Profil isopérimétrique des métriques périodiques *

P. Pansu

March 18, 1999

RESUME. On précise le comportement asymptotique du profil isopérimétrique du revêtement universel d'un 2-tore riemannien.

ABSTRACT. An asymptotic expansion for the isoperimetric profile of the universal covering of a 2-torus is given.

1 Introduction

Définition 1 *Soit M une variété riemannienne de volume A (éventuellement $A = +\infty$). Pour $0 < a < A$, on note $I(a)$ la borne inférieure des volumes des bords des sous-variétés compactes de codimension 0 de M de volume a. On l'appelle* profil isopérimétrique *de M.*

On s'intéresse au comportement asymptotique du profil isopérimétrique du revêtement universel $\tilde{T}$ d'un 2-tore T. Lorsque la métrique sur T est plate, $\tilde{T}$ est isopérimétrique au plan euclidien, dont le profil isopérimétrique est $I_{eucl}(a) = \sqrt{4\pi a}$. Pour une métrique quelconque g sur T, il existe une constante K telle que, sur $\tilde{T}$,

$$K^{-1} g_{eucl} \leq g \leq K\, g_{eucl}$$

d'où les inégalités

$$K^{-1}\sqrt{4\pi a} \leq I(a) \leq K\,\sqrt{4\pi a}.$$

On cherche à affiner cette estimation grossière.

Depuis [GLP] (voir aussi [Bu]), on sait que, à grande échelle, le revêtement universel d'un tore riemannien ressemble à l'espace vectoriel $H_1(T, \mathbf{R})$ muni de la *norme stable*, définie comme suit, voir [F], [Ma].

Définition 2 *Soit M une variété riemannienne. La masse*

$$M(\sum \lambda_i \sigma_i) = \sum |\lambda_i| \mathrm{Vol}\,(\sigma_i)$$

des cochaînes simpliciales lipschitziennes à coefficients réels induit une norme sur l'homologie $H_*(M, \mathbf{R})$, appelée norme stable.

On va montrer que le profil isopérimétrique du revêtement universel converge vers celui de l'espace $H_1(T, \mathbf{R})$. Encore faut il préciser comment on mesure les aires dans cet espace normé. On utilise le volume *de Liouville* défini comme suit.

Définition 3 *Soit N une variété de dimension n munie d'une métrique de Finsler. On munit le fibré cotangent de la norme duale. On note B^*N le fibré en boules unités cotangentes, $d\alpha$ sa forme symplectique canonique. Alors pour tout ouvert U de N, on pose*

$$\mathrm{Vol}\,(U) = \int_{B^*U} d\alpha^n.$$

*Mots clé : Inégalité isopérimétrique, norme stable, homogénéisation. Mathematics Subject Classification : 53C20, 35B27, 52A38, 49Q20.

Théorème 1 *Soit T un 2-tore riemannien. On note I le profil isopérimétrique de son revêtement universel. Alors la limite $c_\infty = \lim_{a\to+\infty} I(a)/\sqrt{a}$ existe. Elle vaut*

$$c_\infty = 2\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(T_\infty)}{\mathrm{Aire}\,(T)}}$$

où $T_\infty = H_1(T,\mathbf{R})/H_1(T,\mathbf{Z})$ muni de la norme stable.

On peut se demander comment la *constante isopérimétrique asymptotique* c_∞ varie avec la métrique riemannienne de T. Clairement, on peut toujours la rendre plus petite en augmentant la métrique dans un petit voisinage d'un point. En effet, cela augmente les aires sans changer sensiblement les longueurs. L'inégalité suivante résulte aisément d'un théorème profond de D. Burago et S. Ivanov.

Théorème 2 *Soit T un 2-tore riemannien. La constante isopérimétrique asymptotique c_∞ est toujours au plus égale à $\sqrt{4\pi}$, avec égalité si et seulement si la métrique de T est plate.*

Je me remercie D. Burago qui m'a expliqué la notion de volume de Liouville, particulièrement bien adaptée au problème isopérimétrique.

2 Schéma de la preuve

Choisissons un difféomorphisme de T sur le tore quotient $H_1(T,\mathbf{R})/H_1(T,\mathbf{Z})$ qui préserve l'aire à une constante près. On peut désormais voir le revêtement universel $\tilde{T}$ comme l'espace vectoriel $H_1(T,\mathbf{R})$ muni d'une métrique riemannienne g invariante par les translations du réseau $H_1(T,\mathbf{Z})$, dont l'élément d'aire est constant (i.e. invariant par toutes les translations). D'après [GLP], l'espace normé $H_1(T,\mathbf{R})$ est le cône tangent à l'infini de $\tilde{T}$ au sens suivant. La distance riemannienne $dist_g(x,y)$ et la distance banachique $|x-y|$ satisfont

$$\lim_{|x-y|\to+\infty} dist_g(x,y)/|x-y| = 1.$$

En fait, d'après [Bu], la différence $dist_g(x,y) - |x-y|$ est bornée.

