Annals of Mathematics, 129 (1989), 1–60

Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un

Par Pierre Pansu

Abstract

We exhibit a rigidity property of the simple groups $\mathrm{Sp}(n,1)$ and F_4^{-20} which implies Mostow rigidity. This property does not extend to $\mathrm{O}(n,1)$ and $\mathrm{U}(n,1)$. The proof relies on quasiconformal theory applied in the CR setting. Extensions are given to a class of solvable Lie groups. As a byproduct, a result on quasiisometries of infinite nilpotent groups is obtained.

Dans cet article, on établit une propriété de rigidité des groupes simples de rang un $\mathrm{Sp}(n,1)$, $n \geq 2$ et F_4^{-20} qui entraîne la rigidité de Mostow:

1. Théorème. *Toute quasiisométrie de l'espace hyperbolique quaternionien* $\mathbf{HH}^n$, $n \geq 2$, (*resp. du plan hyperbolique de Cayley* $\mathrm{Ca}\mathrm{H}^2$) *est à distance bornée d'une isométrie, i.e., diffère d'une isométrie par une application qui déplace les points d'une distance bornée.*

Une application f entre espaces métriques est une quasiisométrie s'il existe des constantes L et C telles que l'image de f soit C-dense et que, pour tous $x \neq y$,

$$- C + \frac{1}{L} d(x, y) \leq d(fx, fy) \leq L d(x, y) + C.$$

Une quasiisométrie entre des G et G' est une sorte "d'isomorphisme virtuel" dans la catégorie topologique (en effet, cela correspond à une action de G sur un fibré principal C^0 de groupe G' sur une base compacte; cf. [Ra]).

Un isomorphisme entre sous-groupes cocompacts (covolume fini suffit pour les groupes simples de rang un) de groupes de Lie s'étend en une quasiisométrie des espaces symétriques ou des groupes de Lie. Si celle-ci est proche d'une isométrie des espaces symétriques (resp. un isomorphisme des groupes de Lie), les sous-groupes sont conjugués, c'est la rigidité de Mostow [M2].

La propriété ci-dessus ne s'étend pas aux groupes $\mathrm{O}(n,1)$ et $\mathrm{U}(n,1)$. En effet, (paragraphe 11.7) ceux-ci ont beaucoup de quasiisométries, au moins autant que de difféomorphismes de la sphère S^{n-1} (resp. que de transformations de contact de la sphère S^{2n-1}). Comme la propriété (T) de Kazhdan (voir [Z]), notre résultat confirme l'existence d'une ligne de partage qui passe au milieu des groupes de rang un.

Toutefois, il s'agit d'un résultat négatif. Il montre qu'on ne peut espérer étendre aux réseaux de $\mathrm{Sp}(n,1)$ et F_4^{-20} les considérations sur les déformations quasiconformes de groupes Kleiniens, comme dans [T]. Surtout, il indique que le concept de quasiisométrie est mal adapté à l'étude des groupes simples de rang un, et qu'il faut rechercher des conditions plus faibles.

En revanche, les quasiisométries sont un outil efficace d'investigation des variétés à courbure négative générales. Notre méthode s'étend facilement à une classe d'espaces homogènes à courbure négative, dits "de Carnot". On peut classer ces espaces à quasiisométrie près (la classification générale est due à U. Hamenstädt, [Ha]), on trouve que, "génériquement", ils partagent la propriété de $\mathrm{Sp}(n,1)$: leurs seules quasiisométries sont les isométries (théorème 4); cependant, il existe des espaces homogènes qui ne la partagent pas (remarque 14.2), souvent, les quasiisométries forment un groupe de Lie de dimension finie, parfois, de dimension infinie. Toutefois, on sent, sans pouvoir l'exprimer de façon précise que, de toutes les variétés à courbure négative, les espaces hyperboliques réel $\mathbf{R}H^n = O(n,1)/O(n)$ et complexe $\mathbf{C}H^n = U(n,1)/U(n)$ sont les plus riches en quasiisométries.

1. La méthode

La démonstration par G.D. Mostow de la rigidité pour $O(n,1)$ ([M1]) repose sur l'idée que les quasiisométries s'identifient aux transformations quasiconformes de la "sphère à l'infini" S^{n-1} et sur la régularité de ces transformations. G.D. Mostow a montré que cette idée s'étend aux autres espaces de rang un, [M2].

Nous montrons que la géométrie conforme de la sphère à l'infini est modelée sur des groupes nilpotents munis de métriques non riemanniennes. On peut alors parler de transformations quasiconformes. En fait, on montre que les seuls homéomorphismes quasiconformes globaux de la sphère à l'infini sont les extensions des isométries.

Pour expliquer cette rigidité, montrons qu'elle est immédiate dans le cas d'un difféomorphisme de classe C^3 au moins. La sphère à l'infini ∂X de $X = \mathbf{K}H^n$, $n \geq 2$, porte un champ de plans Q invariant par isométries; sa codimension est $\dim \mathbf{K} - 1$. Un difféomorphisme ϕ de ∂X est quasiconforme si et seulement si il préserve Q. Si c'est le cas, alors ϕ préserve une G-structure, $G \subset \mathrm{Gl}(Q)$, attachée naturellement au champ de plans Q. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, il n'y a pas de structure spéciale, $G = \mathrm{Gl}(Q)$. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, c'est une structure conforme symplectique, $G = C\,\mathrm{Sp}(2n - 2, \mathbf{R})$. Ces deux G-structures sont de type infini. Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{H}$, c'est une structure conforme quaternionienne, $G = C\,\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{Sp}(1)$, et lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{Ca}$, $G = C\,\mathrm{Spin}(7)$ où $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{SO}(8)$. Or les deux dernières G-structures sont de type fini, leur groupe d'automorphismes de classe C^3 est de dimension finie, cf. [Ta], c'est exactement $\mathrm{Sp}(n, 1)$ ou F_4^{-20}.

Nous décrivons maintenant les outils qui permettent de se passer de toute hypothèse de régularité.

1.1. *Métriques de Carnot-Carathéodory.* Soit M une variété. Soit V un sous-fibré du fibré tangent TM. Pour $p \in M$, on note $V^i(p)$ le sous-espace de TM engendré par les valeurs en p des crochets i-uples de champs de vecteurs tangents à V. On dit que V est accessible s'il existe un r tel que $V^r(p) = T_pM$ en chaque point.

Une métrique de Carnot-Carathéodory sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré accessible V du fibré tangent TM, et d'une métrique sur les fibres de V.

A partir de ces données, on construit, comme dans le cas riemannien, une distance. On sait définir la longueur des courbes *horizontales*, i.e., tangentes à V. On peut donc poser, pour deux points x et y de N,

$$d(x, y) = \inf\{\text{longueur}(c) | c \text{ horizontale, joignant } x \text{ à } y\}.$$

La distance obtenue définit la topologie usuelle de la variété M (voir par exemple [C]), mais sa dimension de Hausdorff est en général supérieure à dim M. Faisons l'hypothèse supplémentaire que chacun des V^i soit un sous-fibré. Alors J. Mitchell montre que la dimension de Hausdorff est égale à

$$\sum_{i=1}^{r} \text{rang } V^i,$$

(voir [Mi]).

Dans [G3], M. Gromov propose une notion de "cône tangent" pour un espace métrique. Il introduit une topologie, dite de Hausdorff-Gromov, sur les espaces métriques pointés. Le cône tangent en x à (X, d) est la limite—lorsqu'elle existe—des dilatés $(X, \varepsilon^{-1}d)$ pointés en x quand $\varepsilon \to 0$.

Dans le cas d'une variété riemannienne, les cônes tangents sont des espaces euclidiens. J. Mitchell a montré que, pour une métrique de Carnot-Carathéodory telle que les V^i soient des sous-fibrés, les cônes tangents sont des "groupes de Carnot", [Mi].

1.2. *Définition.* Un *groupe de Carnot* est la donnée d'un groupe de Lie nilpotent simplement connexe N et d'une dérivation α sur l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$

ayant la propriété suivant: le sous-espace $V^1 = \ker(\alpha - 1)$ engendre l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$.

Plus concrètement, posons $V^{i+1} = [V^1, V^i]$. Ces sous-espaces forment une graduation de $\mathcal{N}$, i.e.,

$$\mathcal{N} = \sum_{i=1}^{r} V^i,$$
$$[V^i, V^j] \subset V^{i+j},$$

et on a

$$\alpha = i \text{ sur } V^i.$$

Par conséquent, un groupe de Carnot est un groupe de Lie gradué, qui est engendré par ses éléments de degré un.

A toute norme sur V^1 correspond une métrique de Carnot-Carathéodory sur N, invariante à gauche, et pour laquelle l'automorphisme $e^{t\alpha}$ est une homothétie de rapport e^t.

Les groupes de Carnot s'introduisent naturellement en analyse, voir [Go], et constituent une classe d'exemples digne d'intérêt en contrôle optimal, voir [Br].

1.3. *Différentiabilité.* Dans notre esprit, un groupe de Carnot est une généralisation immédiate d'un espace vectoriel, muni de ses translations et de ses homothéties (celles-ci étant engendrées par la dérivation identité).

Pour des applications continues entre groupes de Carnot, on peut parler de différentiabilité. Soit $f\colon N \to N'$ une application continue définie sur un voisinage de l'origine 0, et telle que $f(0) = 0$. On dira que f est différentiable à l'origine si les applications

$$e^{t\alpha'} \circ f \circ e^{-t\alpha}$$

convergent uniformément sur tout compact lorsque t tend vers l'infini. La limite est appelée la *différentielle* de f en 0, et notée $Df(0)$. Utilisant les translations de N et N', on définit la différentiabilité en un point quelconque.

Lorsqu'on varie la norme sur V^1, la métrique de Carnot-Carathéodory reste bilipschitzienne à elle-même. On peut donc parler d'applications lipschitziennes et de transformations quasiconformes entre groupes de Carnot sans faire référence à une métrique de Carnot-Carathéodory particulière. On rappelle en 6.1 la définition d'une transformation quasiconforme entre espaces métriques.

Notre résultat principal est une généralisation du théorème de Rademacher-Stepanov [RS].

2. Théorème. *Soient N, N' deux groupes de Carnot. Toute application lipschitzienne (resp. homéomorphisme quasiconforme) entre un ouvert de N et*

un ouvert de N' est différentiable presque partout. La différentielle est presque partout un homomorphisme de groupes qui entrelace les dérivations α et α'.

1.4. *Absolue continuité.* Pour un homéomorphisme, la différentielle est-elle presque partout un isomorphisme? Comme dans le cas classique, c'est vrai pour les homéomorphismes *absolument continus*, i.e., qui préservent les ensembles de mesure de Haar nulle. Les homéomorphismes lipschitziens le sont. Les homéomorphismes quasiconformes aussi, sauf en dimension un. Dans le cas euclidien, c'est un résultat de F.W. Gehring [Ge] dont la démonstration s'étend sans changement aux groupes attachés aux autre espaces symétriques de rang un, [M2]. Toutefois, une preuve nouvelle est nécessaire pour le cas général, voir 7.3.

Noter que les résultats ci-dessus s'étendent aux variétés munies de métriques de Carnot-Carathéodory. Nous ne donnons la démonstration que dans le cas des groupes, c'est déjà suffisamment technique. Le cas général ne s'y ramène pas: sauf dans le cas riemannien, une métrique de Carnot-Carathéodory n'est pas localement bilipschitzienne à son cône tangent.

1.5. *Fin de la preuve.* Voici comment, grâce au théorème 2, on peut étendre des difféomorphismes aux homéomorphismes le raisonnement esquissé au début de cette section.

Soit $X = G/K$ un espace symétrique de rang un, et $G = KAN$ la décomposition d'Iwasawa du groupe simple G. On peut voir A comme un groupe à un paramètre d'automorphismes du groupe nilpotent N, engendré par une dérivation α.

On a fait allusion plus haut au fait que la sphère à l'infini $\partial X = G/MAN$ portait un champ de plans invariant Q. Pour toute métrique de Carnot-Carathéodory d attachée à ce champ, le cône tangent en tout point de $(\partial X, d)$ est le groupe de Carnot (N, α).

D'après le théorème 2, une transformation quasiconforme f de ∂X admet presque partout une différentielle Df. C'est un automorphisme de N qui commute à α. Lorsque $G = \mathrm{Sp}(n, 1)$, $n \geq 2$ (resp. $G = F_4^{-20}$), le groupe $\mathrm{Aut}_\alpha(N)$ des automorphismes qui commutent à α s'identifie à $C\,\mathrm{Sp}(n-1)\mathrm{Sp}(1)$ (resp. à $C\,\mathrm{Spin}(7)$, proposition 10.1); en particulier, les applications quasiconformes sont automatiquement 1-quasiconformes (corollaire 11.2), et un argument global dû à G.D. Mostow [M1] permet de conclure qu'elles proviennent d'isométries.

Notre méthode permet d'obtenir un résultat partiel relatif aux quasiisométries entre groupes nilpotents.

1.6. *Quasiisométries entre groupes nilpotents.* Ce problème est tiré de [G5]. Sur un groupe discret Γ, de type fini, on peut construire une famille de distances d_Γ, dites "distances algébriques". A quasiisométrie près, la distance d_Γ ne dépend que de la structure du groupe Γ. Inversement, le problème se pose de savoir si deux groupes discrets quasiisométriques sont isomorphes, ou, au moins, commensurables (i.e., l'un contient un sous-groupe d'indice fini, isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de l'autre.) C'est le cas lorsque l'un des groupes est abélien. Lorsque Γ est nilpotent, on sait associer à Γ un groupe de Lie nilpotent $\Gamma \otimes \mathbf{R}$ (construction de A. Malcev [Mv]), et le groupe de Lie gradué associé $\mathrm{gr}(\Gamma \otimes \mathbf{R})$. L'espace métrique (Γ, d_Γ) possède un cône tangent à l'infini, qui est le groupe de Carnot $\mathrm{gr}(\Gamma \otimes \mathbf{R})$ muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory ([G2], [P1]). Une quasiisométrie entre groupes discrets donne naissance à un homéomorphisme bilipschitzien entre les cônes tangents. Il vient:

3. Théorème. *Si deux groupes discrets* Γ *et* Γ', *nilpotents, de type fini, sont quasiisométriques, alors les groupes de Lie gradués associés* $\mathrm{gr}(\Gamma \otimes \mathbf{R})$ *et* $\mathrm{gr}(\Gamma' \otimes \mathbf{R})$ *sont isomorphes.*

En dimension inférieure ou égale à 5, cela entraîne que Γ et Γ' sont commensurables. Ce n'est plus vrai dès la dimension 6. De même, deux groupes de Lie nilpotents quasiisométriques ont même gradué associé. Pour la classe des groupes gradués, on obtient donc un renforcement de résultats de E. Wilson [W].

1.7 *Organisation de l'article.* La partie A contient la démonstration du théorème 2. Le théorème 1 est démontré en B. Un schéma de démonstration est donné en 8. Dans la partie C, on remarque que la rigidité observée pour l'espace hyperbolique quaternionien s'étend à d'autres espaces homogènes à courbure négative (théorème 4).

Je tiens à remercier M. Gromov, qui a dirigé ce travail, proposant le théorème 1 comme objectif. Grâce à A. Bellaiche, j'ai mieux compris pourquoi les différentielles sont des homomorphismes de groupes. Le théorème 3 répond à une question d'A. Katok, et je suis reconnaissant à R. Spatzier qui m'a stimulé par son insistance. Je suis heureux de remercier aussi Y. Benoît pour ses exemples d'algèbres de Lie, F. Ducloux pour les représentations de Spin(7), O. Debarre pour les automorphismes des hypersurfaces et S. Rickman qui m'a familiarisé avec les transformations quasiconformes. Enfin, je remercie D. Sullivan, A. Korányi et H. Reimann pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

A. Différentiabilité

2. Schéma de démonstration du théorème 2

Comme dans la démonstration de Rademacher-Stepanov, on se ramène, par un non-sens abstrait (corollaire 3.3), au cas où $\dim N = 1$, i.e., à la différentiabilité des courbes rectifiables. Celle-ci (proposition 4.1), résulte essentiellement du théorème classique de Lebesgue sur la différentiabilité presque partout des fonctions croissantes d'une variable réelle, jointe à une estimation de la vitesse à laquelle une courbe horizontale d'un groupe de Carnot s'éloigne du plan V^1 (proposition 4.7).

Dans le cas des homéomorphismes quasiconformes, il faut montrer que "presque toute" courbe rectifiable est envoyée sur une courbe rectifiable. Ce résultat, dû à G.D. Mostow [M2] dans le cas particulier des groupes liés aux espaces symétriques de rang un, fait l'objet de la section 6.

3. Réduction à la dimension un

3.1. *Définition.* Soient X, X' des espaces métriques, et f une application de X dans X'. La *dilatation locale* de f, notée Lip_f, est définie par

$$\mathrm{Lip}_f(x) = \limsup_{y \to x} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

3.2. Proposition. *Soient N, N' des groupes gradués. Soit f une application d'un ouvert de N dans N', dont la dilatation locale Lip_f est presque partout finie. Soient μ, $\nu \in N$. On suppose que, pour presque tout $x \in N$, les limites*

$$D_\mu f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\mu)\big),$$

$$D_\nu f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\nu)\big)$$

existent. Alors, pour tout ω de la forme $\omega = e^{a\alpha}\mu e^{b\alpha}\nu$, et pour presque tout $x \in N$, la limite

$$D_\omega f(x) = \lim_{t \to +\infty} e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\omega)\big),$$

existe et vaut $e^{a\alpha'} D_\mu f(x) e^{b\alpha'} D_\nu f(x)$.

On fixe des métriques de Carnot-Carathéodory d et d' sur N et N'. On note $\mathscr{H}^p$ la mesure de Haar sur N (qui coincide avec la mesure de Hausdorff p-dimensionnelle; cf. 1.1). Si $D_\mu f(x)$ existe, alors, pour tout a, $D_{e^{a\alpha}\mu} f(x)$ existe, donc on peut supposer que $\omega = \mu\nu$ avec $d(1, \mu) = 1$.

D'après Egoroff, Lusin (voir [Ru]) il existe, pour tout $\tau > 0$ un fermé $F \subset N$ tel que $\mathscr{H}^p(N \setminus F) < \tau$ et

(i) $D_\mu f(x)$ et $D_\nu f(x)$ existent pour tout $x \in F$,
(ii) $x \mapsto D_\nu f(x)$ est continue sur F,
(iii) $e^{t\alpha'}(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\nu))$ tend vers $D_\nu f(x)$, uniformément pour $x \in F$.

Si on savait que, pour tout t, $xe^{t\alpha}\mu \in F$, ce serait fini. En effet,

$$e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\omega)\big) = (1)(2)(3)$$

où

$$(1) = e^{t\alpha'}\left(f(x)^{-1}f(xe^{-t\alpha}\mu)\right)$$

tend vers $D_\mu f(x)$ d'après (i),

$$(2) = e^{t\alpha'}\left(f(xe^{-t\alpha}\mu')^{-1}f(xe^{t\alpha}\mu e^{-t\alpha}\nu)\right)\left(D_\nu f(xe^{t\alpha}\mu)\right)^{-1}$$

tend vers 1 d'après (iii), et

$$(3) = D_\nu f(xe^{t\alpha}\mu)$$

tend vers $D_\nu f(x)$ d'après (ii).

