que $q(0) = q_0$ et $q(r(q)) = q$, on a $r(q(t)) = t$, donc $|\nabla r| \geq 1$. Inversement, l'inégalité triangulaire

$$|r(q) - r(q')| \leq d(q, q')$$

entraîne que $|\nabla r| \leq 1$. Par conséquent $|\nabla r| \equiv 1$. Comme le hamiltonien H est (à un facteur $\frac{1}{2}$ près) le carré de la norme des covecteurs (exemple 4.4), et $|dr| = |\nabla r| = 1$, r satisfait l'équation de Hamilton-Jacobi $H(q, \frac{\partial r}{\partial q}) = \frac{1}{2}$.

7.3 Front d'onde

Plus généralement, étant donnée une solution S de l'équation d'Hamilton-Jacobi, les ensembles de niveau $\{S = c\}$ représentent des fronts d'ondes. Le terme vient de l'optique. On considère une source lumineuse N, ponctuelle ou non, émettant une onde. On s'intéresse à la phase de l'onde au temps t, au point q. Pour chaque t, c'est une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, et, en un sens, la plus générale.

7.4 Systèmes complètement intégrables

La plupart des équations qu'on sait intégrer analytiquement de bout en bout possèdent une propriété très forte : les intégrales premières que l'on construit ont des crochets de Poisson mutuels qui sont tous nuls (noter que ce n'est pas le cas pour les composantes du moment cinétique dans le cas de la toupie). On dit que ces intégrales premières sont *en involution*. Il existe dans ce cas un théorème de structure qui décrit entièrement le système. En particulier, les trajectoires bornées sont *quasipériodiques* : ce sont les orbites d'un champ de vecteur constant sur un tore.

Définition 7.5 *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Le hamiltonien $H : M \to \mathbf{R}$ est dit* complètement intégrable *s'il existe n fonctions Q_i telles que*
- *les crochets de Poisson $\{Q_i, Q_j\}$ et $\{H, Q_i\}$ sont nuls ;*
- *les formes dQ_i sont linéairement indépendantes.*

Théorème 6 (Liouville). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$. Soit $H : M \to \mathbf{R}$ un hamiltonien complètement intégrable. Soit $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$:*

$M \to \mathbf{R}^n$ le vecteur des intégrales premières en involution. Soit $v \in \mathbf{R}^n$ tel que $M_v = Q^{-1}(v)$ soit compacte et connexe. Alors il existe un difféomorphisme $\phi : M_v \to \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ qui envoie les gradients symplectiques des fonctions Q_i et H sur des champs de vecteurs constants.

Preuve. Par hypothèse, la différentielle de Q est surjective, donc M_v est une sous-variété de M de dimension n. Soit $s \mapsto \phi^i_s$ le groupe à un paramètre (local) de difféomorphismes de M engendré par le gradient symplectique de Q_i. Comme $0 = \{Q_j, Q_i\} = dQ_j(\xi_{Q_i})$, ce groupe préserve chaque fonction Q_j et donc aussi la sous-variété M_v. Comme celle-ci est compacte, la restriction à M_v de $s \mapsto \phi^i_s$ est définie globalement. Fixons un point $q_0 \in M_v$. Comme les crochets $[\xi_{Q_i}, \xi_{Q_j}] = \{Q_j, Q_i\}$ sont nuls, les flots commutent (corollaire 9.7). L'application

$$\psi : \mathbf{R}^n \to M_v, \quad (t_1, \ldots, t_n) \mapsto \phi^1_{t_1} \circ \cdots \circ \phi^n_{t_n}(q_0)$$

envoie chaque champ de vecteurs de coordonnées $\frac{\partial}{\partial t_i}$ sur ξ_{Q_i}. Comme ceux-ci sont linéairement indépendants, ψ est un difféomorphisme local. Comme ψ est une orbite d'une action de groupe, l'image réciproque $G = \psi^{-1}(q_0)$ est un sous-groupe de $\mathbf{R}^n$, et ψ induit un difféomorphisme de l'espace quotient $\mathbf{R}^n/G$ sur M_v. Comme G et discret et $\mathbf{R}^n/G$ est compact, on vérifie que G est le sous-groupe engendré par n vecteurs linéairement indépendants, i.e., c'est l'image de $\mathbf{Z}^n$ par une bijection linéaire L. On conclut que $\psi \circ L$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ sur M_v, qui envoie des champs de vecteurs constants sur les ξ_{Q_i}. ∎

Les systèmes intégrables ont une autre vertu : on peut les quantifier, i.e. remonter du système classique au système quantique sous-jacent. C'est pourquoi les systèmes intégrables (en dimension finie ou infinie) jouissent d'une grande faveur en physique mathématique.