Notons δ_t l'homothétie de rapport t dans l'espace vectoriel $H_1(T,\mathbf{R})$. En un sens faible (seules les distances convergent), les métriques $g_t = t^{-2}\delta_t^* g$ convergent vers la norme stable, en gardant un élément d'aire constant. On montre que les inégalités isopérimétriques convergent, en faisant converger des domaines. C'est plus simple pour les disques, le cas général s'en déduit.

Il reste à déterminer l'inégalité isopérimétrique optimale dans un espace normé (calcul de la constante c_∞). La réponse est donnée par l'inégalité de Brunn-Minkowski.

Les détails de la preuve se trouvent au paragraphe 3. Au paragraphe 4 on rassemble les résultats nécessaires (classiques) sur l'inégalité isopérimétrique dans un espace normé. Enfin au paragraphe 5 on traduit le théorème 1 en termes d'inégalité de Sobolev et d'homogénéisation.

3 Preuve

3.1 Cas des disques

On utilisera des disques généralisés. On rappelle que l'indice d'un point $x \notin \sigma(S^1)$ par rapport à une courbe fermée du plan $\sigma : S^1 \to \mathbf{R}^2$ est le degré de la projection $s \mapsto s - x/|s-x|$. On note $A(\sigma)$ l'ensemble des points dont l'indice par rapport à σ vaut 1. Si σ est une courbe de Jordan, $A(\sigma)$ est un disque.

Définition 4 *Soit M une variété riemannienne difféomorphe au plan, d'aire infinie. Pour $a > 0$, on note $I_d(a)$ la borne inférieure des longueurs des courbes fermées σ de M telles que l'aire de $A(\sigma)$ soit a.*

La première étape de la preuve est le cas particulier suivant du théorème 1.

Proposition 5 *Soit $\tilde{T}$ le revêtement universel d'un 2-tore riemannien T. Soit I_h le profil isopérimétrique de l'espace vectoriel $H_1(T,\mathbf{R})$ muni de la norme stable. Lorsque a tend vers $+\infty$, le rapport $I_d(a)/I_h(a)$ tend vers 1.*

Pour alléger les notations, on supposera que Aire $(H_1(T,\mathbf{R})/H_1(T,\mathbf{Z}))$ = Aire (T,g). On fixe un difféomorphisme de T sur $H_1(T,\mathbf{R})/H_1(T,\mathbf{Z})$ qui préserve l'aire, de sorte que les métriques g, g_t et la norme stable soient toutes définies sur le même espace vectoriel. On indiquera par un indice g les grandeurs relatives à la métrique riemannienne g, par un indice t celles relatives à la métrique riemannienne g_t et par aucun indice celles relatives à la norme stable.

3.2 Lemmes préparatoires

Lemme 6 *Si σ_j converge uniformément vers σ, alors l'aire de $A(\sigma_j)$ converge vers celle de $A(\sigma)$.*

Preuve. Soit U_ϵ le voisinage tubulaire de largeur ϵ de σ. Si j est assez grand pour que σ_j soit contenu dans U_ϵ, alors $A(\sigma_j)\setminus U_\epsilon = A(\sigma)\setminus U_\epsilon$. Comme l'aire de U_ϵ tend vers 0 avec ϵ, on conclut que Aire $A(\sigma) = \lim$ Aire $A(\sigma_j)$. ■

Lemme 7 *Soit V un espace vectoriel normé de dimension 2. Alors $I_d(a) = I(a) = c_\infty\sqrt{a}$.*

Preuve. La comparaison avec une métrique euclidienne, donne $c_\infty = I(1) > 0$. Par homogénéïté, $I(a) = I(1)\sqrt{a}$. Il reste à voir qu'en se limitant aux disques, on n'augmente pas le profil isopérimétrique. Soit Ω une sous-variété compacte à bord de codimension 0 dans V. Si Ω n'est pas connexe, alors une de ses composantes est plus performante du point de vue isopérimétrique. Cela résulte de la concavité de la fonction racine carrée. Si Ω est connexe, une des composantes σ de son bord englobe toutes les autres. Alors $A(\sigma)$ est plus performant du point de vue isopérimétrique que Ω, car la fonction racine carrée est croissante. ■

Lemme 8 *Soit g une métrique $\mathbf{Z}^2$-périodique sur $\mathbf{R}^2$, soit $g_t = t^{-2}\delta_t^* g$. Soit $|\cdot|$ la norme stable correspondante. Alors*