On n'a pas $xe^{t\alpha}\mu \in F$ en général, mais, si x est un point de densité de F, i.e., si

$$\frac{\mathscr{H}^p(B(x,r)\setminus F)}{\mathscr{H}^p B(x,r)}$$

tend vers 0 avec r, alors il y a un point de F très près de $xe^{t\alpha}\mu$. Posons $\lambda =$ distance de $xe^{t\alpha}\mu$ à F, et notons $xe^{t\alpha}\mu'$ un point où cette distance est atteinte. Comme $B(xe^{t\alpha}\mu, \lambda) \cap F \neq \varnothing$, on a

$$\frac{\mathscr{H}^p(B(x,e^{-t}+\lambda)\setminus F)}{\mathscr{H}^p B(x,e^{-t}+\lambda)} \geq \frac{\mathscr{H}^p B(xe^{-t}\mu,\lambda)}{\mathscr{H}^p B(x,e^{-t}+\lambda)}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{e^{-t}} + \lambda\right)^p,$$

donc $e^t\lambda$ tend vers 0, i.e., μ' tend vers μ lorsque t tend vers $+\infty$.

On écrit alors

$$e^{t\alpha'}\left(f(x)^{-1}f(xe^{-t\alpha}\omega)\right) = (1)(2)(3)(4)(5)$$

où

$$(1) = e^{t\alpha'}\left(f(x)^{-1}f(xe^{-t\alpha}\mu)\right)$$

tend vers $D_\mu f(x)$ d'après (i),

$$(2) = e^{t\alpha'}\left(f(xe^{-t\alpha}\mu)^{-1}f(xe^{-t\alpha}\mu')\right),$$

$$(3) = e^{t\alpha'}\left(f(xe^{-t\alpha}\mu')^{-1}f(xe^{t\alpha}\mu' e^{-t\alpha}\nu)\right)\left(D_\nu f(xe^{t\alpha}\mu')\right)^{-1}$$

tend vers 1 d'après (iii),

$$(4) = D_\nu f(xe^{t\alpha}\mu')$$

tend vers $D_\nu f(x)$ d'après (ii),

$$(5) = e^{t\alpha'}\Big(f\big(xe^{-t\alpha}\mu' e^{-t\alpha}\nu\big)^{-1} f\big(xe^{-t\alpha}\mu' e^{-t\alpha}\nu\big)\Big).$$

Supposons f lipschitzienne de rapport M. On a

$$\begin{aligned} d'((2),1) &= e^t d'\big(f(xe^{-t\alpha}\mu), f(xe^{-t\alpha}\mu')\big) \\ &\leq Me^t d\big(e^{-t\alpha}\mu, e^{-t\alpha}\mu'\big) \\ &= Md(\mu, \mu') \end{aligned}$$

tend vers 0.

$$\begin{aligned} d'((5),1) &= e^t d'\big(f(xe^{-t\alpha}\mu' e^{-t\alpha}\nu), f(xe^{-t\alpha}\mu e^{-t\alpha}\nu)\big) \\ &\leq Me^t d\big(e^{-t\alpha}(\mu\nu), e^{-t\alpha}(\mu'\nu)\big) \\ &= Md(\mu\nu, \mu'\nu) \end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ceci montre l'existence de la limite de

$$e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\omega)\big)$$

pour les points de densité x de F, i.e., presque partout sur F.

Si on suppose seulement que la dilatation locale est finie presque partout, il faut encore restreindre F. Comme presque tout point est dans l'un des

$$A_k = \left\{ x \in N | \text{pour tout } y \text{ tel que } d(x,y) \leq \frac{1}{k}, \quad \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x,y)} \leq k \right\},$$

on peut supposer f lipschitzienne sur F, à condition d'enlever un ensemble de petite mesure. □

3.3. Corollaire. *Soit f une application d'un ouvert de N dans N' telle que* $\mathrm{Lip}_f < +\infty$ *presque partout. Soient $v_1, \ldots, v_k$ des générateurs de l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Si, pour presque tout $x \in N$, la courbe*

$$s \mapsto f(x \exp(sv_i))$$

est différentiable presque partout, alors f est différentiable presque partout, et la différentielle $\mu \mapsto D_\mu f(x)$ est un homomorphisme de groupes.

Seule reste à vérifier la convergence uniforme par rapport à μ, à x fixé, de

$$f_t(\mu) = e^{t\alpha'}\big(f(x)^{-1} f(xe^{-t\alpha}\mu)\big)$$

vers $D_\mu f(x)$. Par hypothèse, il existe une combinaison

$$\mu(a_1, \ldots, a_l) = \prod_{j=1}^{l} e^{a_j\alpha} \exp(v_{i_j})$$

qui réalise une submersion propre de $\mathbf{R}^l$ sur N. La démonstration de la proposition 3.2 montre que, à x fixé, la vitesse de convergence de $f_t(\mu)$ vers $D_\mu f(x)$ ne dépend que de $\sup\|a_j\|$ et de la vitesse de convergence de $f_t(v_j)$ vers $D_{v_j} f(x)$. C'est l'uniformité voulue. □

4. Différentiabilité des courbes rectifiables

On va démontrer la propriété suivante.

4.1. Proposition. *Une courbe localement rectifiable c: $\mathbf{R} \to \mathbf{N}$ est différentiable presque partout. Si $\dot{c}(t) \in \mathcal{N}$ est la dérivée ordinaire, alors $\dot{c}(t) \in V^1$ et la différentielle est donnée par*

$$D_\mu c(t) = \exp(\mu \dot{c}(t)), \qquad \mu \in \mathbf{R}.$$

Avant toute chose, remarquons qu'on peut supposer $\mathrm{Lip}_c \leq 1$. En effet, il suffit de reparamétrer c par son abscisse curviligne. Le changement de paramètre est un homéomorphisme h entre intervalles de $\mathbf{R}$, donc presque partout dérivable. Si h est dérivable en s et $c' = c \circ h^{-1}$ est différentiable en $h(s)$, alors c est différentiable en s avec

$$Dc(s) = Dc'(h(s)) \circ \dot{h}(s).$$

Si c' n'est pas différentiable en $h(s)$, c est en généal différentiable en s, malgré tout. En effet, si $E = \{s | c' \text{ non différentiable en } h(s)\}$, $h(E)$ est de mesure nulle, donc, pour presque tout $s \in E$, $h'(s) = 0$. Or h est l'abscisse curviligne, donc $\mathrm{Lip}_c(s) = 0$, i.e., c est différentiable en s, de différentielle constante. Traduisons l'énoncé en exprimant $c(s)$ en coordonnées exponentielles. Posons $c(0) = 1$ et

$$c(s) = \exp\big(\sigma^1(s) + \cdots + \sigma^r(s)\big)$$

où $\sigma^i(s) \in V^i$. La courbe c est différentiable en 0 si et seulement si, pour tout i, la limite

$$\lim_{s \to 0} s^{-i} \sigma^i(s)$$

existe. En fait, on va voir que, pour presque tout s, la dérivée ordinaire $\dot{c}(s)$ est tangente à V^1, donc, si la différentielle existe,

$$\lim_{s \to 0} s^{-1} \sigma^1(s) = \dot{c}(0),$$

$$\lim_{s \to 0} s^{-i} \sigma^i(s) = 0 \qquad \text{pour } i > 1.$$

4.2. *Cas du groupe d'Heisenberg*. Afin de rendre la chose vraisemblable, étudions d'abord le cas du groupe de Heisenberg de dimension 3. Soit X, Y, Z

une base de l'algèbre de Lie vérifiant

$$[X, Z] = [Y, Z] = 0, \quad [X, Y] = Z.$$

Soit V^1 le plan euclidien dont X, Y est une base orthonormée. Soient r, θ des coordonnées polaires dans V^1. La carte $(r, \theta, t) \mapsto \exp(re^{i\theta} + tZ)$ est un système de coordonnées sur presque tout N. La 1-forme invariante ω sur N dont le noyau est le champ de plans invariant à gauche V^1 s'écrit

$$\omega = dt - \tfrac{1}{2}r^2\, d\theta.$$

Soit $c(s)$ une courbe lisse dans N, et posons $c(s) = c(0)\exp(\sigma^1(s) + \sigma^2(s))$. Si sa longueur Carnot-Carathéodory est finie, la courbe c est tangente à V^1, et la composante $\sigma^2(s) = t(s)Z$ est déterminée par σ^1:

$$t(s) = \int_0^{\sigma^1(s)} \frac{1}{2} r^2\, d\theta.$$

Autrement dit, $t(s)$ est l'aire algébrique comprise entre la courbe plane σ^1 et le segment de droite $[0, \sigma^1(s)]$.

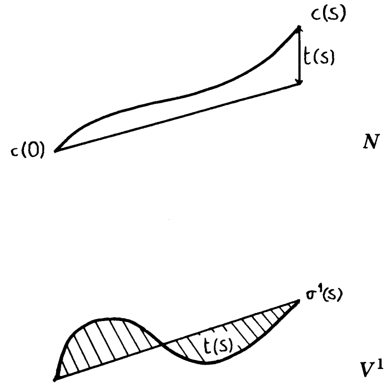

FIGURE 1

Fixant un $v \in V^1$, posons

$$\varepsilon = \sup\left\{ \left\| \frac{\sigma^1(u)}{u} - v \right\| \,\middle|\, 0 < u \leq s \right\}.$$

Par définition, pour $u \leq s$, $\sigma^1(u)$ est contenu dans le secteur plan d'axe v, d'ouverture ε, de rayon $s\,\mathrm{Lip}_c$, donc $t(s)$ est inférieur à l'aire de ce secteur, soit $s^2\varepsilon\,\mathrm{Lip}_c$. On a donc

$$\sigma^2(s) = o(s^2)$$

dès que σ^1 est dérivable en 0. En fait, pour traiter le cas général (courbe c non lisse), on aura besoin d'estimer la variation totale de σ^2; il faut pour cela un peu plus que la simple dérivabilité de σ^1 en 0.

Voici encore des préliminaires techniques utiles à la démonstration de la proposition 4.1. Pour manipuler des courbes dans un groupe de Lie G, nous utiliserons le procédé de *développement*, qui transforme une courbe dans le groupe en une courbe dans son algèbre de Lie, et l'opération inverse *d'intégrale multiplicative*.

4.3. *Développement d'une courbe*. Soit G un groupe de Lie, soit c une courbe: $[0, 1] \to G$ telle que $c(0) = 1$. A chaque subdivision

$$\Sigma = \{0 = t_0 < \cdots t_N = 1\}$$

faisons correspondre le point

$$\sigma_\Sigma = \sum_{k=0}^{N} \log\left(c(t_k)^{-1} c(t_{k+1})\right)$$

dans l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$. Lorsque le pas

$$\|\Sigma\| = \sup\|t_{k+1} - t_k\|$$

tend vers 0, ce point a une limite. En effet, si Σ' est une subdivision plus fine que Σ, avec $t_k = t'_l$ et $t_{k+1} = t'_m$, alors

$$\left\| \sum_{q=l}^{m-1} \log\left(c(t'_q)^{-1} c(t'_{q+1})\right) - \log\left(c(t_k)^{-1} c(t_{k+1})\right) \right\| \leq \text{const. } u_k^2$$

où

$$u_k = \sum_{q=l}^{m-1} \left\| \log c(t_q)^{-1} c(t_{q+1}) \right\|$$

(voir [P1]) d'où

$$\|\sigma_{\Sigma'} - \sigma_\Sigma\| \leq \sum_{k=0}^{N-1} u_k^2$$

qui tend vers 0 avec $\|\Sigma\|$ si la courbe c a une longueur finie (relativement a une métrique riemannienne invariante sur G). On note $\sigma(s)$ la limite des points σ_Σ relatifs à $c_{|[0, s]}$. C'est une courbe dans l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ qui a même longueur que c. Lorsque c est paramétrée par son abscisse curviligne, on a les estimations

$$(*) \qquad \|\sigma(s) - \log c(s)\| \leq \text{const. } s^2,$$

$$(**) \qquad \|\sigma(s) - \sigma_\Sigma(s)\| \leq \text{const. } s\|\Sigma\|.$$

4.4. *Intégrale multiplicative*. C'est le procédé inverse du développement. Etant donnée une courbe rectifiable $\sigma(s)$ dans l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$, d'origine 0, on construit

$$c(s) = \lim_{\|\Sigma\| \to 0} c_\Sigma(s)$$

où Σ est une subdivision de l'intervalle $[0, s]$, et

$$c_\Sigma(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \exp(\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)).$$

De nouveau, si σ est paramétrée par son abscisse curviligne, on a

$$\|\sigma(s) - \log c(s)\| \leq \text{const. } s^2,$$

$$\left\|\log c_\Sigma(s)^{-1} c(s)\right\| \leq \text{const. } s\|\Sigma\| \qquad \text{si } s \leq 1.$$

Montrons que, si G est un groupe de Carnot et la courbe c est rectifiable relativement à une métrique de Carnot-Carathéodory, alors son développement σ est dans V^1. On utilise l'inégalité suivante (qu'on vérifie aisément en utilisant les homothéties $e^{t\alpha}$): pour $v = v^1 + \cdots + v^r \in \mathscr{G}$,

$$(+) \qquad \|v^2 + \cdots + v^r\| \leq \text{const. } d(1, \exp v)^2.$$

Supposons la courbe c paramétrée par son abscisse curviligne. Posons

$$c(s+t) = c(s)\exp(\sigma^1(t) + \cdots + \sigma^r(t)).$$

Combinant les inégalités $(*)$ et $(+)$, on obtient

$$\sigma(s+t) - \sigma(s) = \sigma^1(s) + O(s^2).$$

Ceci montre que la courbe σ, qui est absolument continue, est presque partout tangente à V^1, donc contenue dans V^1. En particulier, on conclut que $\sigma = \sigma^1$ est la projection de c dans $V^1 = N/[N, N]$.

Nous introduisons un dernier outil technique: les aires balayées. Notre but est de montrer que, si une courbe c est rectifiable relativement à une métrique de Carnot-Carathéodory, et si le développement σ est dérivable en 0, alors

$$\lim_{s \to 0} s^{-i} \sigma^i(s) = 0$$

pour $i > 1$. Utilisant le principe de l'intégrale multiplicative, on approche chaque composante $\sigma^i(s)$ par la courbe discrète σ_k^i, où, étant donnée une subdivision Σ de l'intervalle $[0, s]$, σ_k^i est la projection sur V^i de

$$\log \prod_{l=0}^{k-1} \exp(\sigma(t_{l+1}) - \sigma(t_l)).$$

Il s'agit d'estimer la quantité $t_k^{-i} \sigma_k^i$. La formule de Campbell-Hausdorff donne des relations de récurrence. Par exemple,

$$\sigma^1_{k+1} - \sigma^1_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k,$$

$$\sigma^2_{k+1} - \sigma^2_k = \tfrac{1}{2}[\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]$$

etc.... On est amené à étudier la convergence de sommes de Riemann du type

$$\sum_k [\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)].$$

Dans le cas du groupe de Heisenberg de dimension 3, cette somme converge vers l'aire balayée par le rayon vecteur de la courbe c.

4.5. *Aires balayées par une courbe dans une algèbre de Lie.* Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie. On convient de noter $[x, y]_i$ le crochet i-uple $[x, [, \dots, [x, y] \dots]]$ (où x apparaît $i-1$ fois). Soit σ une courbe de longueur finie dans $\mathcal{G}$ (munie d'une norme). Pour toute subdivision $\Sigma = \{0 = t_0 < \cdots < t_N = s\}$, on pose

$$A^i_\Sigma = \sum_{k=0}^{N-1} [\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]_i.$$

Montrons que, lorsque le pas $\|\Sigma\|$ tend vers 0, les A^i_Σ convergent. On peut supposer que σ est paramétrée par son abscisse curviligne. Soit Σ' une subdivision plus fine que Σ, avec $t'_l = t_k$ et $t'_m = t_{k+1}$. Estimons la contribution à $A^i_{\Sigma'} - A^i_\Sigma$ de l'intervalle $[t_k, t_k + 1]$.

Comme l'expression $[x+y, z]_i - [x, z]_i$ est un polynome homogène en x et y, nul en $y = 0$, linéaire en z, on a une estimation

$$\|[x+y, z]_i - [x, z]_i\| \leq \text{const.}\ \|z\| \sum_{q=1}^{i-1} \|y\|^q \|x\|^{i-1-q}.$$

Posant $x = \sigma(t_k)$, $y = \sigma(t'_n) - \sigma(t_k)$, $z = \sigma(t'_{n+1}) - \sigma(t'_n)$, il vient

$$\begin{aligned}&\|[\sigma(t'_n), \sigma(t'_{n+1}) - \sigma(t'_n)]_i - [\sigma(t_k), \sigma(t'_{n+1}) - \sigma(t'_n)]_i\| \\ &\qquad \leq \text{const.}\ \|t'_{n+1} - t'_n\| \sum_{q=1}^{i-1} \|\sigma(t_k)\|^{i-1-q} \|t'_{n+1} - t_k\|^q,\end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \sum_{n=l}^{m-1} [\sigma(t'_n), \sigma(t'_{n+1}) - \sigma(t'_n)]_i - [\sigma(t_k), \sigma(t_k+1) - \sigma(t_k)]_i \right\|$$

$$\leq \text{const.}\ \|t_{k+1} - t_k\| \sum_{q=1}^{i-1} \|\Sigma\|^q t_k^{i-1-q}$$

et enfin

$$\|A^i_{\Sigma'} - A^i_{\Sigma}\| \leq \text{const.} \sum_{q>1} \|\Sigma\|^q \int_0^s t^{i-1-q}\, dt$$
$$\leq \text{const.}\ \|\Sigma\| s(\|\Sigma\| + s)^{i-2}.$$

4.6. *Définition.* La *i*-ième *aire balayée* par le segment $[0, \sigma(t)]$ est la limite

$$\int_0^s [\sigma, d\sigma]_i = \lim_{\|\Sigma\|\to 0} A^i_{\Sigma},$$

où Σ décrit les subdivisions de l'intervalle $[0, s]$.

On a l'estimation

$$\text{(o)} \qquad \left\| A^i_{\Sigma} - \int_0^s [\sigma, d\sigma]_i \right\| \leq \text{const.}\ \|\Sigma\| s(\|\Sigma\| + s)^{i-2}.$$

4.7. Proposition. *Soit σ une courbe dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, paramétrée par son abscisse curviligne. Pour presque tout s,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-i} \int_s^{s+\varepsilon} [\sigma, d\sigma]_i = 0.$$

Etant lipschitzienne (de rapport 1), la courbe $\sigma(s)$ admet presque partout une dérivée (au sens ordinaire) $\dot\sigma(s)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe, d'après Egoroff et Lusin, un fermé $F \subset \mathbf{R}$ tel que

(i) $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}\setminus F) < \varepsilon$,

(ii) $a(\tau) = \sup\{\|(\sigma(s+\tau) - \sigma(s))/\tau - \dot\sigma(s)\| \,|\, s \in F\}$ tend vers 0 avec τ,

(iii) la dérivée $\dot\sigma$ est continue sur F.