7.5 Méthode d'Hamilton-Jacobi

Théorème 7 (Hamilton-Jacobi). *Soient U et U' des ouverts de $\mathbf{R}^n$. Soit $H : U \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}$. Un hamiltonien. Soit $S : U \times U' \to \mathbf{R}$ une fonction telle que*

- *à Q fixé, S est une solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi ;*
- *pour chaque $(q, p) \in U \times (\mathbf{R}^n)^*$, l'équation $\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q) = p$ possède une unique solution $Q(q, p) \in U'$;*
- *pour chaque $(Q, P) \in U' \times (\mathbf{R}^n)^*$, l'équation $-\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q) = P$ possède au plus une solution $q \in U$.*

Alors H est complètement intégrable.

Preuve. Comme on l'a vu au paragraphe 7.1, l'application $\phi : U \times (\mathbf{R}^n)^* \to U' \times (\mathbf{R}^n)^*$ définie par

$$\phi(q, p) = (Q(q, p), P(q, p) = -\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q(q, p)))$$

est un difféomorphisme local. C'est une injection. En effet, étant donné $(Q, P) \in U' \times (\mathbf{R}^n)^*$, il existe un unique $q \in U$ tel que $-\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q) = P$. Alors $\phi(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q, Q)) = (Q, P)$. Une autre solution (q', p') satisfait $q = q'$ par unicité de la solution de $-\frac{\partial S}{\partial Q}(q, Q) = P$. Par définition de $Q(q, p) = Q(q, p')$,

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}(q, Q(q, p)) = \frac{\partial S}{\partial q}(q, Q(q, p')) = p'.$$

L'équation d'Hamilton-Jacobi garantit que dans les coordonnées (Q, P), H ne dépend que de Q, donc les crochets de Poisson $\{H, Q_i\}$, comme les $\{Q_i, Q_j\}$, sont nuls relativement à la structure symplectique $dP \wedge dQ$. Pour cette structure, les gradients symplectiques des Q_i sont les vecteurs de coordonnées $\frac{\partial}{\partial P_i}$, ils sont linéairement indépendants. Comme ϕ est symplectique, c'est vrai aussi pour la structure symplectique $dp \wedge dq$. ■

Remarque 7.6 *Le théorème 7 donne, en plus des intégrales premières Q_i, les variables conjuguées P_j telles que (Q, P) soient des coordonnées symplectiques, et dans lesquelles le mouvement est une translation. En fait, de telles coordonnées existent, au voisinage d'un tore de Liouville, pour tout système intégrable (V. Arnold).*

Exemple 7.7 *Mouvement dans un champ coulombien.*

Soit un point matériel de masse m en mouvement plan dans un potentiel $V(r) = a/r$. Le mouvement est gouverné par le lagrangien $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(r)$. En coordonnées polaires, celui-ci s'écrit

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\, r^2\dot{\theta} - V(r).$$

D'après l'exemple 4.4, le hamiltonien correspondant s'écrit

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2}m^{-1}p_r^2 + \frac{1}{2}(mr^2)^{-1}p_\theta^2 + V(r).$$

Soit $S = S(r, \theta)$ une fonction. L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{1}{2}m^{-1}(\frac{\partial S}{\partial r})^2 + \frac{1}{2}(mr^2)^{-1}(\frac{\partial S}{\partial \theta})^2 + V(r) = \text{const.}.$$