1. *il existe une constante K indépendante de t telle que pour tout x, $y \in \mathbf{R}^2$,*
$$K^{-1}|x-y| \leq dist_{g_t} \leq K\,|x-y|;$$
2. *pour tout $\epsilon > 0$, il existe ϵ_t tendant vers 0 avec t tel que si $|x-y| \geq \epsilon$,*
$$|\frac{dist_{g_t}(x,y)}{|x-y|} - 1| \leq \epsilon_t.$$

Preuve. La comparaison à une métrique euclidienne donne la première inégalité. En vertu du théorème de D. Burago [Bu], on peut prendre $\epsilon_t = \mathrm{const.}/t\epsilon$. ■

3.3 Le profil de $\tilde{T}$ est inférieur à celui de l'homologie

D'après le lemme 7, pour tout $c' > c_\infty$, il existe une courbe fermée σ dans $H_1(T,\mathbf{R})$ telle que Long $\sigma = c'$ et Aire $(A(\sigma)) = 1$. Fixons $\epsilon > 0$ et plaçons des points $p_1,\ldots,p_N$ sur σ de sorte que $|p_{i+1}-p_i| < \epsilon$. Pour chaque t, notons σ_t la courbe obtenue en remplaçant σ sur chaque intervalle $[p_i,p_{i+1}]$ par une géodésique pour la métrique g_t.

Comme $dist_{g_t}(x,y) \leq \mathrm{const.}\,|x-y|$ indépendamment de t, σ_t est contenu dans un voisinage de largeur const.$\,\epsilon$ de σ pour tout t. D'après le lemme 6, |Aire $A(\sigma_t)$ − Aire $A(\sigma)$| tend vers 0 avec ϵ uniformément en t.

D'autre part, $\mathrm{Long}_t(\sigma_t) = \sum dist_t(p_i,p_{i+1})$ tend vers Long (σ) lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour chaque a assez grand, on trouve une courbe de la forme $\delta_t\sigma_t$ dans $\tilde{T}$ qui englobe une aire a et dont la longueur divisée par $\sqrt{a}$ tend vers c'. Ceci prouve que
$$\lim\sup_{a\to\infty} I_d(a)/\sqrt{a} \leq c_\infty.$$

3.4 Le profil de $\tilde{T}$ est supérieur à celui de l'homologie

Supposons au contraire qu'il existe une suite de courbes σ_j telle que $a_j = \text{Aire}\, A(\sigma_j)$ tendent vers $+\infty$ et $\text{Long}\,(\sigma_j)/\sqrt{a_j} < c' < c_\infty$. On pose $t_j = \sqrt{a_j}$ et on considère les courbes $\tau_j = \delta_{1/t_j}\sigma_j$ dans $H_1(T, \mathbf{R})$. Leur longueur pour la métrique g_{t_j} est bornée. Il en est de même pour la norme stable. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'elles convergent uniformément vers une courbe σ. D'après le lemme 6, $\text{Aire}\, A(\sigma) = 1$.

Vérifions que $\text{Long}\,(\sigma) \leq \liminf \text{Long}_{\,t_j}(\tau_j)$. Par approximation, on peut supposer σ géodésique par morceaux, i.e., que σ est géodésique sur les N intervalles $[s_i, s_{i+1}]$ d'une subdivision. Alors

$$\text{Long}\,(\sigma) = \sum_{i=1}^{N} |\sigma(s_{i+1}) - \sigma(s_i)| = \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{N} |\tau_j(s_{i+1}) - \tau_j(s_i)|.$$

D'après 8, pour tout i,

$$||\tau_j(s_{i+1}) - \tau_j(s_i)| - dist_{t_j}(\tau_j(s_i), \tau_j(s_{i+1}))| \leq \epsilon_{t_j}.$$

Enfin,

$$\sum_{i=1}^{N} dist_{t_j}(\tau_j(s_i), \tau_j(s_{i+1})) \leq \text{Long}_{\,t_j}(\tau_j).$$

Il vient $\text{Long}\,\sigma \leq c' < c_\infty$, contradiction. ∎

3.5 Cas des sous-variétés connexes

Si $\Omega \subset \tilde{T}$ est une sous-variété compacte connexe de codimension 0, alors parmi les composantes du bord $\partial\Omega$, il y en a une, notée σ, qui englobe toutes les autres, i.e., $\Omega \subset A(\sigma)$. Alors $\text{Aire}\,\Omega \leq \text{Aire}\, A(\sigma)$ et $\text{Long}\,\partial\Omega \geq \text{Long}\,\sigma$. Si $a = \text{Aire}\,\Omega$ est assez grand, $\text{Long}\,\partial\Omega/\sqrt{a} \geq \text{Long}\,\sigma/\sqrt{\text{Aire}\, A(\sigma)}$ qui est proche de c_∞. On conclut que la fonction $I_c(a)$, borne inférieure des longueurs des bords des domaines *connexes* d'aire a, satisfait $\lim_{a\to+\infty} I_c(a)/\sqrt{a} = c_\infty$.