Nous montrons que la propriété annoncée est vraie pour tout point de densité de F. Supposons, par exemple, que 0 soit un tel point de densité, et notons

$$b(\varepsilon) = \sup\{\|\dot\sigma(t) - \dot\sigma(0)\| \,|\, t \in F, \|t\| < \varepsilon\}.$$

Soit Σ une subdivision de l'intervalle $[0, \varepsilon]$. Notons K l'ensemble des indices k tels que $[t_k, t_{k+1}] \cap F \neq \varnothing$.

Si $k \notin K$, on majore simplement

$$\|[\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]_i\|$$

par $t_k^{i-1}(t_{k+1} - t_k)$. Posant

$$A^{-K} = \sum_{k\notin K} [\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]_i,$$

il vient

$$\|A^{-K}\| \leq \int_{[0,\, \varepsilon]\setminus F} t^{i-1}\, dt.$$

Notons μ la mesure de l'ensemble $[0, \varepsilon]\setminus F$. Comme la fonction $t \mapsto t^{i-1}$ est croissante, on peut majorer son intégrale sur $[0, \varepsilon]\setminus F$ par son intégrale sur $[\varepsilon - \mu, \varepsilon]$, qui vaut

$$\frac{1}{i}\left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\varepsilon}\right)^i\right)\varepsilon^i.$$

Comme 0 est un point de densité de F, le rapport μ/ε tend vers 0 avec ε, donc $A^{-K} = o(\varepsilon^i)$.

Si $k \in K$, choisissons $u_k \in [t_k, t_{k+1}] \cap F$. Alors

$$\left\|\frac{\sigma(t_{k+1}) - \sigma(u_k)}{t_{k+1} - u_k} - \dot\sigma(u_k)\right\| \leq a(\|\Sigma\|),$$

$$\left\|\frac{\sigma(u_k) - \sigma(t_k)}{u_k - t_k} - \dot\sigma(u_k)\right\| \leq a(\|\Sigma\|),$$

d'où

$$\left\|\frac{\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)}{t_{k+1} - t_k} - \dot\sigma(u_k)\right\| \leq a(\|\Sigma\|).$$

Posant

$$A^K = A^i_\Sigma - A^{-K},$$

$$B = \sum_{k\in K} [\sigma(t_k), \dot\sigma(u_k)]_i (t_{k+1} - t_k),$$

il vient

$$\|A^K - B\| \leq \text{const.} \sum_{k\in K} a(\|\Sigma\|) t_k^{i-1}(t_{k+1} - t_k)$$

$$\leq \text{const.}\ a(\|\Sigma\|)\varepsilon^i.$$

Comme $0 \in F$, on a

$$\left\|\frac{\sigma(t_k)}{t_k} - \dot\sigma(0)\right\| \leq a(t_k) \leq a(\varepsilon),$$

$$\|\dot\sigma(u_k) - \dot\sigma(0)\| \leq b(\varepsilon).$$

Ecrivant

$$[\sigma(t_k), \dot\sigma(u_k)]_i = [\sigma(t_k), [t_k\dot\sigma(0) + \text{erreur}, \dot\sigma(0) + \text{erreur}]]_{i-1},$$

il vient

$$\|[\sigma(t_k), \dot\sigma(u_k)]_i\| \leq \text{const.}\ \|\sigma(t_k)\|^{i-2}\big(t_k b(\varepsilon) + \|\sigma(t_k)\| a(\varepsilon) + t_k a(\varepsilon) b(\varepsilon)\big),$$

d'où

$$\begin{aligned}\|B\| &\leq \text{const.}\ \big(a(\varepsilon) + b(\varepsilon) + a(\varepsilon)b(\varepsilon)\big) \sum_{k=0}^{N-1} t_k^{i-1}(t_{k+1} - t_k)\\ &\leq o(\varepsilon^i)\end{aligned}$$

indépendant de la subdivision.

On a donc majoré A^i_Σ par un $o(\varepsilon^i)$ indépendant de Σ, plus un terme qui disparaît lorsque le pas $\|\Sigma\|$ tend vers 0. On peut conclure que

$$\int_0^\varepsilon [\sigma, d\sigma]_i = o(\varepsilon^i). \qquad \square$$

4.8. *Démonstration de la proposition* 4.1. Soit c une courbe rectifiable dans un groupe de Carnot N, de développement σ. Si toutes les aires balayées satisfont

$$\int_0^\varepsilon [\sigma, d\sigma]_i = o(\varepsilon^i),$$

alors la courbe c est différentiable en 0.

Comme annoncé plus haut, on écrit

$$c(\varepsilon) = c(0)\exp\big(\sigma^1(\varepsilon + \cdots + \sigma^r(\varepsilon)\big),$$

et on approche $\sigma^i(\varepsilon)$ par l'expression σ^i_N, où, étant donnée une subdivision Σ de l'intervalle $[0, \varepsilon]$, σ^i_k est la composante sur V^i de

$$\log \prod_{m=0}^{k-1} \exp\big(\sigma(t_{m+1}) - \sigma(t_m)\big).$$

On montre par récurrence sur i qu'il existe une famille de fonctions ϕ^i_a dépendant d'un paramètre a telle que

(i) ϕ^i_a est croissante,

(ii) la limite $\phi^i(s) = \lim_{a\to 0} \phi^i_a(s)$ existe, et $\lim_{s\to 0} s^{-i}\phi^i(s) = 0$,

(iii) pour tout k, on a

$$\|\sigma^i_k\| \leq \phi^i_{\|\Sigma\|}(t_k).$$

Posons

$$\psi^i(s) = \sup\left\{\left\|\int_0^u [\sigma, d\sigma]_i\right\| \,\middle|\, 0 \leq u \leq s\right\},$$

La fonction ψ^i est croissante, et, par hypothèse,

$$\lim_{s\to 0} s^{-i}\psi^i(s) = 0.$$

La relation de récurrence

$$\sigma_{k+1}^2 = \sigma_k^2 + \tfrac{1}{2}[\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]$$

montre que $\sigma_k^2 = A_k^2$ donc les propriétés (i), (ii) et (iii) sont satisfaites avec $\phi_a^2(s) = \psi^2(s) + Cas$ où C est la constante qui figure dans l'équation (o) du paragraphe 4.6.

En général, la relation de récurrence entre σ_{k+1}^i et σ_k^i peut se mettre sous la forme

$$\sigma_{k+1}^i - \sigma_k^i = [\sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)]_i + P\big(\sigma_k^{j<i}, \sigma(t_k), \sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)\big),$$

où le polynome P, linéaire en $\sigma(t_{k+1}) - \sigma(t_k)$, dépend effectivement des σ_k^j, $1 < j < i$. Il vient

$$\sigma_k^i = A_k^i + \sum_{m=0}^{k-1} P\big(\sigma_m^{j<i}, \sigma(t_m), \sigma(t_{m+1}) - \sigma(t_m)\big),$$

d'où

$$\|\sigma_k^i\| \le \|A_k^i\| + \sum_{m=0}^{k-1} \tilde{P}\big(\|\sigma_m^{j<i}\|, \|\sigma(t_m)\|\big)(t_{m+1} - t_m),$$

où $\tilde{P}$ désigne un polynome à coefficients entiers tous positifs, homogène, i.e.,

$$(-) \qquad \tilde{P}(\lambda^j\phi^j, \lambda t) = \lambda^{i-1}\tilde{P}(\phi^j, t)$$

et

$$\tilde{P}(0, t) = 0.$$

Supposons connus les ϕ_a^j, $j < i$, satisfaisant (i), (ii), (iii). Alors

$$\begin{aligned}\|\sigma_k^i\| &\le \psi^i(t_k) + C\|\Sigma\|t_k(\|\Sigma\| + t_k)^{i-2} + \sum_{m=0}^{k-1} \tilde{P}\big(\phi_{\|\Sigma\|}^{j<i}(t_m), t_m\big)(t_{m+1} - t_m) \\ &\le \phi_{\|\Sigma\|}^i(t_k),\end{aligned}$$

où on a choisi

$$\phi_a^i(s) = \psi^i(s) + \int_0^s \tilde{P}\big(\phi_a^{j<i}(t), t\big)\, dt + Cas(a + s)^{i-2}.$$

Clairement, ϕ_a^i est croissante, donc (i) et (iii) sont satisfaites. D'après $(-)$,

$$t^{-i+1}\tilde{P}\big(\phi_a^{j<i}(t), t\big) = \tilde{P}\big(t^{-j}\phi_a^j, 1\big)$$

qui, d'après l'hypothèse de récurrence, tend vers $\tilde{P}(0, 1) = 0$ avec t. On conclut que $\phi^i(s) = o(s^i)$, ce qui achève la démonstration. □

5. Démonstration du théorème 3

Une application lipschitzienne entre groupes de Carnot satisfait les hypothèses du corollaire 3.3. En effet, la dilatation locale est bornée. D'autre part, le sous-espace V^1 engendre l'algèbre de Lie $\mathscr{N}$, et, pour $v \in V^1$, et tout $x \in N$, la courbe $c(s) = x \exp(sv)$ est rectifiable. Son image par une application lipschitzienne est encore rectifiable, donc presque partout différentiable, d'après la proposition 4.1. On a donc démontré la partie du théorème 2 relative aux applications lipschitziennes.

Soient Γ et Γ' des groupes discrets presque nilpotents. Une quasiisométrie de Γ sur Γ' donne naissance, par passage à la limite, à un homéomorphisme bilipschitzien entre les cônes tangents à l'infini $\mathrm{gr}(\Gamma \otimes \mathbf{R})$ et $\mathrm{gr}(\Gamma' \otimes \mathbf{R})$ (non sens abstrait). Sa différentielle est aussi bilipschitzienne, donc, en presque tout point, c'est un isomorphisme de $\mathrm{gr}(\Gamma \otimes \mathbf{R})$ sur $\mathrm{gr}(\Gamma' \otimes \mathbf{R})$. Ceci achève la preuve du théorème 3.

6. Homéomorphismes quasiconformes at rectifiabilité

Nous allons vérifier maintenant qu'un homéomorphisme quasiconforme entre groupes de Carnot satisfait aussi les hypothèses du corollaire 3.3.

Rappelons d'abord quelques définitions. Lorsque $B = B(x, r)$ est une boule d'un espace métrique, il est commode de noter kB la boule concentrique $B(x, kr)$.

6.1. *Définition.* Soit X un espace métrique. Un *anneau* dans X est un couple $(a, \tilde{a})$ de parties de X tel que $a \subset \tilde{a}$. C'est un *k-anneau* s'il existe une boule B telle que

$$B \subset a \subset \tilde{a} \subset kB.$$

Soient X, X' des espaces métriques, soit η un homéomorphisme de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur lui-même.

Une application $f\colon X \to X'$ est dite *η-quasisymétrique* si f envoie tout k-anneau assez petit de X dans un $\eta(k)$-anneau de X'.

Un homéomorphisme de X sur X' est dit *η-quasiconforme* si f et f^{-1} sont η-quasisymétriques.

On montre d'abord que si deux groupes de Carnot sont localement quasiconformes, alors ils ont même dimension de Hausdorff. L'argument est un avatar de la méthode "longueur-aire". On utilisera plusieurs fois le lemme de recouvrement élémentaire suivant.

6.2 Lemme ([Fe], page 143). *Soit X un espace métrique. Soit $\{B_i, i \in I\}$ un recouvrement de X par des boules. On peut extraire une sous-famille disjointe $\{B_j, j \in J\}$ telle que les boules concentriques $\{3B_j, j \in J\}$ recouvrent encore X.*

Preuve heuristique. Choisir d'abord la plus grande boule, puis la plus grande qui ne la rencontre pas, etc.... . □

6.3 Lemme. *Soit U un ouvert d'un espace métrique X, muni de deux mesures μ et ν. Soit Γ une famille de courbes dans X, munie d'une mesure $d\gamma$. Soit $p > 1$. On suppose que, pour toute boule B de X contenue dans U,*

$$\int_{\{\gamma\in\Gamma \mid \gamma\cap B\neq\varnothing\}} d\gamma \leq \mu\left(\tfrac{1}{3}B\right)^{p-1/p}.$$

Pour chaque boule $B \subset U$, on pose

$$\phi(B) = \nu\left(\tfrac{1}{3}B\right)^{1/p}$$

et on note Φ^1 la mesure 1-dimensionnelle correspondante (construction de Carathéodory, voir ci-dessous). On a alors

$$\int_\Gamma \Phi^1(\gamma)\, d\gamma \leq \nu(U)^{1/p}\mu(U)^{p-1/p}.$$

Rappelons que

$$\Phi^1(\gamma) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \Phi^1_\varepsilon(\gamma)$$

où $\Phi^1_\varepsilon(\gamma)$ est la borne inférieure des sommes

$$\sum_i \phi(B_i)$$

sur les recouvrements de γ par des boules B_i de rayon inférieur à ε ([Fe], page 170).

Partons d'un recouvrement quelconque de U par des boules $\tilde{B}_i = \frac{1}{3}B_i$ contenues dans U, de diamètre inférieur à ε, et appliquons 6.2 pour obtenir un recouvrement $\{B_i\}$ tel que les $\frac{1}{3}B_i$ soient disjointes.

Pour chaque courbe $\gamma \in \Gamma$, notons

$$1_i(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{si } B_i \cap \gamma \neq \varnothing; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \Phi^1_\varepsilon(\gamma) &\leq \sum_i 1_i(\gamma)\phi(B_i) \\ &= \sum_i 1_i(\gamma)\nu(\tilde{B}_i)^{1/p} \end{aligned}$$

d'où, en intégrant et en appliquant l'hypothèse sur μ puis l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \Phi_\varepsilon^1(\gamma)\,d\gamma &\leq \sum_i \left(\int_\Gamma 1_i(\gamma)\,d\gamma\right)\nu(\tilde{B}_i)^{1/p}\\ &\leq \sum_i \nu(\tilde{B}_i)^{1/p}\mu(\tilde{B}_i)^{p-1/p}\\ &\leq \left(\sum_i \nu(\tilde{B}_i)\right)^{1/p}\left(\sum_i \mu(\tilde{B}_i)\right)^{p-1/p}\\ &\leq \nu(U)^{1/p}\mu(U)^{p-1/p}\end{aligned}$$

car les $\tilde{B}_i$ sont deux à deux disjointes. Comme $\Phi_\varepsilon^1(\gamma)$ croît lorsque ε décroît vers 0, on peut passer à la limite. □

6.4. *Notation.* La théorie de la différentiation des mesures peut se faire relativement aux boules des distances Carnot-Carathéodory, voir [S] ou [Fe], page 152 (en effet, il suffit pour cela que, pour toute boule B, $\mathcal{H}^p(2B) \leq$ const. $\mathcal{H}^p(B)$). En particulier, si f est un homéomorphisme entre ouverts de groupes de Carnot de dimension de Hausdorff p et p', on peut définir son *jacobien*

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathcal{H}^{p'}(fB(x,\varepsilon))}{\mathcal{H}^p B(x,\varepsilon)}.$$

La limite existe et est finie presque partout.

6.5 PROPOSITION. *Soient N, N' des groupes de Carnot. Soit f un homéomorphisme quasiconforme entre ouverts de groupes de Carnot N et N'. Alors*

—N et N' ont même dimension de Hausdorff,

—f envoie presque toute orbite d'un champ invariant à *gauche horizontal sur une courbe rectifiable,*

—la dilatation locale Lip_f *est presque partout finie*:

$$(\mathrm{Lip}_f)^p \leq \eta(1)^p f'.$$

Soit U un ouvert d'un groupe de Carnot de dimension de Hausdorff p, $\mu = \mathcal{H}^p$, $v \in V^1$ un champ de vecteurs invariant à gauche horizontal. Considérons la famille Γ des orbites de v. Si ω désigne la forme volume *biinvariante*, la forme $i_v\omega$ est fermée donc basique, elle définit une mesure $d\gamma$ sur l'espace des orbites, invariante par les translations à gauche, homogène de degré $p-1$ sous les homothéties $e^{t\alpha}$. Quitte à multiplier ω par une constante, on a donc, pour toute boule B contenue dans U,

$$\int_{\{\gamma\in\Gamma|\gamma\cap B\neq\varnothing\}} d\gamma = \mu\left(\tfrac{1}{3}B\right)^{p-1/p},$$

et les hypothèses du lemme 6.3 sont satisfaites.

Soit $f\colon U \to U' \subset N'$ un homéomorphisme entre ouverts de volume fini. Notons $\nu = (f^{-1})_*\mathscr{H}^{p'}$. Soit $B \subset U$ une boule. Si f est η-quasisymétrique, il existe une boule B' de N' telle que

$$B' \subset f\left(\tfrac{1}{3}B\right) \subset f(B) \subset \eta(3)B'.$$

Alors

$$\begin{aligned}\phi(B) &= \nu\left(\tfrac{1}{3}B\right)\\ &= \left(\mathscr{H}^{p'}f\left(\tfrac{1}{3}B\right)\right)^{1/p}\\ &\geq \left(\mathscr{H}^{p'}(B')\right)^{1/p}\\ &\geq \sigma^{p'/p}\mathrm{rayon}(B')^{p'/p}\\ &\geq \left(\frac{\sigma}{\eta(3)}\right)^{p'/p}\mathrm{rayon}(\eta(3)B')^{p'/p}\end{aligned}$$

car il existe une constante σ telle que, pour tout $x' \in U'$ et tout $r > 0$,

$$\mathscr{H}^{p'}(B'(x',r)) \geq (\sigma r)^{p'}.$$

Si les B_i recouvrent γ, les $\eta(3)B_i'$ recouvrent $f(\gamma)$, et on conclut que

$$\Phi^1(\gamma) \geq \left(\frac{\sigma}{\eta(3)}\right)^{p'/p}\mathscr{H}^{p'/p}f(\gamma).$$

Du lemme 6.3, il résulte que l'image par f de presque toute orbite de v a une mesure de Hausdorff p'/p-dimensionnelle finie. En particulier, $p' \geq p$.

Posons, pour $r > 0$ petit,

$$\begin{aligned}L &= \sup\{d(f(x),f(y))|d(x,y) < r\}\\ l &= d(f(x),f(\partial B(x,r))).\end{aligned}$$

Lorsque r tend vers 0, $\mathrm{Lip}_f(x) = \limsup L/r$ et $L/l \leq \eta(1)$. Par conséquent, pour r petit,

$$\begin{aligned}\left(\frac{L}{r}\right)^p &\leq \eta(1)^p\left(\frac{l}{r}\right)^p\\ &\leq \eta(1)^p\frac{\mathcal{H}^p(fB(x,r))}{r^p}.\end{aligned}$$

En presque tout point x, le terme de droite tend vers $\eta(1)^p f'(x)$. □

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

7. Absolue continuité des homéomorphismes quasiconformes

Dans ce paragraphe, on vérifie, que, en dimension > 1, les transformations quasiconformes entre groupes de Carnot préservent les ensembles de mesure nulle. On en déduira que la différentielle est presque partout un isomorphisme de groupes. La méthode utilisée est celle de [Ge], page 377, transcrite dans l'esprit du lemme 6.3.