Le jeu consiste à exhiber une famille à 2 paramètres de solutions. Cela demande un peu d'astuce. On les cherche sous la forme $S(r, \theta) = f(r) + g(\theta)$. Il vient

$$\frac{1}{2}m^{-1}f'(r)^2 + \frac{1}{2}(mr^2)^{-1}g'(\theta)^2 + V(r) = \text{const.},$$

qui équivaut au système

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= Q_2, \\ f'(r) &= \sqrt{2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r)} \end{aligned}$$

où Q_1 et Q_2 sont des constantes d'intégration, qui vont servir de paramètres. La fonction génératrice choisie est la fonction $S(r, \theta, Q_1, Q_2)$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \theta} &= g'(\theta) = Q_2, \\ \frac{\partial S}{\partial r} &= f'(r) = \sqrt{2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r)}, \end{aligned}$$

soit

$$S(r, \theta, Q_1, Q_2) = Q_2\theta + \int \sqrt{2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r)}\, dr.$$

On calcule les variables conjuguées

$$\begin{aligned} P_1 &= -\frac{\partial S}{\partial Q_1} = -\int \frac{m}{\sqrt{2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r)}}\, dr, \\ P_2 &= -\frac{\partial S}{\partial Q_2} = -\theta + \int \frac{2r^{-2}Q_2}{\sqrt{2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r)}}\, dr. \end{aligned}$$

Par construction, pour tout $q = (r, \theta)$ et tout $p = (p_r, p_\theta)$, l'équation $\frac{\partial S}{\partial q}(q, Q) = p$ possède une unique solution Q. Inversement, étant donné Q, $\frac{\partial S}{\partial Q_1}$ et $\frac{\partial S}{\partial Q_2}$ sont des fonctions monotones de r et de θ, donc l'équation $-\frac{\partial S}{\partial Q} = P$ possède au plus une solution. Du théorème 7, il résulte que le système est complètement intégrable. Si la condition $2mQ_1 - r^{-2}Q_2^2 - 2mV(r) > 0$ délimite un intervalle bornée, alors la trajectoire reste bornée, et, d'après le théorème 6, le mouvement est quasipériodique.

Lorsque $V(r) = ar^{-1}$, on peut aller au bout du calcul. La condition $2mQ_1 - Q_2^2 r^{-2} - 2mar^{-1}$ entraîne que r est borné si et seulement si le discriminant $2mQ_1Q_2^2 + m^2a^2 > 0$. Dans ce cas, le changement de variable $u = r^{-1}$, donne

$$\begin{aligned} P_2 &= -\theta - \int^{r^{-1}} \frac{2Q_2 du}{\sqrt{2mQ_1 - u^2Q_2^2 - 2mau}} \\ &= -\theta - \arcsin(\alpha + \beta/r). \end{aligned}$$

En coordonnées (Q, P), le hamiltonien s'écrit $H = Q_1$, donc $\{H, P_2\} = \{Q_1, P_2\} = 0$, i.e. P_2 est une intégrale première, ce qui donne l'équation polaire des trajectoires,

$$\sin(\theta - \theta_0) = \alpha + \beta/r.$$

On trouve des ellipses. De $\{H, P_1\} = \{Q_1, P_1\} = -1$, on peut tirer le paramétrage des ellipses. Si $2mQ_1Q_2^2 + m^2a^2 < 0$ (resp. $= 0$) on trouve des hyperboles (resp. des paraboles).

8 La toupie symétrique

8.1 Angles d'Euler

Ce sont des coordonnées sur le groupe des rotations. Fixons un repère orthonormé (e_x, e_y, e_z) de $\mathbf{R}^3$. Un second repère orthonormé direct (e_1, e_2, e_3) tel que $e_3 \neq \pm e_z$

s'obtient à partir du premier par les opérations suivantes. Notons e_n un vecteur unitaire directeur de l'intersection des plans $Vect(e_x, e_y)$ et $Vect(e_1, e_2)$. On fait tourner (e_x, e_y, e_z) autour de e_z, d'un angle ϕ, de sorte que e_x arrive en e_n. Remarquer que e_z et e_3 sont tous les deux dans le plan orthogonal à e_n. On fait tourner le repère obtenu autour de e_n, d'un angle θ, pour amener e_z sur e_3. Enfin, on fait tourner le repère obtenu autour de e_3, d'un angle ψ, pour amener e_n sur e_1.