3.6 Cas général

Il résulte du lemme suivant appliqué à la fonction I_c.

Lemme 9 *Soit J une fonction sur $[0, +\infty[$ qui satisfait $J(a) \geq c_1\sqrt{a}$, $c_1 > 0$, et $\lim_{a\to+\infty} J(a)/\sqrt{a} = c_\infty > 0$. Posons*

$$j(a) = \inf\{\sum J(a_i) \mid a_1, \ldots, a_N \geq 0, \ \sum a_i = a\}.$$

Alors $\lim_{a\to+\infty} j(a)/\sqrt{a} = c_\infty$.

Preuve. Fixons $c_2 < c_\infty$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $J(a) > c_2\sqrt{a}$ pour $a \geq \alpha$. Soit $a > \alpha$. Soient $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_N$ tels que $\sum a_i = a$. Supposons que $a_k < \alpha \leq a_{k+1}$. Notons $x = \sum_{i\leq k} a_i$, $y = \sum_{i\geq k+1} a_i$. Alors

$$c_1 x = \sum_{i\leq k} c_1\sqrt{a_i}\sqrt{a_i} \leq \sqrt{\alpha}\sum_{i\leq k} c_1\sqrt{a_i} \leq \sqrt{\alpha}\sum_{i\leq k} J(a_i)$$

et

$$c_2^2 y = \sum_{i\geq k+1} (c_2\sqrt{a_i})^2 \leq (\sum_{i\geq k+1} c_2\sqrt{a_i})^2 \leq (\sum_{i\geq k+1} J(a_i))^2.$$

Il vient

$$\sum_{i=1}^{N} J(a_i) \geq \frac{c_1}{\sqrt{\alpha}} x + c_2\sqrt{y}.$$

Comme la fonction $x \mapsto \beta x + \gamma\sqrt{a-x}$ est concave sur $[0,a]$, elle atteint son minimum aux bornes. Pour $a > \alpha(c_2/c_1)^2$, on a donc l'inégalité

$$\frac{c_1}{\sqrt{\alpha}}x + c_2\sqrt{a-x} \geq c_2\sqrt{a}$$

d'où $j(a) \geq c_2\sqrt{a}$. ∎

3.7 Fin de la preuve du théorème 1

On a ramené, modulo ajustement des aires de T et de T_∞, le problème isopérimétrique dans le revêtement universel $\tilde{T}$, à celui de $\tilde{T}_\infty$, un espace vectoriel normé de dimension 2. Ce dernier problème va être résolu dans le paragraphe suivant, proposition 12.

4 Inégalité isopérimétrique dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Dans ce paragraphe, on se pose le problème suivant. Quels sont les domaines de V de volume 1 dont le bord a un volume minimum ? La réponse ne dépend pas de la normalisation du volume n-dimensionnel, mais dépend fortement du choix de normalisation des volumes $n-1$-dimensionnels. Elle est connue depuis le siècle dernier, [Br], [W].

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Pour parler de volume pour les domaines de V, il suffit de fixer une n-forme alternée $\omega \in \Lambda^n V^*$. Elle oriente V. On pose alors $\mathrm{Vol}_\omega(\Omega) = \int_\Omega \omega$.

Pour parler de volume pour les hypersurfaces de V, il faut se donner un *intégrand* F, i.e., une fonction positive, paire, positivement homogène de degré 1 sur $\Lambda^{n-1}V$. Si

$$f : \mathbf{R}^{n-1} \to V$$

paramètre une hypersurface W, alors

$$\mathrm{Vol}\,(W) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} F(\frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}).$$

De manière invariante, si W est orientée, on appelle *forme volume* de W en w la $(n-1)$-forme $\phi_F \in \Lambda^{n-1}T_w^*W$ telle que

$$\phi_F(v_1, \ldots, v_{n-1}) = F(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})$$

pour toute base directe $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ de T_wW. Le *volume* de W est $\mathrm{Vol}_F(W) = \int_W \phi_F$.

Exemple. Un intégrand *convexe* n'est rien d'autre qu'une norme sur $\Lambda^{n-1}V$. En dimension 2, une norme sur V est un intégrand convexe qui donne la longueur des courbes.