7.1 Lemme. *On reprend les notations et les hypothèses du lemme* 6.3. *On demande en plus une constante* ρ *telle que, pour toute boule* B, $\mu(2B) \leq \rho\mu(B)$. *On note*

$$E = \left\{\frac{d\nu}{d\mu} \neq 0\right\}.$$

Alors

$$\int_\Gamma \Phi^1(\gamma)\, d\gamma \leq \nu(E)^{1/p}\mu(E)^{p-1/p}.$$

On peut supposer que $\mu(U) < +\infty$. L'hypothèse sur μ garantit que, en presque tout point $x \in U$,

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \lim_{r\to 0}\frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))},$$

([Fe], paragraphe 2.9). Soit K un compact contenu dans $U \setminus E$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout point $x \in K$, choisissons une boule B_x centrée en x, de rayon inférieur à ε, telle que

$$\nu\left(\tfrac{1}{3}B_x\right) \leq \varepsilon^p\mu\left(\tfrac{1}{3}B_x\right).$$

Si $x \notin K$, choisissons une boule B_x de rayon inférieur à ε et ne rencontrant pas K. D'après 6.2, on peut extraire de cette famille un recouvrement par des boules

B_i telles que les $\tilde{B}_i = \frac{1}{3}B_i$ soient deux à deux disjointes. Notons

$$J = \{ i | B_i \text{ est centrée sur } K \}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \Phi_\varepsilon^1(\gamma)\, d\gamma &\le \sum_{i\in J} \phi(B_i)\mu(\tilde{B}_i)^{p-1/p} + \sum_{i\in N\setminus J} \phi(B_i)\mu(\tilde{B}_i)^{p-1/p} \\ &\le \sum_{i\in J} \varepsilon\mu(\tilde{B}_i) + \sum_{i\in N\setminus J} \phi(B_i)\mu(\tilde{B}_i)^{p-1/p} \\ &\le \varepsilon\mu(U) + \nu(U\setminus K)^{1/p}\mu(U\setminus K)^{p-1/p}.\end{aligned}$$

Laissant ε tendre vers 0 et K tendre vers E, on obtient l'inégalité annoncée. □

7.2 Corollaire. *Soient X, X' des espaces métrique munis de mesures μ et ν. Soit $p > 1$ un réel. On suppose qu'il existe des constantes ρ, σ, τ, v telles que, si $B \subset X$ et $B'(x', r) \subset X'$ sont des boules,*

$$\mu(2B) \le \rho\mu(B)$$

et

$$(\sigma r)^p \le \nu(B'(x', r)) \le (\tau r)^p.$$

Soit Γ une famille de courbes dans X, munie d'une mesure $d\gamma$. On suppose que, pour toute boule B de X,

$$v\mu(B)^{p-1/p} \le \int_{\{\gamma\in\Gamma | \gamma\cap B \ne \varnothing\}} d\gamma \le \mu(B)^{p-1/p}.$$

Alors pour tout homéomorphisme quasiconforme f: $X \to X'$, la mesure $f_*\mu$ est absolument continue par rapport à ν.

Comme f est quasisymétrique, pour toute courbe $\gamma \subset X$, on a (notations du Lemme 6.5)

$$\Phi^1(\gamma) \ge \frac{\sigma}{\eta(3)}\mathscr{H}^1 f(\gamma).$$

Soit $x \in X$ et $r > 0$. Comme f^{-1} est quasisymétrique, il existe une boule B centrée en x telle que

$$\eta(2)^{-1}B \subset f^{-1}B'(f(x),r) \subset f^{-1}B'(f(x),2r) \subset B.$$

Si la courbe γ rencontre $\eta(2)^{-1}B$ mais n'est pas contenue dans B, son image $f(\gamma)$ relie $B'(f(x), r)$ au complémentaire de $B'(f(x), 2r)$, donc sa longueur est au moins égale à r, et

$$\Phi^1(\gamma) \ge \frac{\sigma}{\eta(3)}r.$$

On applique le lemme 7.1 à l'ouvert B, muni des mesures μ et $(f^{-1})_*\nu$, à la famille de courbes

$$\Gamma(B) = \left\{\gamma \in \Gamma | \gamma \cap \eta(2)^{-1}B \neq \varnothing\right\}.$$

Il vient

$$r\frac{\sigma}{\eta(3)}\int_{\Gamma(B)} d\gamma \leq \nu(f(B))^{1/p}\mu(E \cap B)^{p-1/p}.$$

Comme f est quasisymétrique, il existe une boule $B' \subset X'$ telle que

$$B' \subset f\left(\eta(2)^{-1}B\right) \subset f(B) \subset \eta \circ \eta(2)B',$$

d'où

$$\nu(f(B))^{1/p} \leq \nu(\eta \circ \eta(2)B')^{1/p} \leq \tau\eta \circ \eta(2)r$$

car $B' \subset B(f(x), r)$.

Or

$$\int_{\Gamma(B)} d\gamma \geq v\mu(B)^{p-1/p}.$$

Combinant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\mu(E \cap B)}{\mu(B)} \geq \text{const.}^{1/p-1}$$

où la constante ne dépend que des constantes figurant dans l'énoncé, et de la fonction η.

Si $p > 1$, cette inégalité empêche x d'être un point de densité de $X \setminus E$. On conclut que le jacobien f' de f est presque partout non nul. Pour tout $A \subset X$, on a en général l'inégalité

$$\nu(f(A)) \geq \int_A f'\, d\mu;$$

si $\nu(f(A)) = 0$, f' s'annule presque partout sur A, donc $\mu(A) = 0$, c'est l'absolue continuité annoncée. □

7.3 PROPOSITION. *Si f est un homéomorphisme quasiconforme entre ouverts de groupes de Carnot de dimension différente de un, alors f est absolument continu, et sa différentielle est presque partout un isomorphisme de groupes.*

Les hypothèses du corollaire 7.2 sont satisfaites, comme on l'a vu en 6.5.

En presque tout point, la différentielle $Df(x)$ existe et le jacobien $f'(x)$ est non nul. Soit x un tel point. Posons

$$f_t(\mu) = e^{t\alpha'}\left(f(x)^{-1}f\left(xe^{-t\alpha}\mu\right)\right).$$

Par hypothèse, les f_t convergent uniformément vers $Df(x)$. Par conséquent, si B désigne la boule unité du groupe,

$$Df(x)(B) \supset \bigcap_{T\to+\infty} \bigcup_{t>T} f_t(B).$$

Si $Df(x)$ n'est pas surjective,

$$\begin{aligned} 0 = \mathscr{H}^p(Df(x)(B)) &\geq \lim_{t\to+\infty} \mathscr{H}^p f_t(B) \\ &= \lim_{t\to+\infty} e^{tp}\mathscr{H}^p f\big(B(e^{-t})\big) = f'(x). \end{aligned}$$ □

L'étape suivante dans l'étude de la régularité des transformations quasiconformes est la propriété dite *ACL*, absolue continuité le long de presque toute "droite". Dans [M2], cette propriété est établie avant l'absolue continuité, mais la preuve repose sur l'existence, dans la sphère à l'infini d'un espace symétrique de rang un, d'une famille de courbes très particulière (je remercie U. Hamenstädt de me l'avoir signalé).

B. Fuglede ([F]) a montré plus généralement qu'un homéomorphisme quasiconforme de l'espace euclidien est absolument continu sur "presque toute courbe", i.e., sauf sur une famille de courbes de module nul. On va démontrer directement un résultat voisin, où intervient la notion de module grossier introduite dans [P3].

7.4. *Définition.* Soit X un espace métrique. Une partie $a \subset X$ est une k-boule si (a, a) est un k-anneau (défini en 6.1), i.e., s'il existe une boule B telle que $B \subset a \subset kB$.

Soit ϕ une fonction positive sur l'ensemble des parties de X. Pour $l \geq 1$, une nouvelle fonction sur les parties de X est obtenue en posant

$$\tilde{\phi}_l(a) = \sup\{\phi(\tilde{a}) | (a, \tilde{a}) \quad \text{est un } l\text{-anneau}\}.$$

Soit $p \geq 0$. On note $\Phi^{p,k}$ (resp. $\tilde{\Phi}_l^{p,k}$) la mesure obtenue par la construction de Carathéodory en sommant ϕ (resp. $\tilde{\phi}_l$) sur les k-boules.

Soit Γ une famille de courbes dans X, et $p \geq 0$, $k \geq 1$, $l \geq k$ des réels. Le *module grossier* de Γ est la collection des nombres

$$M^{p,k,l,m}(\Gamma) = \inf \tilde{\Phi}_l^{p,k}$$

la borne inférieure étant prise sur les fonctions ϕ telles que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\Phi^{1,m}(\gamma) \geq 1$.

Fixant un réel positif p, on dira qu'une propriété est vraie pour *presque toute courbe* dans X si la famille des exceptions est une réunion dénombrable de sous-familles Γ_n qui ont un module grossier nul au sens suivant: il existe un $k \geq 1$, un $m \geq 1$ et des l arbitrairement grands tels que $M^{p,k,l,m}(\Gamma_n) = 0$.

7.5. *Propriétés.* Les propriétés suivantes sont établies dans [P3]:

—la notion de "presque toute courbe" est invariante par homéomorphismes quasiconformes;

—dans un groupe de Carnot, soit Γ une famille d'orbites d'un champ de vecteurs invariant à gauche horizontal $v \in V^1$. Si $\int_\Gamma d\gamma > 0$, alors

$$M^{p,k,l,m}(\Gamma) > 0$$

pour tous $k \geq 1$, $l > 4k$, $m \geq 1$. En particulier, une propriété satisfaite par presque toute courbe est satisfaite par presque toute orbite de v.

7.6 Lemme. *Soient X, X' des espaces métriques muni de mesures μ et ν. On suppose qu'il existe des constantes σ et τ telles que, pour toutes boules $B \subset X$ et $B' \subset X'$,*

$$\mu(B) \leq (\tau \text{ diamètre } (B))^{1/p},$$

et

$$(\sigma \text{ diamètre } (B'))^{1/p} \leq \nu(B').$$

Soit f: $X \to X'$ un homéomorphisme η-quasisymétrique tel que $(f^{-1})_* \nu$ soit absolument continue par rapport à μ. Alors, la restriction de f à presque toute courbe est absolument continue (relativement aux mesures de Hausdorff 1-dimensionnelles).

On peut supposer que $\nu(X') < +\infty$. Soit γ une courbe rectifiable dans X. Notons ρ la mesure positive $\rho(E) = \mathscr{H}^1 f(E)$ sur γ. Sa décomposition de Radon–Nikodym s'écrit

$$\rho = u\mathscr{H}^1_{|\gamma|} + \rho_s$$

où ρ_s est étrangère à la mesure $\mathscr{H}^1$. Soit Γ_n la famille des courbes γ telles que $\rho_s(\gamma) \geq 1/n$. La famille des courbes sur lesquelles f n'est pas absolument continue est la réunion des Γ_n, et on va montrer que, pour tout l, $m \geq 1$,

$$M^{p,1,l,m}(\Gamma_n) = 0.$$

Soit R un réel positif. Posons $\chi(t) = \max\{1, t/R\}$. Considérons la fonction ϕ définie sur les parties a de U par

$$\phi(a) = \chi\left(\frac{\text{diamètre } f(a)}{\text{diamètre } (a)}\right) \text{diamètre } f(a).$$

Remarquons d'abord que, comme $t \leq R + t\chi(t)$ pour tout $t > 0$, on a

$$\text{diamètre } f(a) \leq R \text{ diamètre } (a) + \phi(a).$$

D'autre part, comme, pour tout $0 < s < t$, $\chi(t)/\chi(s) \leq t/s$, on a

$$\tilde{\phi}_l(a) \leq \eta(l)^2\phi(a). \tag{1}$$

Montrons que pour toute courbe γ dans X et tout intervalle E sur γ,

$$\mathscr{H}^1 f(E) \leq \text{const.}\big(R\mathscr{H}^1(E) + \Phi^{1,m}(E)\big).$$

Soient a_i des m-boules recouvrant E, de diamètre $\leq \varepsilon$, telles que

$$\sum_i \phi(a_i) \leq \Phi^{1,m}(E) + \varepsilon.$$

Par hypothèse, il existe des boules B_i telles que

$$\frac{1}{m}B_i \subset a_i \subset B_i.$$

Ne gardons que celles qui rencontrent E. Comme en 6.2, extrayons du recouvrement $\{3B_i\}$ une sous-famille formée de boules disjointes, telles que les $9B_i$ recouvrent encore E. D'après (1) on a

$$\phi(9B_i) \leq \eta(6m)^2\phi(a_i).$$

Si ε est assez petit, E n'est entièrement contenu dans aucune des $3B_i$. Cependant, il rencontre la boule concentrique B_i. Cela entraîne que

$$\text{diamètre}\,(B_i) \leq \mathscr{H}^1(E \cap 3B_i)$$

d'où

$$\sum_i \text{diamètre}\,(B_i) \leq \mathscr{H}^1(E)$$

et donc (on note $\varepsilon'(\varepsilon)$ un module de continuité uniforme pour f sur γ)

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}^1_{\varepsilon'}(f(E)) &\leq \sum_i \text{diamètre}\, f(9B_i) \\
&\leq \sum_i R\,\text{diamètre}\,(9B_i) + \phi(9B_i), \\
&\leq 9R\mathscr{H}^1(E) + \eta(6m)^2\Phi^{1,m}(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

On vient de montrer que, pour toute courbe γ,

$$\rho_s(\gamma) \leq \eta(6m)^2\Phi^{1,m}(\gamma).$$

Par conséquent, pour tous p, k, l, m, n,

$$M^{p,k,l,m}(\Gamma_n) \leq n^p\eta(6m)^{2p}\tilde{\Phi}_l^{p,1}(X).$$

Au vu de (1), il suffit de montrer que $\Phi^{p,1}(X)$ tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.

Pour $x \in X$, notons

$$\Theta(x) = \limsup_{B \to x} \frac{\nu f(B)}{\mu(B)}.$$

Posons

$$A(t) = \{x \in X | \Theta(x) \geq t^p\}, \qquad \omega(t) = \nu f(A(t)).$$

Comme f est absolument continue, la fonction $\omega(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Fixons $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \notin A(t)$, il existe une boule B_x centrée en x de rayon inférieur à ε telle que

$$\nu f(3B_x) \leq t^p \mu(3B_x);$$

on a alors

$$\phi(3B_x) \leq C \frac{t^2}{R} \nu f(3B_x)^{1/p},$$

où $C = C(\eta, \sigma, \tau)$ ne dépend que des constantes figurant dans l'énoncé.

En effet, il existe une boule B' de X' telle que

$$B' \subset f(3B_x) \subset \eta(1)B',$$

et alors

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\eta(1)} \text{ diamètre } f(3B_x) &\leq \sigma \text{ diamètre } (B') \\ &\leq \nu(B')^{1/p} \\ &\leq \nu f(3B_x)^{1/p} \\ &\leq t\mu(3B_x)^{1/p} \\ &\leq t\tau \text{ diamètre } (3B_x) \end{aligned}$$

et, comme $\chi(t) \leq t/R$,

$$\phi(3B_x) \leq \frac{3\tau\eta(1)^2 t^2}{\sigma^2 R} \nu f(B_x)^{1/p}.$$

De nouveau, (scholie 6.2), on extrait une sous-famille $\{3B_i\}$ qui recouvre

$X \setminus A(t)$, telle que les B_i soient disjointes, on conclut que

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon^{p,1}(X \setminus A(t)) &\leq \sum_i \phi(3B_i)^p \\ &\leq \left(\frac{Ct^2}{R}\right)^p \sum_i \nu f(B_i) \\ &\leq \left(\frac{Ct^2}{R}\right)^p \nu f(X).\end{aligned}$$

Comme $\chi(t) \leq 1$, on a toujours $\sigma\phi(B) \leq \eta(1)\nu f(B)^{1/p}$, et donc

$$\Phi^{p,1}(A(t)) \leq \frac{\eta(1)}{\sigma}\nu f(A(t)),$$

et il vient

$$\Phi^{p,1}(U) \leq \inf_{t>0}\left(\frac{Ct^2}{R}\right)^p \nu f(X) + \frac{\eta(1)}{\sigma}\omega(t)$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

Ceci achève la démonstration. □

Le lemme 7.6 s'applique aux ouverts des groupes de Carnot, et on conclut:

7.7 PROPOSITION. *Une transformation quasiconforme entre ouverts de groupes de Carnot de dimension de Hausdorff* $p > 1$ *est absolument continue sur presque toute courbe.*

L'absolue continuité sur les courbes permet de remplacer un invariant plutôt qualitatif (module grossier) par des invariants plus fins, le module ordinaire ou la capacité. Ceux-ci permettent de contrôler globalement une transformation quasiconforme à partir d'information "presque partout".

7.8 *Définition.* Soit U un ouvert d'un groupe de Carnot. L'espace $ACL^p(U)$ est l'espace des fonctions continues u sur U qui sont absolument continues sur presque toute courbe, et dont la dilatation locale Lip_u est dans $L^p(U)$.

Un *condensateur* est la donnée d'un ouvert C et de deux parties $\partial_0 C$ et $\partial_1 C$ de l'adhérence $\overline{C}$, appelée *armatures*.

La *capacité* du condensateur $(C, \partial_0 C, \partial_1 C)$ est la borne inférieure des intégrales

$$\int_C \mathrm{Lip}_u^p \, d\mathscr{H}^p$$

sur les fonctions $u \in ACL^p(C) \cap C^0(\overline{C})$ telles que $u = 0$ sur $\partial_0 C$ et $u = 1$ sur $\partial_1 C$.

7.9. *Exemple*. Soit N un groupe de Carnot. Munissons V^1 d'une norme euclidienne. Soit $v \in V^1$ un vecteur unitaire, $v^\perp \subset V^1$ l'hyperplan orthogonal, $W = v^\perp \oplus [\mathcal{N}, \mathcal{N}]$. Soit $F \subset W$, et $x \in X$.

La capacité du condensateur "cubique"

$$C = \{\gamma_w(s) | w \in F, 0 \leq s \leq r\}, \qquad \gamma_w(s) = x \exp(w) \exp(sv),$$

$$\partial_0 C = \{\gamma_w(0) | w \in F\}, \qquad \partial_1 C = \{\gamma_w(r) | w \in F\}$$

est égale à $r^{-p} \mathcal{H}^p(C)$.

C'est encore la méthode longueur-aire.