Notons $\rho_z(\phi)$ (resp. $\rho_n(\theta)$, resp. $\rho_3(\psi)$) les rotations citées. Alors

$$\rho_n(\theta) = \rho_z(\phi)\rho_x(\theta)\rho_z(\phi)^{-1},$$

donc $\rho_n(\theta)\rho_z(\phi) = \rho_z(\phi)\rho_x(\theta)$ envoie e_z sur e_3. Par conséquent,

$$\rho_3(\psi) = \rho_z(\phi)\rho_x(\theta)\rho_z(\psi)(\rho_z(\phi)\rho_x(\theta))^{-1},$$

donc la rotation qui envoie (e_x, e_y, e_z) sur (e_1, e_2, e_3) est

$$R(\phi, \theta, \psi) = \rho_3(\psi)\rho_n(\theta)\rho_z(\phi) = \rho_z(\phi)\rho_x(\theta)\rho_z(\psi).$$

Calculons la différentielle de $R : \mathbf{R}^3 \to SO(3)$.

$$\dot{R}(\phi, \theta, \psi) = \dot{\phi}\dot{\rho}_z(\phi)\rho_x(\theta)\rho_z(\psi) + \dot{\theta}\rho_z(\phi)\dot{\rho}_x(\theta)\rho_z(\psi) + \dot{\psi}\rho_z(\phi)\rho_x(\theta)\dot{\rho}_z(\psi),$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} R^{-1}\dot{R} & = & \dot{\phi}\rho_z(-\psi)\rho_x(-\theta)\rho_z(-\phi)\dot{\rho}_z(\phi)\rho_x(\theta)\rho_z(\psi) + \dot{\theta}\rho_z(-\psi)\rho_x(-\theta)\dot{\rho}_x(\theta)\rho_z(\psi) + \dot{\psi}\rho_z(-\psi)\dot{\rho}_z(\psi) \\ & = & \dot{\phi}a_{\Omega_\phi} + \dot{\theta}a_{\Omega_\theta} + \dot{\psi}a_{\Omega_\psi} \end{array}$$

où

$$\Omega_\psi = e_z, \quad \Omega_\theta = \rho_z(-\psi)e_x = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ -\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_\phi = \rho_z(-\psi)\rho_x(-\theta)e_z = \begin{pmatrix} \sin\psi\sin\theta \\ \cos\psi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On remarque que Ω_θ est orthogonal à Ω_ψ et à Ω_ϕ, et que ces derniers font un angle θ. Par conséquent, R est une immersion sur $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}\times]0, \pi[\times\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$.

8.2 Calcul du lagrangien

Considérons un solide dont le tenseur d'inertie possède une valeur propre double $I_1 = I_2$. On suppose de plus que le centre de gravité G se trouve sur l'axe principal d'inertie double. Choisissons pour repère orthonormé (e_x, e_y, e_z) les axes principaux d'inertie du solide au repos, et posons $G = \ell e_z$. Repérons la position du solide en mouvement par ses angles d'Euler $(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$. La vitesse angulaire $\Omega(t)$ telle que $a_{\Omega(t)} = R(\phi(t), \theta(t), \psi(t))^{-1}\dot{R}(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$ est donnée par

$$\begin{array}{rcl} \Omega & = & \dot{\phi}\Omega_\phi + \dot{\theta}\Omega_\theta + \dot{\psi}\Omega_\psi \\ & = & \begin{pmatrix} \dot{\phi}\sin\psi\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\phi}\cos\psi\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi \\ \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\Omega^\top A\Omega = \frac{1}{2}I_1\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_1 \sin^2\theta\dot\phi^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2.$$