4.1 Inégalité de Sobolev

Il est classique en géométrie riemannienne (voir [Fa], [K], [M]) que l'inégalité isopérimétrique $I(a) \geq c\,a^{n-1/n}$ équivaut à l'inégalité de Sobolev suivante. Pour toute fonction u lisse à support compact,

$$\| u \|_{L^{n/n-1}} \leq \frac{1}{c}\| du \|_{L^1}.$$

Ce principe s'applique à des intégrands convexes généraux.

Proposition 10 *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un volume ω et d'un intégrand convexe F (i.e. d'une norme sur $\Lambda^{n-1}V$). L'application $\Lambda^{n-1}V \to V^*$, $\mu \mapsto \iota_\mu\omega$ est un isomorphisme, qui transporte la norme F sur $\Lambda^{n-1}V$ en une norme* notée $|\cdot|_{F^*}$ *sur V^*. Alors l'inégalité isopérimétrique*

$$c\,(\mathrm{Vol}_\omega\,\Omega)^{n-1/n} \leq \mathrm{Vol}_F\,(\partial\Omega)$$

équivaut à l'inégalité de Sobolev

$$c\,(\int |f|^{n/n-1}\omega)^{n-1/n} \leq \int |df|_{F^*}\,\omega$$

pour les fonctions lisses à support compact.

Preuve. Il suffit d'écrire la formule de la coaire.

Fixons un point v de V où f est une submersion. Soit ϕ_F la forme volume de la fibre de f passant par v. Alors le produit extérieur $\phi_F \wedge df$ est bien défini au voisinage de v. Soit $\mu \in \Lambda^{n-1}V$ le multivecteur tel que $d_v f = \iota_\mu \omega$. Alors $\mu \in \Lambda^{n-1}\mathrm{Ker}\, d_v f$. Soit $w \notin \mathrm{Ker}\, d_v f$. Alors

$$(\phi_F \wedge df)(\mu \wedge w) = \phi_F(\mu)\, df(w) = F(\mu)\omega(\mu \wedge w)$$

donc $\phi_F \wedge df = F(\mu)\omega = |df|_{F^*}\,\omega$. La formule de la coaire s'écrit donc

$$\int_V |df|_{F^*}\,\omega = \int_{\mathbf{R}} dt \int_{\{f=t\}} \phi_F = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{Vol}_F\,\{f=t\}dt.$$

Supposons l'inégalité de Sobolev connue. Appliquons la à une approximation de la fonction caractéristique d'un domaine lisse Ω, par exemple à la fonction f qui vaut 1 sur Ω, 0 en dehors du voisinage tubulaire de largeur ϵ de Ω, et $1 - g/\epsilon$ dans ce voisinage, où g est la distance à Ω mesurée au moyen de la norme $|\cdot|_F$ sur V duale de $|\cdot|_{F^*}$. Alors $|df|_{F^*} = 1/\epsilon$ et

$$\int_{\mathbf{R}} \mathrm{Vol}_F\,\{f=t\}dt = \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon \mathrm{Vol}_F\,\{g=t\}dt$$

converge vers $\mathrm{Vol}_F\,\partial\Omega$. On obtient l'inégalité isopérimétrique annoncée.

L'argument réciproque sera donné en 13. ∎

4.2 L'inégalité de Brunn

L'inégalité de Sobolev optimale dans un espace normé est connue depuis 1887, [Br].

Théorème (H. Brunn). *Soit V un espace vectoriel normé de dimension n. On note $|\cdot|^*$ la norme duale sur V^*. Normalisons le volume de sorte que la boule unité de V soit de volume 1. Alors pour toute fonction $f \in L^{n/n-1}(V)$ dont les dérivées (au sens des distributions) sont dans L^1,*

$$n\,(\int |f|^{n/n-1})^{n-1/n} \leq \int |df|^*.$$

L'égalité a lieu si et seulement si f est un multiple de la fonction caractéristique d'une boule de V.

On trouvera une preuve moderne de l'inégalité de Brunn dans [MS], appendice de M. Gromov page 126.

Corollaire 11 *Soit V un espace vectoriel de dimension n muni d'un volume ω et d'un intégrand convexe F. Notons $|\cdot|_F$ la norme sur V définie comme suit.*

$$|w|_F = \sup\{\frac{\omega(\mu \wedge w)}{F(\mu)} \mid \mu \in \Lambda^{n-1}V,\ \mu \neq 0\}.$$

Alors la boule unité B_F de $|\cdot|_F$ minimise le F-volume du bord parmi les domaines de même volume. On a

$$\mathrm{Vol}_F\,\partial B_F = n\mathrm{Vol}_\omega\, B_F.$$

Preuve. Notons $\lambda = \mathrm{Vol}_\omega\, B_F$. Alors le théorème de Brunn s'applique avec comme volume la forme $\lambda^{-1}\omega$,

$$n\,(\int |f|^{n/n-1}\lambda^{-1}\omega)^{n-1/n} \leq \int |df|_{F^*}\,\lambda^{-1}\omega$$