Soit $u \in ACL^p(C)$ une fonction valant 0 et 1 sur les armatures. D'après 7.5, on a, pour presque tout $w \in F$,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^r \frac{\partial}{\partial s} u \circ \gamma_w \, ds \\ &\leq \int_{\gamma_w} \mathrm{Lip}_u \, d\mathcal{H}^1 \\ &\leq r^{p-1/p} \left(\int_{\gamma_w} \mathrm{Lip}_u^p \, d\mathcal{H}^1 \right)^{1/p} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_C \mathrm{Lip}_u^p \, d\mathcal{H}^p &= c^{-1} \int_F \int_{\gamma_w} \mathrm{Lip}_u^p \, d\mathcal{H}^1 \, dw \\ &\geq c^{-1} r^{1-p} \int_F dw, \end{aligned}$$

(où c est le jacobien $d\mathcal{H}^p / dw\, ds$) alors que

$$\mathcal{H}^p(C) = c^{-1} r \int_F dw.$$

L'égalité a lieu pour la fonction $u(y) = d(\pi(y), v^\perp)/r$ où

$$\pi : N \to N/[N, N] = V^1. \qquad \square$$

On obtient d'autres exemples de condensateurs de capacité positive comme suit: si C sépare les armatures de C', alors $\mathrm{cap}(C') \geq \mathrm{cap}(C)$. Par exemple, le condensateur sphérique $C = B(x, R) \setminus B(x, r)$, $\partial_0 C = \partial B(x, r)$,

$\partial_1 C = \partial B(x, R)$ a une capacité non nulle. Par invariance de la capacité sous les homothéties, on voit que cette capacité $\tau(R/r)$ ne dépend que du rapport R/r. Nous n'avons pas besoin de la valeur exacte de τ. Noter qu'il y a d'autres condensateurs dont la capacité est connue exactement; voir [KR2].

7.10. *Définition.* Un homéomorphisme entre ouverts de groupes de Carnot N et N' est dit 1-*quasiconforme* s'il est η-quasiconforme pour une fonction η et si sa différentielle est presque partout une *similitude*, i.e., le produit d'un automorphisme $e^{t\alpha}$ et d'un isomorphisme isométrique de N sur N'.

7.11 LEMME. *Un homéomorphisme 1-quasiconforme f: $U \to V$ entre ouverts d'un même groupe de Carnot de dimension de Hausdorff p induit une isométrie de $ACL^p(U)$ sur $ACL^p(V)$. En particulier, il préserve les capacités.*

En effet, d'après 7.7 et l'invariance quasiconforme du module 7.5, l'espace ACL^p est préservé par les homéomorphismes η-quasiconformes.

Si $Df(x)$ est une similitude, alors $f'(x) = \mathrm{Lip}_f(x)^p$, donc pour tout fonction v sur V,

$$\mathrm{Lip}_{v \circ f}(x)^p \leq \mathrm{Lip}_v(f(x))f'(x)$$

d'où, avec l'absolue continuité de f,

$$\|\mathrm{Lip}_{v \circ f}\|_p \leq \|\mathrm{Lip}_v\|_p. \qquad \square$$

B. Quasiisométries des espaces hyperboliques quaternioniens et Cayley

8. Schema de démonstration du théorème 1

On se ramène à démontrer un résultat relatif à des homéomorphismes quasiconformes. Soit X un espace symétrique non compact de rang un, soit ∂X sa sphère à l'infini. En 9.2, on munit ∂X d'une classe conforme de métriques de Carnot-Carathéodory. Plus précisément, étant donné un point $\infty \in \partial X$, on décrit un analogue de la projection stéréographique; c'est un homéomorphisme de $\partial X \setminus \infty$ sur un groupe de Carnot N muni d'une métrique de Carnot-Carathéodory. Les prolongements des isométries de X sont conformes relativement à cette métrique (paragraphe 9.6), et les quasiisométries de X se prolongent en homéomorphismes quasiconformes de ∂X (paragraphe 9.12).

Il s'agit donc de montrer que les seuls homéomorphismes quasiconformes de ∂X, lorsque X est un espace hyperbolique quaternionien ou Cayley, sont les transformations "conformes", i.e., qui proviennent des isométries de X. D'après la partie A, un tel homéomorphisme admet presque partout une différentielle qui est un automorphisme de N commutant avec l'automorphisme α. On vérifie en

10.1 que le centralisateur de α dans Aut(N) est le produit de $\{e^{t\alpha}\}_{t \in \mathbf{R}}$ par un groupe compact. Autrement dit, un homéomorphisme différentiable de ∂X est automatiquement 1-quasiconforme. Passer de 1-quasiconforme à conforme devrait être l'objet d'une théorème de régularité. A défaut d'un tel résultat, nous reproduisons à la place un argument global dû à G.D. Mostow, [M1], lemme 12.2.

9. Sphère à l'infini

9.1. Pour la description algébrique des espaces symétriques à courbure sectionnelle négative, nous renvoyons à [M2], chapitre 19. Rappelons tout de même leur classification. Il y a les espaces hyperboliques à courbure constante -1, que nous notons $\mathbf{RH}^n$, $n \geq 2$, et des variantes complexe, $\mathbf{CH}^n$, $n \geq 2$, quaternionienne, $\mathbf{HH}^n$, $n \geq 2$, et un plan hyperbolique de Cayley, $\mathbf{CaH}^2$. Ces derniers ont une courbure comprise entre -4 et -1.

9.2. Comme à toute variété riemannienne simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle, on peut attacher à ces espaces une sphère à l'infini (voir [EO]). Un *point à l'infini* est une classe d'équivalence de rayons géodésiques, où deux rayons géodésiques c, c': $[0, +\infty[\to X$ sont équivalents si $d(c(t), c'(t))$ est borné lorsque t tend vers $+\infty$. On montre que étant donné un point x de X, l'application exponentielle qui, à un vecteur unitaire $u \in T_x X$ fait correspondre le rayon géodésique issu de x avec vitesse initiale u, est un homéomorphisme de la sphère unité de $T_x X$ sur l'ensemble des points à l'infini, ou "sphère à l'infini" ∂X. A un point à l'infini est attaché une famille d'*horosphères*: ce sont les trajectoires orthogonales de la famille de rayons géodésiques équivalents. Les *horofonctions* sont les fonctions, constantes sur les horosphères, dont le gradient est unitaire.

9.3. Par définition, les isométries agissent sur la sphère à l'infini. Dans le cas des espaces symétriques de rang un, le groupe d'isométries $G = \mathrm{Isom}(X)$ est transitif sur ∂X, et le stabilisateur d'un point $\infty \in \partial X$ est un sous-groupe parabolique maximal. Notons R le radical résoluble du parabolique maximal G_∞ (en fait, R est un parabolique minimal). Alors $N = [R, R]$ est nilpotent, et simplement transitif sur $\partial X \setminus \infty$.

Lorsque le corps $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$, le groupe N est abélien. Dans les autres cas, l'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ admet une graduation

$$\mathcal{N} = V^1 \oplus V^2$$

où, si on identifie V^1 à $\mathbf{K}^{n-1}$ et V^2 à $\Im m\mathbf{K}$, la structure d'algèbre de Lie se lit

$$[(x_2,\ldots,x_n),(y_2,\ldots,y_n)] = \Im m\Big(\sum_i \bar{x}_i y_i\Big).$$

Les champs de plans V^1 et V^2 ont une interprétation géométrique: les orbites de N dans X sont les horosphères attachées au point à l'infini ∞. Transporté sur une horosphère H, le champ V^2 est tangent aux **K**-*droites*, et chaque vecteur de V^1 engendre avec le vecteur normal un plan totalement réel. Autrement dit, si ν est le vecteur normal à H, on a

$$V^1 = (\mathbf{K}\nu)^{\perp}, \qquad V^2 = TH \cap \mathbf{K}\nu.$$

9.4. Les distributions V^1 et V^2 se manifestent aussi dans le comportement quantitatif des champs de Jacobi sur X. Soit c une géodésique aboutissant en ∞. Alors c est orthogonale aux orbites de N. Notons H_t l'orbite passant par $c(t)$. Si $v \in \mathscr{N}$, notons v_t la valeur au point $c(t)$ du champ de Killing correspondant. Le long de c, le champ v_t est un champ de Jacobi.

Si $v \in V_2$, les v_t sont tangents à la **K**-droite D contenant c, et, comme D est totalement géodésique, de courbure constante -4, la longueur de v_t est

$$\|v_t\| = e^{2t}\|v_0\|.$$

Si $v \in V^1$, les v_t sont orthogonaux à D, le champ v_t est tangent à un plan totalement réel, i.e., une surface totalement géodésique de courbure constante -1, d'où

$$\|v_t\| = e^{t}\|v_0\|.$$

9.5. Notons, pour $t \in \mathbf{R}$, A_t la translation d'une distance t le long de la géodésique c. C'est une isométrie de X qui, avec N, engendre le résoluble R. Elle normalise N et induit sur lui l'automorphisme $e^{t\alpha}$, où α est la dérivation de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la décomposition $\mathscr{N} = V^1 \oplus V^2$. En particulier, N muni de α est un groupe de Carnot. L'application

$$(\nu, t) \mapsto \nu \cdot c(t)$$

est un difféomorphisme de $N \times \mathbf{R}$ sur X. Dans ces coordonnées, on a

$$A_s(n,t) = (e^{s\alpha}n, t+s),$$

et la métrique de X (à courbure comprise entre -4 et -1) s'écrit

$$g = g_t \oplus dt^2,$$

où les métriques invariantes à gauche g_t sur N ont, dans la graduation $V^1 \oplus V^2$, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, les métriques riemanniennes $e^{-2t}g_t$ sur N ne convergent pas vers une métrique riemannienne, mais vers une métrique de Carnot-Carathéodory, notée d_∞.

Comme cette métrique est invariante à gauche sur N, la métrique transportée sur $\partial X \setminus \infty$ par une application

$$n \mapsto n \cdot q, \qquad N \to \partial X \setminus \infty$$

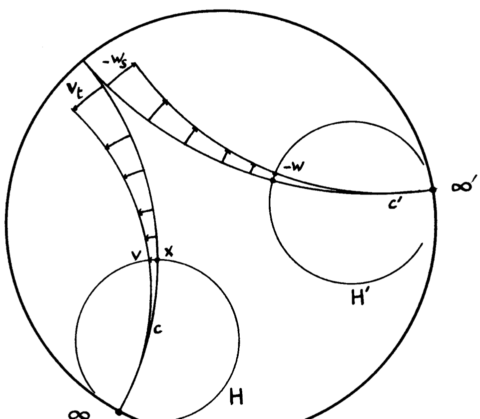

FIGURE 2

ne dépend pas du choix de l'origine $q \in \partial X \setminus \infty$. Noter que, dans la définition de d_∞ intervient le choix d'une origine sur la géodésique c. Un autre choix conduit à une métrique proportionnelle. Cela traduit le fait que l'automorphisme $e^{t\alpha}$ est une homothétie de rapport e^t pour d_∞. Plus généralement,

9.6. LEMME [G4]. *Lorsque le point à l'infini* ∞ *varie, les métriques* d_∞ *sont deux à deux "conformes", i.e., le champ de plan* V^1 *ne dépend pas de* ∞ *et la métrique sur* V^1 *reste conforme à elle-même.*

Fixons deux horosphères H et H' centrées en ∞ et ∞'. Notons π: $X \cup \partial X \setminus \infty \to H$ la projection orthogonale sur H, et λ: $H \to \partial X \setminus \infty$ son inverse. Il s'agit de montrer que

$$\iota = \pi' \circ \lambda \colon H \to H'$$

préserve le champ de plans V^1 (orthogonal aux **K**-*droites*) et est conforme sur ce champ de plans. Nous montrons qu'une approximation ι_t de ι préserve presque V^1 et est presque conforme sur ce champ de plans. Si on note

$$\lambda_t \colon H \to H_t$$

la projection orthogonale sur l'horosphère située à distance t de H, on pose

$$\iota_t = \pi' \circ \lambda_t.$$

Soit $x \in H$, et soit c la géodésique d'origine x normale à H. Soit $v \in V^1 \subset T_x H$. Notons v_t le champ de Jacobi tel que $v_0 = v$ dont la longueur tend vers 0 en $-\infty$ (c'est la restriction à c d'un champ de Killing). Il satisfait, d'après 6.2,

$$\|v_t\| = e^{-t}\|v_0\|.$$

Par définition, $\lambda_{t*}v = v_t$. Notons $w = \iota_{t*}v$, et notons w_s le champ de Jacobi le long de la géodésique c' reliant ∞' à $c(t)$, et telle que $c'(0) \in H'$. Notons $s = d(c(t), H')$. Alors w_s est la projection orthogonale de v_t sur l'horosphère H'_s. Comme la courbure est très négative, lorsque t est grand, l'angle ϕ entre c et c' est petit, donc

$$\left| \frac{w_s}{\|w_s\|} - \frac{v_t}{\|v_t\|} \right| \approx \phi,$$

d'où, comme V^1 et V^2 dépendent différentiablement de la direction,

$$d\left(\frac{w_s}{\|w_w\|}, V^1 \right) \approx \phi.$$

Posons, pour $u \in \mathbf{R}$,

$$w_u = w_u^1 + w_u^2 \in V^1 \oplus V^2.$$

Alors

$$\|w_0^2\|/\|w_0^1\| = e^{-s}\|w_s^2\|/\|w_s^1\| \approx e^{-s}\phi,$$

ce qui montre que ι_t préserve presque le champ de plans V^1. D'autre part,

$$\|w_0^1\| \approx e^{t-s}\|v_0\|$$

lorsque t tend vers l'infini, ce qui montre que, sur V^1, ι est conforme de rapport $e^{\theta-\theta'}$, où θ et θ' désignent les horofonctions s'annulant sur H et H' (remarquer que la différence entre deux horofonctions se prolonge à la sphère à l'infini.) □

9.7. *Prolongement des quasiisométries*. La notion de quasiisométrie utilisée ici remonte à G.A. Margulis [Ma], mais l'idée de prolongement à la sphère à l'infini remonte sans doute à M. Morse [Mo] et certainement à V. Efremovitch [E].

9.8. *Définition*. Soient X, X' des espaces métriques. Un *plongement quasi-isométrique* de X dans X' est une application f: $X \to X'$ telle que

$$-C + \frac{1}{L}d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) + C$$

pour deux constantes L et C.

Une *quasiisométrie* de X sur X' est la donnée de deux plongements quasi-isométriques f: $X \to X'$ et g: $X' \to X$ tels que, pour $x \in X$, $x' \in X'$,

$$d(g \circ f(x), x) \leq C, \quad d(f \circ g(x'), x') \leq C.$$

Une *quasigéodésique* dans X est un plongement quasiisométrique de $\mathbf{R}$ dans X.

9.9. LEMME. *Soit X une variété riemannienne à courbure sectionnelle $K \leq -\mu^2 < 0$. Pour toute quasigéodésique c de X, il existe une géodésique c' contenue dans un voisinage tubulaire de c, et telle que c soit contenue dans un voisinage tubulaire de c'. La largeur $\tau(\mu, L, C)$ de ces voisinages ne dépend que de la courbure et des constantes L et C.*

Pour être complet, nous reproduisons la démonstration, par ailleurs folklorique. Par définition, pour tout $t, t' \in \mathbf{R}$,

$$-C + \frac{1}{L}\|t' - t\| \leq d(c(t), c(t')) \leq L\|t' - t\| + C.$$

On en tire, pour la longueur s de c entre les points $x = c(t)$ et $y = c(t')$,

$$(-) \qquad -C(1 + L^{-2}) + L^{-2}s \leq d(x, y) \leq L^2 s + C(1 + L^2).$$

Fixons deux points x et y sur c. Soit z un point de la portion de c entre x et y, situé à distance maximum T du segment géodésique $\sigma = [x, y]$. Fixons un nombre $R > 0$.

Soient a entre z et x et b entre z et y les premiers points tels que $d(a, \sigma) = d(b, \sigma) = R$. A distance supérieure ou égale à R, la projection sur σ est contractante d'un facteur $\mathrm{ch}(\mu R)^{-1}$ au moins. Les projections a' et b' sur σ satisfont donc

$$d(a', b') \leq \frac{s}{\mathrm{ch}(\mu R)},$$

où s est la longueur de c entre a et b. En particulier,

$$d(a, b) \leq \frac{s}{\mathrm{ch}(\mu R)} + 2R.$$

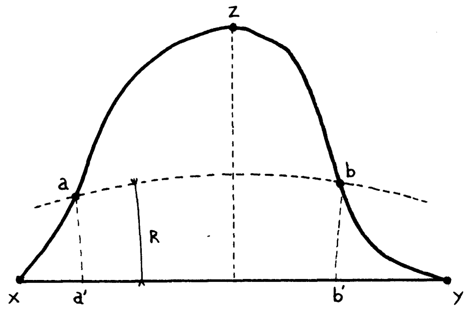

FIGURE 3

D'après $(-)$,

$$d(a,b) \geq L^{-2}s - C(1 + L^{-2}),$$

or

$$\begin{aligned} s &\geq d(a,z) + d(z,b) \\ &\geq d(z,\sigma) - d(a,\sigma) + d(z,\sigma) - d(b,\sigma) \\ &\geq 2T - 2R. \end{aligned}$$

En combinant ces inégalités, il vient

$$T \leq R + \left(L^{-2} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\mu R)}\right)^{-1}\left(R + \frac{C}{2}(1 + L^{-2})\right).$$

On choisit par exemple R tel que $\operatorname{ch} \mu R = 2L^2$, on trouve un majorant τ de T qui ne dépend que de μ, L et C. Enfin, si $t_1 < t_2 < t_3$, on a en particulier

$$d(c(t_2), c([t_1, t_3])) \leq \tau(\mu, L, C),$$

donc l'angle entre les segments géodésiques $[c(t_1), c(t_2)]$ et $[c(t_1), c(t_3)]$ est majoré par const. $Te^{-\mu t_1/2}$. On conclut que les segments convergent vers une géodésique c' telle que

$$d(c', c) \leq \tau(\mu, L, C). \qquad \square$$

9.10. *Remarque*. Ce lemme montre que, dans la définition des points à l'infini, on peut remplacer "géodésique" par "quasigéodésique". Comme les plongements quasiisométriques préservent les quasigéodésiques, ils se prolongent à la sphère à l'infini, et les quasiisométries se prolongent en homéomorphismes entre sphères à l'infini, résultat dû initialement à V. Efremovitch et E. Tichonirova [ET].

De même, on peut définir la topologie de la sphère à l'infini comme suit: une base de voisinages $U_{c,K}$ d'un point à l'infini ∞ est obtenue en posant

$$U_{c,K} = \{\text{quasigéodésiques } c' | d(c \cap K, c' \cap K) \leq 3\tau(\mu, L, C)\}$$

où c décrit les L, C-quasigéodésiques aboutissant en ∞ et K décrit les compacts de X. Il en résulte que, si une suite de plongements uniformément quasiisométriques (i.e., mêmes constantes L et C) f_i: $X \to X'$ converge uniformément sur tout compact de X, alors les prolongements f_i: $\partial X \to \partial X'$ convergent uniformément.