L'énergie potentielle de gravité du solide s'écrit

$$\begin{aligned}
\int_S V(Rq)\,dq &= \int_S g\, e_z^\top Rq\,\rho(q)dq \\
&= g\, e_z^\top R\int_S q\,\rho(q)dq \\
&= mg\ell\, e_z^\top Re_z \\
&= mg\ell\cos\theta,
\end{aligned}$$

donc le mouvement est gouverné par le lagrangien

$$L(\phi,\theta,\psi,\dot\phi,\dot\theta,\dot\psi) = \dot q^\top G\dot q - mg\ell\cos\theta,$$

où

$$\dot q = \begin{pmatrix}\dot\phi\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} I_1\sin^2\theta + I_3\cos^2\theta & 0 & I_3\cos\theta\\ 0 & I_1 & 0\\ I_3\cos\theta & 0 & I_3\end{pmatrix}.$$

8.3 Calcul du hamiltonien

La transformation de Legendre donne

$$\begin{aligned}
H(\phi,\theta,\psi,p_\phi,p_\theta,p_\psi) &= pG^{-1}p^\top + mg\ell\cos\theta \\
&= \frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2 + \frac{1}{2I_3}p_\psi^2 + \frac{1}{2I_1}p_\theta^2 + mg\ell\cos\theta.
\end{aligned}$$

8.4 Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

Elle s'écrit

$$\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(\frac{\partial S}{\partial\phi} - \frac{\partial S}{\partial\psi}\cos\theta)^2 + \frac{1}{2I_3}(\frac{\partial S}{\partial\psi})^2 + \frac{1}{2I_1}(\frac{\partial S}{\partial\theta})^2 + mg\ell\cos\theta = \text{const.}.$$

De nouveau, on cherche une solution S sous la forme $S = f(\phi) + g(\theta) + h(\psi)$. Cela donne en plus

$$f'(\phi) = \frac{\partial S}{\partial\phi} = \text{const.}, \quad h'(\theta) = \frac{\partial S}{\partial\psi} = \text{const.}.$$

Introduisons les trois constantes d'intégration

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial S}{\partial\phi} = Q_1,\\
&\frac{\partial S}{\partial\psi} = Q_2,\\
&\frac{1}{2I_1\sin^2\theta}(Q_1 - Q_2\cos\theta)^2 + \frac{1}{2I_3}Q_2^2 + \frac{1}{2I_1}(\frac{\partial S}{\partial\theta})^2 + mg\ell\cos\theta = Q_3.
\end{aligned}$$

On obtient la solution

$$S(\phi,\theta,\psi,Q_1,Q_2,Q_3) = Q_1\phi + Q_2\psi + \int \sqrt{k}\, d\theta$$

où

$$k = 2I_1Q_3 - 2I_1 mg\ell\cos(\theta) - \frac{I_1}{I_3}Q_2^2 - \frac{(Q_1 - Q_2\cos\theta)^2}{\sin^2\theta},$$

définie sur l'ouvert $\mathcal{U} = \{(\phi,\theta,\psi,Q_1,Q_2,Q_3)\,;\, k > 0\}$. Notons U' la projection de cet ouvert sur les trois dernières coordonnées. Noter que la projection U sur les trois premières est $\mathbf{R}^3$ tout entier.

Par construction, pour tout $q = (\phi,\theta,\psi) \in U$ et tout $p = (p_\phi, p_\theta, p_\psi)$, l'équation $\frac{\partial S}{\partial q}(q,Q) = p$ possède une unique solution $Q \in U'$. Inversement, soit $Q \in U'$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial Q_1} &= \phi + \int \frac{Q_1 - Q_2\cos\theta}{\sin^2\theta} k^{-1/2} d\theta, \\
\frac{\partial S}{\partial Q_2} &= \psi + \int (-Q_2 + \cos\theta \frac{Q_1 - Q_2\cos\theta}{\sin^2\theta}) k^{-1/2} d\theta, \\
\frac{\partial S}{\partial Q_3} &= \int I_1 k^{-1/2} d\theta.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial S}{\partial Q_3}$ ne dépend que de θ et est une fonction strictement croissante de θ, l'équation $\frac{\partial S}{\partial Q_3} = P_3$ détermine uniquement θ et donc les intégrales figurant dans les deux première équations. Par conséquent, l'application $q \mapsto \frac{\partial S}{\partial Q}(q,Q)$ est injective, son image est de la forme $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times J(Q)$ où J est un intervalle dépendant de Q. Les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites, le système est complètement intégrable.