Avec la proposition 10, il vient, pour tout domaine Ω de V,

$$c\,(\mathrm{Vol}_\omega\,\Omega)^{n-1/n} \leq \mathrm{Vol}_F\,(\partial\Omega)$$

avec $c = n\lambda_{1/n}$. L'égalité a lieu pour B_F, donc $\mathrm{Vol}_F\,(\partial\Omega) = n\lambda_{1/n}(\mathrm{Vol}_\omega\, B_F)^{n-1/n} = n\mathrm{Vol}_\omega\, B_F$. ∎

4.3 Cas des espaces vectoriels normés de dimension deux

Si V est un espace vectoriel normé de dimension 2, on utilise la norme de V comme intégrand.

Proposition 12 *Soit V est un espace vectoriel normé de dimension 2. Alors on a l'inégalité isopérimétrique*

$$2\,(\mathrm{Aire}\,\Omega)^{1/2} \leq \mathrm{Long}\,(\partial\Omega)$$

où on utilise l'élément d'aire "de Liouville" défini en 3.

Preuve. Le corollaire 11 donne, pour un choix d'élément d'aire ω quelconque,

$$c\,(\mathrm{Aire}_{\omega}\,\Omega)^{1/2} \leq \mathrm{Long}\,(\partial\Omega)$$

où $c = 2\sqrt{\int_{B_F}\omega}$ et B_F est la boule unité de la norme $w \mapsto |\iota_w\omega|^*$. Il reste à montrer que lorsque ω est l'élément d'aire de Liouville, $\int_{B_F}\omega = 1$.

Un élément d'aire ω sur V détermine un élément d'aire ω^* sur V^*, celui tel que l'élément de volume $\omega\wedge\omega^*$ sur $V\times V^*$ coïncide avec celui défini par la structure symplectique naturelle. Alors ω est l'élément d'aire de Liouville si et seulement si $\int_{B^*}\omega^* = 1$ (où B^* désigne la boule unité de V^*).

Notons $\iota : V \to V^*$, $v \mapsto \iota_v\omega$. Alors $\iota^*\omega^* = \omega$. En effet, choisissons des coordonnées (q_1, q_2) sur V telles que $\omega = dq_1 \wedge dq_2$. Soient (p_1, p_2) les coordonnées induites sur V^*. Alors $\omega^* = dp_1 \wedge dp_2$, $\iota(q_1, q_2) = (p_1, p_2)$ avec $p_1 = -q_2$ et $p_2 = q_1$ donc $\iota^*\omega^* = d(-q_2)\wedge dq_1 = \omega$.

Enfin, $B_F = \iota^{-1}(B^*)$ donc

$$\int_{B_F}\omega = \int_{\iota^{-1}(B^*)}\iota^*\omega^* = \int_{B^*}\omega^* = 1. \blacksquare$$

4.4 Preuve du théorème 2

Fixons un point x du revêtement universel $\tilde{T}$ et notons $\mathrm{Aire}\,(r)$ l'aire de la boule de centre x et de rayon r. Notons $\mathrm{Aire}_{\infty}(r)$ l'aire (de Liouville) d'une boule de rayon r dans l'espace normé $V = \tilde{T}_{\infty}$. Alors

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\mathrm{Aire}\,(r)}{\mathrm{Aire}_{\infty}(r)} = \frac{\mathrm{Aire}\,(T)}{\mathrm{Aire}\,(T_{\infty})}.$$

D'autre part, d'après D. Burago et S. Ivanov, [BI],

$$\lim_{r\to+\infty}\mathrm{Aire}\,(r)/r^2 \geq \pi$$

avec égalité si et seulement si T est plat. On conclut que

$$\frac{\mathrm{Aire}\,(T)}{\mathrm{Aire}\,(T_{\infty})} \geq \frac{\pi}{\mathrm{Aire}\,(B)}$$

où B désigne la boule unité de V. Avec le théorème 1, il vient

$$c_{\infty} \leq 2\sqrt{\frac{\mathrm{Aire}\,(B)}{\pi}},$$

avec égalité seulement si T est plat.