Les deux lemmes suivants achèvent la réduction du théorème 1 à une propriété de la sphère à l'infini. Le premier montre qu'une quasiisométrie est, aux transformations qui déplacent les points d'une distance bornée près, déterminée par son prolongement à la sphère à l'infini.

9.11. LEMME. *Soit f, g: $X \to X'$ deux (L, C)-quasiisométries entre variétés à courbure sectionnelle $K \leq -\mu^2$. Si f et g ont même prolongement à la sphère à l'infini ∂X, alors pour tout $x \in X$,*

$$d(f(x), g(x)) \leq \tau'(\mu, L, C).$$

Soit $\tilde{g}$ un inverse de g au sens de la définition 9.8. En considérant la $(L^2, (L+1)C)$-quasiisométrie $\tilde{g} \circ f$, on se ramène au cas où g est l'identité. Etant donné $x \in X$, soit c la géodésique passant par x, orthogonale au segment $[x, f(x)]$. Par hypothèse, la quasigéodésique $f \circ c$ est asymptote à c, donc, d'après le lemme 9.9, située dans le $\tau(\mu, L, C)$-voisinage de c. On a donc

$$d(x, f(x)) = d(f(x), c) \leq \tau(\mu, L, C). \qquad \square$$

Enfin, dans le cas des espaces symétriques de rang un, on a défini en 9.6 une classe conforme de métriques sur ∂X, donc on peut parler de transformations quasiconformes.

9.12. PROPOSITION. *Si f est une (L, C)-quasiisométrie entre espaces symétriques de rang un, son prolongement à la sphère à l'infini est $H(L, C)$-quasiconforme.*

En fait, c'est un cas particulier d'une propriété générale des variétés à courbure négative bornée; voir [P3]. Dans le cas des espaces symétriques, c'est particulièrement aisé. Considérons la famille $\mathscr{F}$ des quasiisométries de la forme $h \circ f \circ g$ où g, h décrivent les isométries de X (resp. X'). Par Ascoli, la famille $\mathscr{F}$ est "propre" au sens suivant: étant donnés $x \in X$ et une partie compacte K de X', la sous-famille des éléments de $\mathscr{F}$ qui envoient x dans K est précompacte pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X.

Cela entraîne que le prolongement de $\mathscr{F}$ aux sphères à l'infini a la "propriété des trois points"; i.e., si K_1, K_2, K_3 sont trois fermés disjoints de $\partial X'$ et x_1, x_2, x_3 sont trois points distincts de ∂X, alors la sous-famille de $\mathscr{F}$ qui envoie x_i dans K_i est précompacte. En effet (cette idée est due à J. Cheeger, voir [G1]), l'espace des triplets de points distincts de ∂X s'identifie aux 2-repères orthonormés de X (voir Figure 4), qui ne se distingue pas de X du point de vue des quasiisométries.

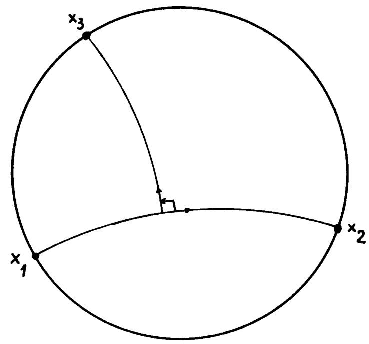

FIGURE 4

Identifions $\partial X \setminus \infty$ (resp. $\partial X' \setminus \infty'$) avec un groupe nilpotent N (resp. N'). Vérifions que la distorsion H_f est bornée en $x \in \partial X \setminus \infty$. Comme N agit sur lui-même par transformations conformes, on peut supposer que x est l'élément neutre. On suppose $f(x)$ distinct de ∞', et là encore, en peut supposer que $f(x)$ est l'élément neutre de N'. Pour $\varepsilon > 0$, soit g l'automorphisme $e^{t\alpha}$ qui envoie le k-anneau $a_k(x, \varepsilon) = (B(x, \varepsilon), B(x, k\varepsilon))$ sur le k anneau unité $a_k(x, 1)$. Fixons un point y de $\partial B\ (x, 1)$. Soit h l'automorphisme $e^{-s\alpha'}$ de N' tel que

$$h \circ f \circ g(y) \in \partial B(f(x), 1).$$

Lorsque ε tend vers 0, $g(y)$ tend vers x, donc h est dilatant au voisinage de $f(x)$. En particulier, $h(f(\infty))$ tend vers ∞'. Posant $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \infty$, $K_1 = f(x)$, $K_2 = a_k(x, 1)$, $K_3 = \partial X' \setminus B(f(x), 2k)$, on voit que, lorsque ε tend vers 0 la famille des $h \circ f \circ g$ est précompacte. En particulier, la famille des ensembles $h \circ f \circ g(\partial B(x, 1))$ est compacte. Elle reste donc comprise entre deux boules $B(f(x), r)$ et $B(f(x), R)$, et cela, uniformément par rapport au point x. □

10. Automorphismes gradués des unipotents maximaux de groupes simples de rang un

Soit $X = \mathbf{K}\mathbf{H}^m$ un espace symétrique non compact de rang un. Nous allons étudier le sous-groupe unipotent maximal N du groupe d'isométrie de X. Nous avons vu que celui-ci s'identifiait à la sphère à l'infini ∂X, mais aussi, à "l'espace tangent" à ∂X: en effet, les différentielles des homéomorphismes de ∂X sont des automorphismes gradués (i.e., commutant avec la dérivation α) de N. Ce qui fait la particularité des cas $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ et $\mathbf{Ca}$, c'est le fait que le groupe d'automorphismes gradués est plus petit que dans les cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$.

10.1. PROPOSITION. *Dans le cas où* $\mathbf{K} = \mathbf{H}$ *ou* $\mathbf{Ca}$, *tout automorphisme gradué de l'algèbre de Lie* $\mathcal{N}$ *est une similitude, i.e., le produit d'une isométrie par un automorphisme* $e^{t\alpha}$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{N}$ est nilpotente de degré 2; elle admet la graduation

$$\mathcal{N} = \mathbf{K}^{m-1} \oplus \mathfrak{Im}\,\mathbf{K}.$$

Le sous-espace $\mathfrak{Im}\,\mathbf{K}$ est dans le centre, et, si

$$x = (x_2, \ldots, x_m),$$
$$y = (y_2, \ldots, y_m) \in \mathbf{K}^{m-1},$$

le crochet de Lie vaut

$$[x, y] = \mathfrak{Im}\left(\sum_{i=2}^{m} x_i \bar{y}_i\right);$$

voir [M2], page 141. On munit le sous-espace $\mathbf{K}^{m-1}$ du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \mathfrak{Re}\left(\sum_{i=2}^{m} \bar{x}_i y_i\right).$$

Un automorphisme gradué de $\mathcal{N}$ est la donnée d'automorphismes $A \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{R}}(\mathbf{K}^{m-1})$ et $B \in \mathrm{Gl}_{\mathbf{R}}(\mathfrak{Im}\,\mathbf{K})$ tels que, si $x, y \in \mathbf{K}^{m-1}$,

$$[Ax, Ay] = B[x, y].$$

Il s'agit de montrer que A est le produit d'une homothétie et d'une isométrie de $\mathbf{K}^{m-1}$.

On connaît déjà un gros sous-groupe du groupe D des automorphismes gradués de N de déterminant 1: il s'agit des automorphismes qui proviennent des isométries de X fixant une géodésique, à savoir $M = \mathrm{Sp}(m-1)\mathrm{Sp}(1)$ (resp. le sous-groupe M de $\mathrm{O(Ca)}$, image de $\mathrm{Spin}(7)$ dans la représentation spinorielle). On va montrer que $D = M$. Montrons d'abord que les algèbres de Lie sont les mêmes, dans le cas des plans hyperboliques.

10.2. SCHOLIE. *La sous-algèbre* $\mathfrak{so}(4)$ *est maximale dans* $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$.

En effet, une sous-algèbre contenant $\mathfrak{so}(4)$ est $\mathrm{SO}(4)$-invariante. Or

$$\mathfrak{sl}(4) = \bigoplus_{0}^{2} \mathbf{R}^4 = S_0^2 \oplus \Lambda^2\mathbf{R}^4$$

où S_0^2 est irréductible sous $\mathrm{SO}(4)$. $\square$

10.3. Scholie. *Les sous-algèbres de Lie de* $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$ *contenant* $\mathfrak{spin}(7)$ *sont* $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$, $\mathfrak{so}(8)$ *et* $\mathfrak{spin}(7)$.

Il suffit de décomposer $\mathfrak{sl}(8)$ en composantes irréductibles sous Spin(7). Notons V la représentation spinorielle de Spin(7). Alors

$$\mathfrak{gl}(8) = V^* \otimes V.$$

La représentation V de Spin(7) est associée au poids fondamental $\bar{\omega}_3$. La représentation $V^* \otimes V$, isomorphe à $V \otimes V$, contient nécessairement une composante irréductible U de poids dominant $2\bar{\omega}_3$. La formule de H. Weyl ([Bo], page 151) donne la dimension $\dim U = 35$. La représentation spinorielle est un homomorphisme de $\mathfrak{so}(7)$ dans $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$. Son image W est donc irréductible et de dimension 21. On connait encore un sous-espace de $\mathfrak{gl}(8)$ invariant sous Spin(7): il s'agit du sous-espace Z de dimension 7 de $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$ formé des éléments de $\mathfrak{Im}\,\mathbf{Ca}$ agissant par multiplication de Cayley, à gauche ou à droite, sur **Ca**. Ce n'est pas la représentation triviale de Spin(7), et, comme Spin(7) n'a pas de représentation non triviale de dimension < 7, Z est isomorphe à la représentation naturelle de SO(7). En particulier, Z est irréductible. La décomposition de $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$ en composantes irréductibles sous Spin(7) est donc

$$\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R}) = U \oplus W \oplus Z$$

de dimensions

$$63 = 35 + 21 + 7.$$

Ceci ne laisse que quatre possibilités pour un sous-espace de $\mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$ contenant le facteur W: $W = \mathfrak{spin}(7)$, $W \oplus Z = \mathfrak{so}(8)$, $W \oplus Z \oplus U = \mathfrak{sl}(8,\mathbf{R})$, et il reste à vérifier que $U \oplus W$ n'est pas une algèbre de Lie. Les matrices symétriques à trace nulle

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfont

$$\frac{1}{2}[a, b] = i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons A (resp. B, I) la matrice 8×8 obtenue en juxtaposant 4 blocs diagonaux identiques à $\frac{1}{2}a$ (resp. b, i). Alors $A, B \in U$ et $[A, B] = I \in Z$, car I est la matrice, dans une base standard des octaves de Cayley, de la multiplication à gauche par un élément de $\mathfrak{Im}\,\mathbf{Ca}$. Ceci montre que $U \oplus W$ n'est pas une sous-algèbre de Lie. $\square$

10.4. *Démonstration de la proposition* 10.1 *dans les cas* $X = \mathbf{HH}^2$ *ou* $\mathbf{CaH}^2$. Les scholies 10.3 et 10.2 montrent que M est la composante neutre de D, donc D normalise M. Comme M n'a pas d'automorphisme extérieur, on a nécessairement $D = Z_D(M)M$. Or M est irréductible dans $\mathbf{K}$ donc $Z_D(M) \subset \{+1, -1\} \subset M$, d'où $M = D$. $\square$

10.5. *Démonstration de la proposition* 10.1 *dans les cas* $X = \mathbf{HH}^m$, $m > 2$. Soit A un automorphisme gradué de $\mathcal{N}$; i.e., $A \in \mathrm{Gl}(\mathbf{H}^{m-1})$ et il existe $B \in \mathrm{Gl}(\Im m\mathbf{H})$, tel que

$$[Ax, Ay] = B[x, y].$$

On remarque que, pour tout $x \in \mathbf{H}^{m-1} \subset \mathcal{N}$, $x \neq 0$, la droite quaternionienne $x\mathbf{H}$ est exactement le bicommutant de x. En effet, pour tous $x, y \in \mathbf{H}^{m-1}$,

$$[x, y] = 0 \Leftrightarrow y \perp x\Im m\mathbf{H},$$

donc le commutant $Z(x)$ contient l'hyperplan quaternionien $P = (x\mathbf{H})^{\perp}$. Comme P est invariant par multiplication par les imaginaires, un élément y qui commute à P est orthogonal à P, donc dans $x\mathbf{H}$.

Il s'ensuit que A préserve les droites quaternioniennes. On utilise alors le théorème fondamental de la géométrie affine (voir par exemple [B], tome 1, page 77): A est semi-$\mathbf{H}$-linéaire, i.e., il existe un automorphisme d'anneau σ de $\mathbf{H}$ tel que, pour $x \in \mathbf{H}^{m-1}$ et $h \in \mathbf{H}$, $A(hx) = \sigma(h)A(x)$. Les automorphismes continus de l'anneau $\mathbf{H}$ sont intérieurs, il vient

$$A \in \mathrm{Gl}(m-1, \mathbf{H})\mathrm{Sp}(1).$$

Quitte à composer A avec un élément de $\mathrm{Sp}(m-1)$, on peut supposer que A fixe une droite quaternionienne $\mathbf{H}x$. On remarque que le crochet $[\ ,\ ]$: $\Lambda^2\mathbf{H}x \to \Im m\mathbf{H}$ est surjectif, par conséquent, la matrice $B \in \mathrm{End}(\Im m\mathbf{H})$ est déjà déterminée par la restriction de A à la droite $\mathbf{H}x$. D'après le paragraphe précédent (cas $X = \mathbf{HH}^2$), on a $A \in CO(\mathbf{H}x)$ d'où $B \in CO(\Im m\mathbf{H})$. Quitte à composer A avec la multiplication à droite par un quaternion non nul, on peut donc supposer que A est $\mathbf{H}$-linéaire et B est l'identité; i.e., A fixe chaque forme symplectique $(x, y) \mapsto \langle x, yi \rangle$, $i \in \Im m\mathrm{H}$. Comme A commute avec i, A est une isométrie, donc $A \in \mathrm{Sp}(m-1)$. On a montré que $A \in \mathrm{Sp}(m-1)\mathrm{Gl}(1, \mathbf{H})$ comme annoncé. $\square$

10.6. *Cas* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *et* $\mathbf{C}$. Dans le cas de l'espace hyperbolique réel, i.e., à courbure sectionnelle constante, le groupe N est abélien, la dérivation α est l'identité, et le centralisateur de α dans N est le groupe linéaire tout entier. D'ailleurs, tout difféomorphisme de la sphère est quasiconforme. Dans le cas de l'espace hyperbolique complexe, i.e., kählérien à courbure sectionnelle holomorphe constante, le groupe N est le groupe de Heisenberg, i.e., $\mathcal{N} =$

$\mathbf{C}^{m-1} \oplus i\mathbf{R}$, et le crochet est donné par la forme symplectique standard de $\mathbf{C}^{m-1}$. Le groupe des automorphismes gradués est donc le groupe conforme symplectique $C\mathrm{Sp}(2m-2, \mathbf{R})$. D'ailleurs, toute transformation de contact est quasiconforme (voir [KR1]).

11. Transformations 1-quasiconformes

11.1. *Définition*. Un homéomorphisme entre ouverts de groupes de Carnot est dit 1-*quasiconforme* s'il est quasiconforme et si sa différentielle est presque partout une similitude.

D'après la partie A, un homéomorphisme quasiconforme de la sphère à l'infini d'un espace symétrique de rang un a, presque partout, une différentielle qui, dans le cas des espaces hyperboliques quaternioniens et Cayley, est automatiquement une similitude (paragraphe 10).

On a donc démontré:

11.2. Corollaire. *Soit N l'un des groupes de Carnot qui décrit la sphère à l'infini d'un espace hyperbolique quaternionien ou Cayley. Un homéomorphisme quasiconforme entre ouverts de N est automatiquement* 1-*quasiconforme.*

Noter que, pour parler de transformations 1-quasiconformes sur un groupe de Carnot, il faut préciser la métrique de Carnot-Carathéodory choisie. Sur la sphère à l'infini d'un espace symétrique de rang un, cela a été fait en 9.6. □

Pour achever la démonstration du théorème 1, il ne reste plus qu'à montrer qu'une telle transformation globale est nécessairement conforme, i.e., provient d'une isométrie de l'espace symétrique. Soit f un homéomorphisme 1-quasiconforme global de la sphère à l'infini d'un espace symétrique de rang un. On va montrer que, après normalisation, f est une isométrie pour une métrique de Carnot-Carathéodory sur un groupe de Carnot. La méthode, empruntée à G.D. Mostow [M1], consiste à estimer la norme de la différentielle, au moyen des capacités définies en 7.8. Rappelons le résultat suivant de la partie A (Lemme 7.11).

11.3. Lemme. *Les capacités sont invariantes par transformations* 1-*quasi conformes*. □

11.4. Lemme. *Un homéomorphisme* 1-*quasiconforme entre ouverts de groupes de Carnot est localement lipschitzien.*

Soit $f\colon U \to V$ un homéomorphisme 1-quasiconforme. Soit $x \in U$. Fixons un $R < d(f(x), \partial V)$. Posons $D = D(x) = d(x, f^{-1}\partial B(f(x), R))$. Pour

$\varepsilon < D$, posons $r = \max\{d(f(x), f(z));\ d(x, z) \le \varepsilon\}$, de façon que $\mathrm{Lip}_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} r/\varepsilon$.

Le condensateur $C = f^{-1}B(f(x), R) \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$ est séparé par le condensateur sphérique $S = B(x, D) \setminus \overline{B}(x, \varepsilon)$, donc sa capacité

$$\operatorname{cap} C \le \operatorname{cap} S = \tau\left(\frac{\varepsilon}{D}\right).$$

Son image $f(C)$ sépare les armatures du condensateur sphérique $S' = B(f(x), R) \setminus \overline{B}(f(x), r)$, d'où

$$\operatorname{cap} f(C) \ge \operatorname{cap} S' = \tau\left(\frac{r}{R}\right).$$

La fonction τ étant croissante, il vient $r/R \le \varepsilon/D$, d'où

$$\mathrm{Lip}_f(x) \le \frac{R}{D(x)}.$$

La fonction D étant continue, la dilatation locale est bornée. En particulier, f est (uniformément) lipschitzienne sur toute courbe droite sur laquelle elle est absolument continue. Comme f est absolument continue sur presque toute courbe, f est localement lipschitzienne. □

Lorsque f est un homéomorphisme global entre groupes de Carnot, on peut faire tendre le rayon R vers $+\infty$. On trouve que f est globalement lipschitzienne, avec $\mathrm{Lip}(f) \le \lim_{\infty} R/D$, qui est en quelque sorte la dilatation locale de f à l'infini. En particulier, si la "différentielle de f à l'infini" est une isométrie, f est une isométrie. Ceci a un sens précis sur la sphère à l'infini d'un espace symétrique.