Il y a donc bien une transformation canonique (Q,P) associée à S. Dans ces coordonnées, les solutions sont des fonctions affines de t. Le mouvement est quasipériodique. Il peut s'interpréter comme la combinaison de trois mouvement, la *rotation* du solide autour de l'axe de symétrie de son tenseur d'inertie, à vitesse angulaire constante Q_2, la *précession* de cet axe, qui dans l'ensemble tourne à vitesse angulaire constante Q_1 autour de la verticale, et la *nutation*, oscillation de l'axe dans un plan vertical entre deux pentes limites (qui dépendent de Q).

Dans la limite des grandes vitesses de rotation (ou, ce qui revient au même, quand on fait tendre la constante de gravitation g vers 0), le mouvement converge (après changement de temps) vers le mouvement d'Euler-Poinsot, composition d'une rotation et d'une précession seules.

9 Appendice : la dérivée de Lie

C'est la façon dont un champ de vecteurs dérive tout autre champ de tenseurs, e.g. un champ de vecteurs, une forme différentielle, un champ de formes bilinéaires, un champ d'endomorphismes du fibré tangent...

9.1 Définition

Définition 9.1 *Soit V un champ de vecteurs sur une variété, engendrant un groupe à un paramètre (local) de difféomorphismes $s \mapsto \phi_s$. Soit T un champ de tenseurs. La* dérivée de Lie `(Lie derivative)` *de T dans la direction de ξ est*

$$\mathcal{L}_V T = \frac{d}{ds}\phi_s^* T_{|s=0}.$$

Exemple 9.2 *Soit V un champ de vecteurs et f une fonction. Alors*

$$\mathcal{L}_V f = Vf = df(V).$$

9.2 Tenseurs invariants

La dérivée de Lie sert a écrire la condition sur un champ de vecteurs pour que son flot préserve une structure géométrique.

Proposition 9.3 *Pour que le groupe à un paramètre de difféomorphismes ϕ_s engendré par un champ de vecteurs V préserve le champ de tenseurs T, il faut et il suffit que $\mathcal{L}_V T = 0$.*

Preuve. C'est une condition nécéssaire, par définition. Réciproquement, supposons que $\mathcal{L}_V T = 0$. Posons $T_s = \phi_s^* T$. Pour tout t,

$$\phi_{s+t}^* T = \phi_s^*(\phi_t^* T),$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{dT_s}{ds} &= \frac{d}{dt}(\phi_{t+s}^* T)_{|t=0} \\ &= \phi_s^*(\frac{d}{dt}\phi_t^* T) \\ &= \phi_s^*(\mathcal{L}_V T) = 0, \end{aligned}$$

donc $T_s = T_0 = T$. ∎

Exemple 9.4 *On obtient ainsi une caractérisation infinitésimale des champs de Killing (engendrant les groupes à un paramètres d'isométries) et les champs symplectiques (engendrant les groupes à un paramètre de transformations canoniques).*

9.3 Le cas des champs de vecteurs

Définition 9.5 *Soient V et W deux champs de vecteurs. Leur* crochet de Lie `(Lie bracket)` *est le champ de vecteurs $[V, W]$ tel que, pour toute fonction lisse f,*

$$V(Wf) - W(Vf) = [V, W]f.$$

Proposition 9.6 *Soient V et W deux champs de vecteurs. Alors $\mathcal{L}_V W = [V, W]$.*

Preuve. Soit f une fonction lisse. Alors

$$\begin{aligned} V(Wf) &= \mathcal{L}_V(Wf) \\ &= (\mathcal{L}_V W)f + W(\mathcal{L}_V f) \\ &= (\mathcal{L}_V W)f + W(Vf). \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 9.7 *Deux champs de vecteurs engendent des flots qui commutent si et seulement si leur crochet de Lie est nul.*

Preuve. Soient V, W des champs de vecteurs, $s \mapsto \phi_s$ et $s \mapsto \psi_s$ les groupes à un paramètre (locaux) de difféomorphismes qu'ils engendrent.