Enfin, l'inégalité de Blaschke-Santalo (voir [B], [S] et [H] page 165) entraîne que parmi tous les espaces normés de même dimension finie, le produit $\mathrm{Vol}\,(B)\mathrm{Vol}\,(B^*)$ est maximum exactement pour l'espace de Hilbert. Par conséquent, comme $\mathrm{Aire}\,(B^*) = 1$, $\mathrm{Aire}\,(B) \leq \pi^2$ donc

$$c_{\infty} \leq 2\sqrt{\pi},$$

avec égalité seulement si T est plat. $\blacksquare$

5 Inégalité de Sobolev

5.1 Version asymptotique

Proposition 13 *Soit $p > 2$. La propriété isopérimétrique asymptotique*

$$\lim \inf_{a \to +\infty} I(a)/\sqrt{a} \geq c_\infty$$

équivaut à l'inégalité de Sobolev asymptotique suivante. Pour tout $C > 1/c_\infty$, il existe un C' tel que, pour toute fonction u lisse à support compact,

$$\| u \|_{L^2} \leq C \| du \|_{L^1} + C' \| u \|_{L^p}.$$

Preuve. Supposons que $\lim\inf I(a)/\sqrt{a} \geq c_\infty$ et soit $C > 1/c_\infty$. Il existe un α tel que $\sqrt{a} < C\, I(a)$ pour $a > \alpha$. Soit u une fonction lisse à support compact. Comme $|d|u|| \leq |du|$, on peut supposer que $u \geq 0$. Soit $\tau \in \mathbf{R}$ tel que Aire $\{u > t\} \geq \alpha$ pour $t < \tau$ et Aire $\{u > \tau\} \leq \alpha$. Notons $v = \min\{u, \tau\}$. Pour $t < \tau$, notons χ_t la fonction caractéristique de l'ensemble de niveau $\{u > t\}$. Alors pour tout point x,

$$v(x) = \int_0^\tau \chi_t(x)\, dt.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \| v \|_{L^2} &\leq \int_0^\tau \| \chi_t \|_{L^2}\, dt \\ &= \int_0^\tau \sqrt{\mathrm{Aire}\,\{u > t\}}\, dt \\ &\leq C \int_0^\tau \mathrm{Long}\,\{u = t\}\, dt \\ &= C \| du \|_{L^1}. \end{aligned}$$

Comme $u - v$ est à support dans le domaine $\{u > \tau\}$ d'aire inférieure à α, l'inégalité de Hölder donne

$$\| u - v \|_{L^2} \leq \alpha^{p-2/2p} \| u - v \|_{L^p}$$

d'où

$$\| u \|_{L^2} \leq C \| du \|_{L^1} + C' \| u \|_{L^p}$$

avec $C' = \alpha^{p-2/2p}$.

Inversement, appliquons l'inégalité de Sobolev asymptotique à (une approximation de) la fonction caractéristique d'un domaine Ω. On trouve

$$\mathrm{Aire}\,(\Omega)^{1/2} \leq C\, \mathrm{Long}\,(\partial\Omega) + C'\, \mathrm{Aire}\,(\Omega)^{1/p},$$

d'où, si $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \epsilon$,

$$I(a) \geq \frac{1}{C}\sqrt{a}(1 - CC'a^{-\epsilon}).$$

Ceci entraîne bien que $\lim \inf_{a \to +\infty} I(a)/\sqrt{a} \geq c_\infty$. ∎

5.2 Homogénéisation

Définition 14 *Soit (M, g) une variété riemannienne. Notons $C(M, g)$ la meilleure constante C dans l'inégalité de Sobolev*

$$\| u \|_{L^2} \leq C \| du \|_{L^1}$$

pour les fonctions lisses à support compact sur M.

Notons $C_\infty(M, g)$ la meilleure constante C' telle que l'inégalité

$$\| u \|_{L^2} \leq C' \| du \|_{L^1}$$

soit satisfaite pour toute fonction u lisse, à support compact sur M, et telle que $\| du \|_{L^\infty} \leq 1$.

Etant donné une métrique périodique g sur $\mathbf{R}^2$, considérons la famille des métriques dilatées $g_t = t^{-2}\delta_t^* g$. Comme les métriques g_t sont homothétiques, la constante de Sobolev $C(\mathbf{R}^2, g_t)$ est indépendante de t. Elle vaut $\sup\{\sqrt(a)/I(a) \mid a > 0\}$ où I désigne le profil isopérimétrique de $(\mathbf{R}^2, g)$. En revanche, la constante modifiée $C_\infty(\mathbf{R}^2, g_t)$ dépend de t. Lorsque t tend vers 0, elle tend vers $C(\mathbf{R}^2, g)$.

Proposition 15 $\lim \sup_{t\to+\infty} C_\infty(\mathbf{R}^2, g_t) \leq 1/c_\infty$.