11.5. Proposition. *Soit X un espace symétrique de rang un, soit ∂X sa sphère à l'infini, munie de la structure conforme définie en* 9.6. *Toute transformation* 1-*quasiconforme globale de ∂X provient d'une isométrie de X.*

Fixons deux points x et ∞ de ∂X, avec f différentiable en ∞. Comme $\mathrm{Isom}(X)$ est deux fois transitif sur ∂X, on peut supposer, quitte à composer f avec des isométries, que f fixe x et ∞. Considérons deux plongements ι_x, ι_∞ du groupe abstrait N dans $\mathrm{Isom}(X)$, fixant x et ∞ respectivement. Ils permettent d'identifier $\partial X \setminus x$ et $\partial X \setminus \infty$ à N par

$$i_x(g) = \iota_x(g) \cdot \infty, \quad i_\infty(g) = \iota_\infty(g) \cdot x.$$

Notons $\{A_t\}$ le groupe à un paramètre des translations le long de la géodésique de x vers ∞, alors

$$i_x \circ e^{t\alpha} = A_t \circ i_x, \quad i_\infty \circ e^{-t\alpha} = A_t \circ i_\infty,$$

d'où

$$Df(\infty) = \lim_{t \to +\infty} A_{-t} \circ f \circ A_t.$$

Remarquons que toute différentielle potentielle, i.e., tout élément $\beta \in Z_{\mathrm{Aut}\, N}(\alpha)$ qui est une similitude, est effectivement la différentielle en ∞ d'une isométrie de X, à savoir $i_\infty \circ \beta \circ i_\infty^{-1}$. On peut donc, quitte à composer f avec des isométries de X, supposer que $Df(\infty)$ est l'identité. Posant $\bar{f} = i_\infty^{-1} \circ f \circ i_\infty$, $e^{-t\alpha} \circ \bar{f} \circ e^{t\alpha}$ tend vers l'identité lorsque t tend vers $+\infty$.

Nous montrons que $\bar{f}$ est une isométrie de la métrique d_∞ sur N introduite en 9.5. Posons $R = e^t$. Lorsque y est l'élément neutre de N, le nombre $D(y)$ introduit dans le lemme 11.4 satisfait

$$\begin{aligned} \frac{D(y)}{R} &= \frac{1}{R} d_\infty\big(y, \bar{f}^{-1} \partial B(\bar{f}(y), R)\big) \\ &= d_\infty\big(y, e^{-t\alpha} \circ \bar{f} \circ e^{t\alpha} \partial B(\bar{f}(y), 1)\big) \end{aligned}$$

qui tend vers 1 lorsque R tend vers $+\infty$. Le lemme 11.4 permet de conclure que, pour $y = 0$ et pour tout $z \in Y$,

$$d_\infty(\bar{f}(y), \bar{f}(z)) \leq d_\infty(y, z).$$

En composant f par des translations (ce qui ne change pas son comportement à l'infini), on obtient la même inégalité pour y quelconque. En raisonnant sur f^{-1}, on conclut que f est une isométrie de (N, d_∞).

Il reste à vérifier qu'une isométrie de d_∞ qui fixe l'élément neutre est un automorphisme de groupe. Appelons "droite" dans N une courbe horizontale dont la projection dans $N/[N, N] = V^1$ est une droite affine. On remarque que les droites sont caractérisées par une propriété métrique: ce sont les seules courbes qui réalisent la distance entre deux quelconques de leurs points. Une isométrie permute donc les droites. Notons $z\Sigma$ la réunion des droites passant par z. Les éléments du centre $[N, N]$ sont caractérisés par la propriété suivante: $z \in [N, N]$ si et seulement si $z\Sigma \cap \Sigma = \varnothing$. Comme $f(z\Sigma) = f(z)\Sigma$, f préserve le centre. Plus généralement, f permute les fibres de la projection π: $N \to N/[N, N]$, donc définit une bijection β de l'espace vectoriel $V^1 = N/[N, N]$. Celle-ci préserve la distance euclidienne $\bar{d}(u, v) = d_\infty(\pi_{-1}(u), \pi_{-1}(v))$. Comme β commute avec les homothéties de V^1, β coincide avec la restriction à V^1 de la différentielle de f, chaque fois qu'elle existe. Ceci prouve que β se prolonge en un automorphisme de N et que, partout où elle existe, la différentielle de $\beta^{-1} \circ f$ est l'identité. Avec la propriété d'absolue continuité sur les courbes, on conclut aisément que $\beta^{-1} \circ f$ est l'identité. □

11.6. *Démonstration du théorème* 1. Soit f une quasiisométrie de l'espace hyperbolique quaternionien $\mathbf{HH}^m$ ou du plan hyperbolique de Cayley $\mathbf{CaH}^2$. D'après 9.12, f a un prolongement quasiconforme à la sphère à l'infini, qui s'identifie à un groupe de Carnot (9.3). Celui-ci est automatiquement 1-quasiconforme (11.2), donc il existe une isométrie $\tilde{f}$ qui a même prolongement que f à la sphère à l'infini (11.5). Enfin, d'après 9.11, f est à distance bornée de $\tilde{f}$; i.e., $d(f(x), \tilde{f}(x))$ est borné en fonction des constantes L et C de quasiisométrie. □

Le théorème 1 est en défaut dans les cas où le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. En effet, on a, dans le cas des espaces symétriques, une réciproque du lemme 9.12.

11.7. PROPOSITION (P. Tukia, [T1]). *Toute transformation quasiconforme de ∂X se prolonge en une quasiisométrie de X, $X = \mathbf{RH}^n$.*

Je ne sais pas étendre ce résultat aux espaces hyperboliques complexes. Cependant, il est clair qu'une transformation de contact à support compact (et, plus généralement, un homéomorphisme bilipschitzien relativement à une métrique de Carnot-Carathéodory) d'un groupe de Heisenberg complexe se prolonge en une quasiisométrie de $\mathbf{CH}^n$. En effet, reprenons les coordonées (p, t) sur $\mathbf{CH}^n = N \times \mathbf{R}$; la métrique s'écrit $g_t \oplus dt^2$ où $e^{-2t}g_t = g_0 + e^{2t}\omega^2$, et ω est une forme de contact. Si f est une transformation de contact à dérivée bornée, on a

$$f^* e^{-2t} g_t \leq \text{const. } g_0 + e^{2t}\text{const. } \omega^2 \leq \text{const.}\, e^{-2t} g_t,$$

donc f est uniformément bilipschitzienne par rapport aux métriques g_t. Posant $\tilde{f}(p, t) = (f(p), t)$ on obtient bien une quasiisométrie qui prolonge f. □

Nous avons mis l'accent sur une propriété spécifique des espaces hyperboliques quaternioniens et Cayley. Cependant, il est clair que, une fois la structure conforme de la sphère à l'infini bien comprise, on généralise aisément certaines propriétés des espaces hyperboliques réels à tous les espaces symétriques de rang un. Par exemple, voici une généralisation d'un résultat de M. Gromov [G1] et P. Tukia [T1]. Un groupe discret, de type fini, qui est quasiisométrique à un groupe de Lie simple G de rang un, est commensurable à un sous-groupe discret cocompact de G.

C. Espaces homogènes à courbure négative

On étend à une large classe d'espaces homogènes à courbure sectionnelle négative les résultats de la partie B. Le théorème 2 permet de classer ces espaces à quasiisométries près. En outre, on montre que la propriété de rigidité mise en évidence dans le théorème 1 est partagée par certains de ces espaces.

12. Espaces homogènes “de type Carnot”

D’après E. Heintze [H], toute variété riemannienne homogène à courbure sectionnelle strictement négative peut être vue comme une métrique invariante à gauche sur un groupe de Lie résoluble R du type suivant: R est un produit semidirect $N \times_\alpha \mathbf{R}$, où N est un groupe de Lie nilpotent et R agit sur l’algèbre de Lie $\mathcal{N}$ par une dérivation α dont toutes les valeurs propres ont une partie réelle positive. La métrique sur $\mathbf{R}$ s’écrit

$$g = g_t \oplus dt^2$$

où

$$g_t = (e^{t\alpha})^* g_0$$

et g_0 est une métrique riemannienne invariante à gauche sur N.

Inversement, si N est un groupe de Lie nilpotent, et α une dérivation à valeurs propres de partie réelle positive, l’extension $N \times_\alpha \mathbf{R}$ admet une métrique invariante à courbure sectionnelle strictement négative. Clairement, cette classe contient les groupes de Carnot définis en 1.2, et en particulier les espaces symétriques de rang un vus comme métriques invariantes sur le parabolique minimal AN.

Nous allons voir que les considérations de la partie B s’étendent sans changement aux espaces homogènes dit *de type Carnot*, i.e., tels que N et α satisfassent aux hypothèses de la définition 1.2.

12.1. *Sphère à l’infini*. Pour tout $p \in N$, la courbe $s \mapsto (p, s)$ est une géodésique du groupe R, et

$$\begin{aligned} d((p,t),(q,t)) &\le d_{g_t}(p,q) \\ &= d_{g_0}\big(e^{t\alpha}(p), e^{t\alpha}(q)\big) \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Les rayons géodésiques $\{p = \text{const.}, t > 0\}$ définissent donc un même point à l’infini, noté ∞. Comme il passe une telle géodésique par chaque point de R, on tient là la totalité des géodésiques aboutissant en ∞. En particulier, à cause de la propriété de visibilité (voir [EO]), l’application $N \to \partial R \setminus \{\infty\}$ qui à p fait correspondre le point à l’infini défini par le rayon géodésique $s \mapsto (p, s)$, $s < 0$, est un homéomorphisme sur le complémentaire de ∞ dans ∂R.

12.2. *Métrique sur la sphère à l’infini*. On munit $\partial R \setminus \{\infty\}$, identifié à N, de la métrique de Carnot-Carathéodory d_∞ attachée au champ de plans invariant V^1, muni de la restriction de g_0. L’action de R sur N est par homothéties de d_∞. La démonstration du lemme 9.12 s’étend immédiatement.

12.3. LEMME. *Une quasiisométrie entre espaces homogènes "de type Carnot" s'étend en un homéomorphisme des sphères à l'infini, qui est localement quasiconforme relativement aux métriques de Carnot-Carathéodory* d_∞.

12.4. COROLLAIRE. *Si deux groupes résolubles "de type Carnot" sont quasiisométriques, alors ils sont isomorphes.*

En effet, d'après le théorème 2, il existe un isomorphisme $N \to N'$ qui entrelace les dérivations α et α'. Il s'étend en un isomorphisme des extensions. □

En fait, le problème général de classification des espaces homogènes à courbure sectionnelle à courbure négative à quasiisométrie près a été résolu par U. Hamenstädt, [Ha].

13. Groupes d'automorphismes gradués de quelques groupes de Carnot

Dans la section 10 on a montré que les algèbres de Lie $\mathcal{N}$ attachées aux espaces hyperboliques quaternioniens et Cayley ont la propriété suivante: le groupe des automorphismes gradués de $\mathcal{N}$ est le produit direct de R par un groupe compact. Cette propriété est partagée par de nombreuses autres algèbres de Lie "de Carnot", i.e., des algèbres de Lie $\mathcal{N}$ munies d'une graduation

$$\mathcal{N} = V^1 \oplus \cdots \oplus V^r,$$

telle que V^1 engendre $\mathcal{N}$.

Je dois les exemples suivants à Y. Benoît [Be]. Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie simple compacte, soit $\mathcal{N}$ l'espace vectoriel des polynomes de degré d, sans terme constant, en une variable T, à coefficients dans $\mathcal{G}$. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ induit une structure d'algèbre de Lie évidente sur $\mathcal{N}$, nilpotente, de rang d. Y. Benoît montre que, lorsque $\mathcal{G}$ n'a pas d'idéal isomorphe à $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ ou à l'une de ses formes réelles, le groupe des automorphismes gradués de $\mathcal{N}$ s'écrit $G_a \times \mathbf{R}$, où $G_a = \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ est le groupe adjoint attaché à $\mathcal{G}$.

Il existe même des algèbres de Lie graduées dont les seuls automorphismes gradués sont les homothéties. Les algèbres *filiformes* graduées (i.e., les dimensions des sous-espaces de la graduation sont les plus petites possibles, à savoir $2, 1, \ldots, 1$) ont été classifiées par M. Vergne [Ve]. En dimension paire, il y a deux telles algèbres, l'une admet des automorphismes gradués unipotents, l'autre n'a pas d'autres automorphismes gradués que les homothéties.

L'objet de la discussion qui suit est d'établir que cette propriété est vraie génériquement pour une algèbre de Lie de rang 2, avec $\dim V^1 = n$, $\dim V^2 = p$, et $2 < p < 2n - 3$.

Une algèbre de Lie "de Carnot" de rang 2, c'est la donnée d'espaces vectoriels V^1 et V^2 et d'une application bilinéaire alternée surjective

$[\cdot,\cdot]$: $\Lambda^2 V^1 \to V^2$. Un isomorphisme entre telles algèbres est la donnée de deux isomorphismes $A \in \mathrm{Gl}(V^1)$ et $B \in \mathrm{Gl}(V^2)$ tels que

$$[\cdot,\cdot]' \circ \Lambda^2 A = B \circ [\cdot,\cdot].$$

La donnée $[\cdot,\cdot]$ équivaut à la donnée d'une application de $(V^2)^*$ dans $\Lambda^2(V^1)^*$. Notons Z son image. Ceci constitue une bijection entre classes de structures $[\cdot,\cdot]$ modulo isomorphisme et sous-espaces de $\Lambda^2(V^1)^*$ modulo $\mathrm{Gl}(V^1)$. L'espace des algèbres de Lie "de Carnot" de rang 2 avec $\dim V^1 = n$ et $\dim V^2 = p$ a donc une structure satisfaisante de quotient d'une variété algébrique par une action algébrique, et on peut parler de propriétés "génériques": celles qui sont satisfaites dans un ouvert de Zariski de la grassmannienne des p-plans de $\Lambda^2 \mathbf{R}^n$.

13.1. PROPOSITION. *On considère les algèbres de Lie "de Carnot" de rang* 2, *de dimensions n et p telles que*

$$n \text{ pair}, \quad n \geq 10, \quad 3 \leq p < 2n - 3.$$

Une telle algèbre générique n'a pas d'autres automorphismes que les homothéties.

On procède en trois étapes.

(1) Soit $(A, B) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R}) \times \mathrm{Gl}(p, \mathbf{R})$ un automorphisme. Par définition d'une algèbre de Carnot, A détermine B uniquement. On montre que, génériquement, B détermine A. Cela résulte du fait que trois formes symplectiques génériques n'ont pas d'automorphismes en commun.

(2) Le sous-groupe $\mathrm{Aut}_\alpha(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Gl}(p, \mathbf{R})$ préserve le *Pfaffien*, un polynome irréductible de degré $n/2$, donc ce groupe est fini si $p < 2n - 3$.

(3) Si l'algèbre de Lie définie par un sous-espace Z de $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ admet un automorphisme d'ordre fini, alors Z est très spécial.

Première étape. Soit $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ tel que $(A, 1)$ soit un automorphisme gradué de $\mathcal{N}$, i.e.,

$$[Ax, Ay] = [x, y] \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Génériquement, au moins une des composantes de $[\cdot,\cdot]$ est une forme symplectique, notée ω. Les autres s'écrivent

$$\omega'(x, y) = \omega(Cx, y), \quad \omega''(x, y) = \omega(Dx, y),$$

pour des $C, D \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$. Comme A préserve ω, ω' et ω'', il commute à C et D. Si $p \geq 3$, pour des matrices génériques C et D, seules les homothéties commutent à la fois avec C et D. On conclut que A est une homothétie, donc $A = 1$. Ceci montre que $\mathrm{Aut}_\alpha(\mathcal{N})$ se plonge dans $\mathrm{Gl}(p, \mathbf{R})$.

Deuxième étape. Sur $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ est défini un polynome $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$-invariant de degré $n/2$, le Pfaffien. Il est irréductible. Le lieu des zéros Σ correspond aux formes alternées dégénérées. D'après le théorème de Darboux, les orbites de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ dans $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ sont au nombre de $n/2$. L'orbite O_r correspondant aux formes de rang r est de dimension

$$\dim O_r = n^2 - \frac{2r(2r+1)}{2} - \frac{(n-2r)^2}{2}.$$

L'hypersurface Σ a donc un lieu singulier de codimension au moins égale à $2n-3$. Si $p \leq 2n-3$, un p-plan générique Z de $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ coupe donc Σ suivant une hypersurface lisse et irréductible Σ_Z. Complexifions la situation. Dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}(Z^{\mathbf{C}})$, le groupe $\mathrm{Aut}_\alpha(\mathscr{N})$ laisse invariante l'hypersurface $\Sigma_{Z^{\mathbf{C}}}$. Elle est lisse, irréductible, de degré $n/2 > p$, donc sa première classe de Chern est négative. En particulier, son groupe d'automorphismes est discret donc fini. On conclut que $\mathrm{Aut}_\alpha(\mathscr{N})$ est fini si $p < n/2$. En fait (je dois cette remarque à O. Debarre), on peut aller jusqu'à $p = 2n-3$. Notant P la restriction du Pfaffien à Z, si Z est lisse, la suite de fonctions $f, \partial P/\partial x_1, \ldots, \partial P/\partial x_p$ est régulière. Il résulte de l'acyclicité du complexe de Koszul (voir dans [GH], page 688 une version locale du résultat nécessaire) que l'équation

$$\sum_{i=1}^{p} l_i \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0, \qquad l_i \in Z^*$$

n'a pas de solution non nulle; i.e., le groupe des transformations linéaires préservant P est fini.

Troisième étape. Supposons que $\mathscr{N}$ admette un automorphisme gradué (A, B) d'ordre fini l. Notons ζ une racine primitive l-ième de l'unité, notons

$$E_i(A) = \{x \in \mathbf{C}^n | Ax = \zeta^i x\}.$$

Les valeurs propres de $\Lambda^2 A$ sont encore des racines l-ièmes de l'unité, et

$$E_k(\Lambda^2 A) = \sum_{i \leq j,\, i+j=k \bmod l} E_i(A) \otimes E_j(A)$$

où l'on a utilisé la convention

$$E_i(A) \otimes E_i(A) = \Lambda^2 E_i(A).$$

Si Z est un p-plan A-invariant dans $\Lambda^2\mathbf{R}^n$, il est somme directe de ses intersections avec les espaces propres de $\Lambda^2 A$; i.e.,

$$Z = \sum_{k=1}^{l} Z_k$$

où

$$Z_k = Z \cap E_k(\Lambda^2 A).$$

Notons $n_i = \dim E_i(A)$ et $p_k = \dim Z_k$. A A fixé, la dimension de l'ensemble des p-plans A-invariants est donc au plus égale à

$$\sum_{k=1}^{l} p_k\left(\sum_{i\le j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j - p_k\right)$$

où on a adopté la convention

$$n_i \cdot n_j = n_i n_j, \qquad \text{si } i \neq j;$$

$$n_i \cdot n_j = \frac{n_i(n_i - 1)}{2}, \qquad \text{si } i = j.$$

L'ensemble des A a une dimension égale à

$$n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2.$$

Par conséquent, l'ensemble des p-plans Z de $\Lambda^2\mathbf{R}^n$ qui admettent un automorphisme d'ordre l est de dimension au plus

$$\mu(l) = \max\left\{n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 + \sum_{k=1}^{l} p_k\left(\sum_{i\le j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j - p_k\right)\right\}.$$

sur les partitions n_i de n et p_k de p telles que au moins deux des n_i soient non nuls. Si $\mu(l) < p(n(n-1)/2 - p)$ on peut conclure qu'un p-plan générique de $\Lambda^2\mathbf{R}^n$ n'a pas d'automorphisme d'ordre l. C'est le cas pour tout l dans les intervalles de valeurs de p et n choisis dans l'énoncé, d'après la scholie suivante. □

13.2 Scholie. *Soit* $n \geq 10$, $p \geq 3$, $p \leq n(n-1)/2 - 3$. *Alors pour toutes partitions* $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$ *et* $\sum_{k=1}^{l} p_k = p$ *telles que, pour tout* k,

$$\sum_{i\le j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j - p_k \geq 0,$$

on a

$$n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 + \sum_{k=1}^{l} p_k\left(\sum_{i\le j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j - p_k\right) \leq p\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right)$$

et l'égalité n'a lieu que si tous les n_i *sont nuls sauf un.*

On remarque d'abord la symétrie entre p_k et $\sum_{i\le j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j - p_k$, qui permet de supposer que $p \leq n(n-1)/4$.