Si ϕ_s et ψ_t commutent pour tous s et t, alors

$$(\phi_s^* W)(\phi_s(q)) = d_q\phi_s(W(q)) = \frac{d}{dt}\phi_s(\psi_t(q))_{|t=0} = \frac{d}{dt}\psi_t(\phi_s(q))_{|t=0} = W(\phi_s(q)),$$

donc $\phi_s^* W = W$. En dérivant par rapport à s, on trouve que $[V, W] = \mathcal{L}_V W = 0$.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{L}_V W = [V, W] = 0$. D'après la proposition 9.3, ϕ_s préserve le champ de vecteurs W, $\phi_s^* W = W$. Si $t \mapsto c(t) = \psi_t(c(0))$ est une ligne intégrale de W, il en est de même de $t \mapsto \tilde{c}(t) = \phi_s(c(t))$. Par conséquent

$$\phi_s \circ \psi_t(c(0)) = \tilde{c}(t) = \psi_t(\tilde{c}(0)) = \psi_t \circ \phi_s(c(0)).$$

On conclut que $\psi_t \circ \phi_s = \phi_s \circ \psi_t$ pour tous s et t. $\blacksquare$

9.4 Cas général

Comme tout tenseur est une somme de produits tensoriels de champs de vecteurs et de leurs duaux, les 1-formes différentielles, le lemme suivant permet en principe de calculer la dérivée de Lie de n'importe quel type de tenseur.

Lemme 9.8 *Soient T, T', deux champs de tenseurs, et V un champ de vecteurs. Alors*

$$\mathcal{L}_V(T \otimes T') = (\mathcal{L}_V T) \otimes T' + T \otimes (\mathcal{L}_V T'),$$

$$\mathcal{L}_V(trace(T)) = trace(\mathcal{L}_V T).$$

Preuve. Les difféomorphismes passant au travers de ce genre d'opérations, la dérivée de Lie se comporte comme une dérivation. $\blacksquare$

Remarque 9.9 *Plus généralement, la dérivée de Lie passe à travers toutes les opérations bilinéaires naturelles du calcul différentiel, même celles qui impliquent une dérivation, comme $(V, T) \mapsto \mathcal{L}_V T$.*

Exemple 9.10 *Si V et W sont des symétries infinitésimales d'un champ de tenseurs T, alors il en est de même de leur crochet $[V, W]$.*

En effet, si $\mathcal{L}_V T = \mathcal{L}_W T = 0$, alors

$$0 = \mathcal{L}_V(\mathcal{L}_W T) = \mathcal{L}_{\mathcal{L}_V W} T + \mathcal{L}_W \mathcal{L}_V T = \mathcal{L}_{[V,W]} T.$$

9.5 Le cas des formes différentielles

Proposition 9.11 Formule de Cartan. *Soit V un champ de vecteurs. Soit α une forme différentielle. Alors*

$$\mathcal{L}_V\alpha = \iota_V d\alpha + d(\iota_V\alpha).$$

Preuve.

Lorsque $\alpha = f$ est une fonction, $(d\iota_V + \iota_V d)f = Vf = \mathcal{L}_V f$.

Comme les difféomorphismes commutent avec la différentielle extérieure, il en est de même de la dérivée de Lie. On constate que l'opérateur $d\iota_V + \iota_V d$ commute avec d lui aussi.

Comme les difféomorphismes passent à travers le produit extérieur, la dérivée de Lie se comporte comme une dérivation,

$$\mathcal{L}_V(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_V\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge(\mathcal{L}_V\beta).$$

Les identités

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^{deg(\alpha)}\alpha\wedge d\beta$$

et

$$\iota_V(\alpha\wedge\beta) = (\iota_V\alpha)\wedge\beta + (-1)^{deg(\alpha)}\alpha\wedge(\iota_V\beta)$$

entraînent que l'opérateur $d\iota_V + \iota_V d$ se comporte lui aussi comme une dérivation vis à vis du produit extérieur.

Comme toute forme différentielle est une somme de produits extérieurs de fonctions et de différentielles de fonctions, la formule est démontrée. ∎