Preuve. Le profil isopérimétrique I_t de g_t satisfait $I_t(a) = t^{-1}I(t^2a)$. La fonction $I_t(a)/\sqrt(a)$ converge donc vers c_∞ lorsque a tend vers $+\infty$ d'autant plus vite que t est grand. Par conséquent, pour chaque $C > 1/c_\infty$ et $p > 2$ fixés, la constante C' de l'inégalité de Sobolev asymptotique 13 pour la métrique g_t tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Autrement dit, il existe des constantes C_t tendant vers c_∞ et C'_t tendant vers 0 telles que

$$\| u \|_{L^2(g_t)} \leq C_t \| du \|_{L^1(g_t)} + C'_t \| u \|_{L^p(g_t)}.$$

Posons $q = 2p/2 + p$. En vertu de 8, l'inégalité de Sobolev

$$\| u \|_{L^p(g_t)} \leq C'' \| du \|_{L^q(g_t)}$$

est satisfaite avec une (mauvaise) constante indépendante de t. Si u satisfait $\| du \|_{L^\infty(g_t)} \leq 1$, on majore

$$\| du \|_{L^q(g_t)} \leq \| du \|_{L^1(g_t)}$$

d'où

$$\| u \|_{L^p(g_t)} \leq C'' \| du \|_{L^1(g_t)}$$

et on obtient

$$\| u \|_{L^2(g_t)} \leq (C_t + C'_t C'') \| du \|_{L^1(g_t)}$$

et la constante tend vers $1/c_\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. ∎

Remarque. On peut interpréter cette proposition comme un énoncé sur l'homogénéisation de l'équation des minimisantes de la norme L_1^1 à norme L^2 fixée en dimension 2 (cf. [SS], chapitre 5). Supposant $g = f\, g_{eucl}$ conforme à une métrique euclidienne (en dimension 2, ce n'est pas une restriction), on considère des fonctions u uniformément lipschitziennes pour la métrique euclidienne et on examine le comportement asymptotique de la quantité

$$\sup \frac{\sqrt{\int f(tx)^2 u(x)^2\, dx}}{\int f(tx)|\nabla u|(x)\, dx}.$$

5.3 Cristallographie

Le théorème 1 énonce que dans un environnement périodique, les grandes bulles de savon prennent une forme convexe et "cristalline", comparer à [W].

References

[B] W. BLASCHKE, *Über affine Geometrie VII : Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid.* Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **69**, 306 – 318 (1917).

[BI] D. Yu. BURAGO, S. IVANOV, *On asymptotic volume of tori.* Geom. Funct. Anal. **5**, 800 – 808 (1995).

[Br] H. BRUNN, *Über Ovale und Eiflächen.* Inaug. Diss. München (1887).

[Bu] D. Yu. BURAGO, *Periodic metrics.* Representation theory and dynamical systems, Adv. Sov. Math. **9**, 205 – 210 (1992).

[Fa] G. FABER, *Beweis dass unter allen homogenen membranen von gleicher Flache und gleicher Spanne, die Kreisformige den tiefsten Grundton gibt.* S. B. Math. Kl. Bayer. Akad. Wiss. 169 – 172 (1923).

[F] H. FEDERER, *Real flat chains, cochains and variational problems.* Indiana Univ. Math. J.. **24**, 351 – 407 (1974).

[G] M. GROMOV, *Filling Riemannian manifolds.* J. Differ. Geom. **18**, 1 – 147 (1983).

[GLP] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes.* Rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu. Textes Mathématiques, 1. Cedic/Fernand Nathan, Paris (1981).

[H] P.M. GRUBER and J.M. WILLS, (ed.) *Handbook of convex geometry. Volume A.* North-Holland, Amsterdam (1993).

[K] E. KRAHN, *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft der Kreise.* Math. Ann. **94**, 97 – 100 (1924).

[M] V. MAZYA, *Classes of domains and embedding theorems for function spaces.* Dokl. Akad. Nauk USSR **133**, 527 – 530 (1960).

[Ma] J. MATHER, *Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems.* Math. Z. **207**, 169 – 207 (1991).

[MS] V. MILMAN and G. SCHECHTMAN, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.* Lect. Notes in Math. **1200**, Springer, Berlin (1986).

[R] Y. RESHETNYAK, *An extremal problem from the theory of convex curves.* Uspekhi Mat. Nauk **8**, (6) 125 – 126 (1953).

[S] L.A. SANTALO, *Un invariante afin para los cuerpos convexos del espacio de n dimensiones.* Portugaliae Math. **8**, 155 – 161 (1949).

[SS] J. SANCHEZ-HUBERT et E. SANCHEZ-PALENCIA, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation.* Masson, Paris (1992).

[W] G. WULFF, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachtums und der Auflösung der Krystalflächen.* Z. Krystallogr. Mineral. **34**, 499 (1901).

U.R.A. D1169 du C.N.R.S.
Mathématiques, Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay
France
`Pierre.Pansu@math.u-psud.fr`