Notons $x = \max\{p_k\}$. On a évidemment

$$\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{l} p_k\left(\sum_{i\leq j,\, i+j=k \bmod l} n_i\cdot n_j - p_k\right) + n^2 + \sum_{i=1}^{l} n_i^2 \\ &\leq x\left(\sum_{k=1}^{l}\ \sum_{i\leq j,\, i+j=k \bmod l} n_i\cdot n_j - p_k\right) + n^2 + \sum_{i=1}^{l} n_i^2 \\ &= x\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right) + n^2 + \sum_{i=1}^{l} n_i^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{(1)} \qquad Y &= p\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right) - X \\ &\geq a = (p-x)\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right) - n^2 + \sum_{i=1}^{l} n_i^2. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \sum_{i<j,\, i+j=k \bmod l} n_i n_j &\leq \frac{1}{2}\sum_{i\neq j,\, i+j=k \bmod l} \frac{n_i^2+n_j^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{2i\neq k \bmod l} n_i^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{i\leq j,\, i+j=k \bmod l} n_i\cdot n_j \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} n_i^2$$

et enfin

$$\begin{aligned} X &= n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 + \sum_{k=1}^{l} p_k\left(\sum_{i\leq j,\, i+j=k \bmod l} n_i\cdot n_j - p_k\right) \\ &\leq \frac{p-2}{2}\sum_{i=1}^{l} n_i^2 + n^2 - \sum_{k=1}^{l} p_k^2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \text{(2)} \qquad Y &= p\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right) - X \\ &\geq b = \frac{p-2}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2\right) - \frac{pn}{2} - p^2 + x^2. \end{aligned}$$

Combinant (1) et (2), on obtient

$$\frac{p}{2}Y \geq \frac{p-2}{2}a + b$$

$$\geq f(x) = \frac{p-2}{2}(p-x)\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right) - \frac{np}{2} - p^2 + x^2.$$

On remarque que, comme $p \leq n(n-1)/4$, la fonction f atteint son minimum en

$$x_0 = \frac{p-2}{4}\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right)$$

qui est supérieur à p. Par conséquent, f est décroissante sur $[0, p]$. En particulier, pour $x \leq p - 1$, on a

$$f(x) \geq f(p-1) = g(p) = -\frac{1}{2}\left(p^2 - p\left(\frac{n^2}{2} - n - 1\right) + n^2 - n - 2\right).$$

C'est une fonction concave de p, maximum en $n(n-1)/4 - n + 2/4$, soit très près de $n(n-1)/4$. En $p = 3$, sa valeur est

$$g(3) = \tfrac{1}{4}(n^2 - 7n - 26)$$

qui est positif dès que $n \geq 10$. On a donc montré que $Y > 0$ si $x \leq p - 1$.

Il reste un cas à traiter: $x = p$; i.e., un seul des p_k est non nul et vaut p. Il s'agit de montrer que

$$n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 + p\left(\sum_{i \leq j,\, i+j=k \bmod l} n_i \cdot n_j\right) < \frac{pn(n-1)}{2},$$

autrement dit, que

$$n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 + \frac{p}{2}\left(\sum_{i=1}^{l} n_i n_{k-i} - \sum_{2i=k \bmod l} n_i\right) < \frac{pn(n-1)}{2}.$$

On remarque que le premier membre ne peut qu'augmenter si, gardant $n_i + n_{k-i}$ constant, on rapproche n_i de n_{k-i}. On peut donc supposer que $n_i = n_{k-i}$ pour tout $i = 1, \ldots, l$. L'inégalité à démontrer devient

$$n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 > \frac{p}{p-2}\left(\sum_{2i \neq k \bmod l} n_i\right).$$

Si l'on peut mettre les n_i en deux paquets de somme c et d telles que $c \geq 2$ et

$d \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 = \sum_{i \neq j} n_i n_j \\ \geq 2cd \geq 4n - 8 > 3n \\ \geq \frac{p}{p-2}\Big(\sum_{2i \neq k \bmod l} n_i\Big), \end{aligned}$$

car $n \geq 10$, $p \geq 3$ et $\sum_{2i \neq k \bmod l} n_i \leq n$.

Sinon, deux cas de figure: tous les n_i valent 1 ou 0, ou alors l'un vaut 1, un autre $n-1$, et les autres 0. Dans le premier cas,

$$\begin{aligned} n^2 - \sum_{i=1}^{l} n_i^2 = n^2 - n > 3n \\ \geq \frac{p}{p-2}\Big(\sum_{2i \neq k \bmod l} n_i\Big). \end{aligned}$$

Dans le second, on revient à l'expression initiale: au pire, la somme

$$\sum_{i \leq j,\, i+j = k \bmod l} n_i \cdot n_j \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

et on a toujours

$$2n + p\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p\right) < p\left(\frac{n(n-1)}{2} - p\right). \qquad \square$$

13.3. *Remarque.* En comparant la dimension de $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{R})$ à celle des 2-plans de $\Lambda^2 \mathbf{R}^n$, on voit que toutes les algèbres de Lie de Carnot avec $p \leq 2$, $p \geq n(n-1)/2 - 2$ ou $n \leq 4$ ont un groupe d'automorphismes gradués non trivial. En revanche, il est probable que le résultat de la proposition 13.1 subsiste lorsque $5 \leq n \leq 9$.

14. Quasiisométries de certains espaces homogènes "de type Carnot"

14.1. *Définition.* La classe (C) est formée des groupes de Lie résolubles R du type suivant:

—Si $N = [R, R]$ désigne le groupe des commutateurs, alors codim $N = 1$.

—Il existe un $r \in R \setminus N$ tel que N muni de l'automorphisme intérieur r soit un groupe de Carnot de rang deux.

—Le centralisateur de r dans $\mathrm{Aut}(N)$ est le sous-groupe à un paramètre engendré par r.

4. Théorème. *Soit R un groupe résoluble de la classe (C), muni d'une métrique invariante à gauche. Toute quasiisométrie de R est à distance finie d'un automorphisme intérieur.*

D'après [H], on peut supposer que la métrique invariante a une courbure sectionnelle strictement négative. Les lemmes 12.3 et 9.11 réduisent le problème à montrer que toute transformation quasiconforme de la sphère à l'infini $\partial R = N \cup \infty$ qui, par exemple, fixe l'origine de N, est une homothétie, i.e., dans le groupe à un paramètre engendré par r. Soit f un tel homéomorphisme. Il admet presque partout une différentielle qui est un automorphisme de N commutant avec r, donc une puissance de r. Pour presque toute droite $\gamma(t) = x\exp(tv)$, $v \in V^1$, la courbe $f \circ \gamma$ est absolument continue, différentiable presque partout. Si π désigne la projection de N sur $N/[N, N] = V^1$, on a presque partout

$$D(\pi \circ f \circ \gamma) = D\pi \circ Df(\gamma(t))(v)$$

est colinéaire à v. Comme $\pi \circ f \circ \gamma$ est absolument continue, cela entraîne que $\pi \circ f \circ \gamma$ est contenue dans une droite de V^1, et que son intégrale multiplicative $f \circ \gamma$ est contenue dans une droite de N. Par continuité, f envoie toute droite dans une droite.

Etant donnés $u, v, \ w \in V^1$, considérons l'ensemble des "quadrilatères" fermés de côtés parallèles à u, v, $-u$, w, i.e., des quadruples de points de N de la forme

$$(x, x\exp(qu), x\exp(qu)\exp(rv), x\exp(qu)\exp(rv)\exp(su),$$
$$x\exp(qu)\exp(rv)\exp(su)\exp(tw)),$$

$q, r, s, t \in \mathbf{R}$, tels que

$$x\exp(qu)\exp(rv)\exp(su)\exp(tw) = x.$$

Cet ensemble de quadruplets est invariant par f.

Pour un groupe de rang deux, on calcule aisément

$$x\exp(qu)\exp(rv)\exp(su)\exp(tw)$$
$$= x\exp\big(qu + rv + su + tw + \tfrac{1}{2}(r(q-s)[u, v] + [qu + rv + su, tw])\big).$$

Si $[u, v] \neq 0$, i.e., si le quadrilatère translaté à l'origine n'est pas contenu dans un sous-groupe abélien de N, le quadrilatère ne peut se refermer que si $q = s$. On a donc montré que, si deux segments de la forme $(x, x\exp(qu))$ peuvent être placés dans un même quadrilatère non abélien, alors ils ont même longueur, et leurs images par f ont même longueur.

Par hypothèse, le groupe N n'est produit direct. On peut donc choisir un $u \in V^1$ tel que l'ouvert

$$U = \{v \in V^1 | [u, v] \neq 0\}$$

soit non vide. Pour $x \in N$, posons

$$a(x) = d(f(x), f(x \exp(u))).$$

Si $v \in U$,

$$a(x \exp(u)\exp(v)) = a(x)$$

car $(x, x \exp(u), x \exp(u)\exp(v), x \exp(2u + v), x)$ est un quadrilatère fermé non abélien. Par continuité, cette identité reste vraie pour tout $v \in V^1$. On vérifie aisément que deux points quelconques de N peuvent être reliés par une chaîne de points de la forme $x_{i+1} = x_i \exp(u)\exp(v_i)$, donc la fonction $a = a_u$ est constante. Par conséquent, la fonction

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} a_{su}(x) = \mathrm{Lip}_f(x)$$

est constante aussi. Pour $t = \mathrm{Lip}_f$, la différentielle de $e^{-t\alpha} \circ f$ est presque partout égale à l'identité, donc f est le produit d'une translation à gauche et d'un automorphisme $e^{t\alpha}$ (la propriété d'absolue continuité sur les droites intervient ici). □

14.2. *Remarque.* On a vu en 13.1 que la classe (C) contient beaucoup d'extensions de groupes de rang 2.

Inversement, si N est un groupe de Carnot qui possède un automorphisme gradué ϕ qui engendre un sous-groupe non relativement compact de $\mathrm{Aut}_\alpha(N)/\{e^{t\alpha}\}$ alors ϕ donne naissance à une quasiisométrie du groupe $R = N \times_\alpha \mathbf{R}$ qui n'est proche d'aucune isométrie.

14.3. *Un exemple d'espace homogène dont le groupe de quasiisométries est de dimension infinie.* Soit M une variété différentiable. Notons $\pi\colon PM = \mathbf{P}(TM) \to M$ le fibré des tangentes. Il porte un champ de plans naturel: au point $(x, d) \in PM$,

$$Q = \{v \in TPM | \pi_* v \in d\}.$$

Ce champ de plans est accessible. En effet, si $c(s)$ est une courbe dans M, la courbe $(c(s), \dot{c}(s))$ est tangente à Q. Comme on peut faire passer une courbe par des points donnés avec des tangentes données, les courbes tangentes à Q relient deux points quelconques de PM. Par naturalité, tout difféomorphisme de M se relève en un difféomorphisme de PM qui préserve Q.

Posons $M = \mathbf{R}^{n+1}$, avec les coordonnées $p_0, \ldots, p_n$. Repérons une droite transverse à l'hyperplan d'équation $\dot{p}_0 = 0$ par les composantes de son vecteur directeur $(1, q_1, \ldots, q_n)$. Ceci fournit des coordonnées sur l'ouvert $N = \{\dot{p}_0 \neq 0\}$

de $P\mathbf{R}^{n+1}$. Sur cet ouvert, les champs de vecteurs

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial q_i}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad Y = \frac{\partial}{\partial p_0} + \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

satisfont aux relations

$$[X_i, X_j] = [X_i, Z_j] = [Y, Z_j] = 0, \quad [X_i, Y] = Z_i.$$

Par conséquent, l'ouvert N possède une structure de groupe de Lie nilpotent, et le champ de plans Q, engendré par Y et les X_i, est invariant à gauche. Muni de la dérivation

$$\alpha(X_i) = X_i, \quad \alpha(Y) = Y, \quad \alpha(Z_i) = 2Z_i,$$

N est un groupe de Carnot.

Un difféomorphisme de $M = \mathbf{R}^{n+1}$ préserve N si et seulement si il préserve le feuilletage par les hyperplans $\{p_0 = \text{const.}\}$. Cela fournit beaucoup de transformations quasiconformes (en fait, bilipschitziennes) du groupe de Carnot N, donc de quasiisométries de l'espace homogène $N \times_\alpha \mathbf{R}$.

ECOLE POLYTECHNIQUE, PALAISEAU, FRANCE

BIBLIOGRAPHIE

[Be] Y. BENOÎT, Communication privée.

[B] M. BERGER, *Géométrie*, CEDIC-Fernand-Nathan, Paris (1978).

[Bo] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématiques*, *Groupes et Algèbres de Lie*, chapitres 7 et 8, Hermann, Paris (1975).

[Br] R. W. BROCKETT, Control theory and singular Riemannian geometry, in *New Directions in Applied Mathematics*, P. J. Hilton and G. S. Young eds., pages 11–27, Springer, Berlin (1981).

[C] W. L. CHOW, Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, Math. Annalen **117** (1939), 98–105.

[EO] P. EBERLEIN and B. O'NEILL, Visibility manifolds, Pacific Math. J. **46** (1973), 45–109.

[E] V. EFREMOVITCH, The proximity geometry of Riemannian manifolds, Uspehi Mat. Nauk 8 (1953), 189–200.

[ET] V. EFREMOVITCH and E. TICHONIROVA, Equimorphisms of hyperbolic spaces, Izv. Akad. Nauk CCCP **28** (1964), 1139–1144.

[Fe] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Grundlehren Band 169, Springer, Berlin (1969).

[FS] G. B. FOLLAND and E. M. STEIN, Estimates on the $\bar{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429–522.

[F] B. FUGLEDE, Extremal length and functional completion, Acta Math. **98** (1957), 171–219.

[Ge] F. W. GEHRING, Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. A. M. S. **103** (1962), 353–393.

[Go] R. GOODMAN, *Nilpotent Lie Groups*, *Structure and Applications to Analysis*, Lecture Notes in Math. Vol. 562, Springer, Berlin (1976).

[G1] M. Gromov, Hyperbolic manifolds, groups and actions, in *Riemann Surfaces and Related Topics*, Stony Brook Conf., 1978, pp. 183–215, Ann. of Math. Studies Vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton (1981).

[G2] ______, Groups of polynomial growth and expanding maps, Publ. Math. I.H.E.S. **53** (1981), 53–78.

[G3] ______, *Structures Métriques pour les Variétés Riemanniennes*, Notes de cours rédigées par J. Lafontaine et P. Pansu, CEDIC-Fernand-Nathan et Soc. Math. de France, Paris (1981).

[G4] ______, Communication privée.

[G5] ______, Infinite groups as geometric objects, in *Proc. Intern. Cong. Math.*, Warsaw 1983, 384–389, Polish Sci. Publishers, Warsaw (1984).

[GH] Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience Publications, New York (1978).

[Ha] U. Hamenstädt, Zur Theorie von Carnot-Carathéodory Metriken und ihren Anwendungen, Bonner Math. Schriften **180** (1987).

[H] E. Heintze, On homogeneous manifolds of negative curvature, Math. Ann. **211** (1974), 23–34.

[KR1] A. Korányi and H. Reimann, Quasiconformal mappings on the Heisenberg group, Invent. Math. **80** (1985), 309–338.

[KR2] ______, Horizontal normal vectors and conformal capacity of spherical rings in the Heisenberg group, Bull. Sci. Math (1986).

[Mv] A. Malcev, On a class of homogeneous spaces, Izv. Akad. Nauk CCCP **13** (1949), 9–32; traduction anglaise: A. M. S. Translations, Vol. 9, 1951.

[Ma] G. A. Margulis, Groupes discrets d'isométries des variétés à courbure négative, in *Proc. Intern. Cong. Math.*, Vancouver 1974, Vol. 2, pages 21–34, Canadian Math. Congress (1974).

[Mi] J. Mitchell, On Carnot-Carathéodory metrics, J. Diff. Geom. **21** (1985), 35–45.

[Mo] M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature, Trans. A. M. S. **22** (1921), 84–100.

[M1] G. D. Mostow, Quasiconformal mappings in n-space and the strong rigidity of hyperbolic space forms, Publ. Math. I.H.E.S. **34** (1968), 53–104.

[M2] ______, *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces*, Ann. of Math. Studies, Vol. 78, Princeton Univ. Press, Princeton (1973).

[P1] P. Pansu, Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés, Ergod. Th. Dynam. Syst. **3** (1983), 415–445.

[P2] ______, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un, preprint Ecole Polytechnique, Palaiseau (1984).

[P3] ______, Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative, à paraître dans Ann. Acad. Sci. Fennicae.

[Ra] A. Ramsay, Virtual groups and group actions, Advances in Math. **6** (1971), 253–322.

[RS] V. Stepanov, Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale, Mat. Sbornik **32** (1925), 511–527.

[Ru] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York (1974).

[S] E. M. Stein, *Singular Integrals and the Differentiability Properties of Functions*, Princeton Math. Series, Vol. 30, Princeton Univ. Press, Princeton (1970).

[Ta] N. Tanaka, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras, Hokkaido Math. J. **8** (1979), 23–84.

[T] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, preprint Princeton Univ. (1980).

[T1] P. Tukia, Quasiconformal extension of quasisymmetric maps compatible with a Möbius group, Acta Math. **154** (1985), 153–193.

[T2] P. Tukia, On quasiconformal groups, J. d'Anal. Math. **46** (1986), 318–346.

[V] J. Väisälä, *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. Vol. 229, Springer, Berlin (1971).

[Ve] M. Vergne, Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes, application à l'étude des variétés d'algèbres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. de France **98** (1970), 81–116.

[W] E. N. Wilson, Isometry groups on homogeneous nilmanifolds, Geom. Dedic. **12** (1982), 337–346.

[Z] R. Zimmer, *Ergodic Theory and Semi-Simple Lie Groups*, Monographs in Math. Vol. 81, Birkhäuser, Basel (1984).

(Received June 8, 1987)