Inégalité de Poincaré pour les formes différentielles

Pierre Pansu, avec A. Baldi, B. Franchi et M. Rumin

9 février 2018

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Exemple. $X =$ droite pavée en intervalles égaux. Alors $\ell^{q,p}H^0(X) = 0$ sauf $\ell^{q,\infty}H^0(X) = \mathbb{R}$, $\ell^{\infty,1}H^1(X) = 0$, tous les autres $\ell^{q,p}H^1(X) \neq 0$.

Définition

X complexe simplicial. Est-ce que tout cocycle ℓ^p est le cobord d'une cochaîne ℓ^q ?

$$\ell^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-cocycles } \ell^p\}/d\{k-1\text{-cochaînes } \ell^q\}.$$

Si X est fini, c'est un invariant topologique. Si X est infini, c'est un invariant de quasiisométrie. Donne lieu à des invariants numériques des groupes discrets.

Exemple. $X =$ droite pavée en intervalles égaux. Alors $\ell^{q,p}H^0(X) = 0$ sauf $\ell^{q,\infty}H^0(X) = \mathbb{R}$, $\ell^{\infty,1}H^1(X) = 0$, tous les autres $\ell^{q,p}H^1(X) \neq 0$.

Exemple. $X =$ plan pavé en triangles. Alors $\ell^{q,p}H^1(X) = 0$ si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \geq \dfrac{1}{2}$. En effet, l'inégalité de Sobolev s'applique aux cocycles à support fini : pour une fonction u à support compact sur le plan, si $p < 2$,

$$\|u\|_q \leq C\,\|du\|_p.$$

Questions. Quid des cocycles à support infini (Sobolev $\to$ Poincaré) ? Comment passer du discret au continu et inversement ?

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Questions. Calculer des exemples. Si X is triangulée, est-ce que $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$?

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Questions. Calculer des exemples. Si X is triangulée, est-ce que $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$?

Exemple. $X = \mathbb{R}^n$. Alors $L^{q,p}H^k(X) = 0$ si $1 < p \leq q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration. Soit $\Delta = d^*d + dd^*$. Alors Δ a un inverse pseudodifferentiel qui commute avec d. $T = d^*\Delta^{-1}$ a un noyau homogène de degré $1-n$, donc est borné $L^p \to L^q$ dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ (Calderon-Zygmund 1952). Enfin, $1 = dT + Td$.

Définition

X variété riemannienne.

$$L^{q,p}H^k(X) = \{k\text{-formes fermées } L^p\}/d\{k-1\text{-formes } L^q\omega \text{ telles que } d\omega \in L^p\}.$$

Questions. Calculer des exemples. Si X is triangulée, est-ce que $L^{q,p}H^k(X) = \ell^{q,p}H^k(X)$?

Exemple. $X = \mathbb{R}^n$. Alors $L^{q,p}H^k(X) = 0$ si $1 < p \leq q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{n}$.

Démonstration. Soit $\Delta = d^*d + dd^*$. Alors Δ a un inverse pseudodifferentiel qui commute avec d. $T = d^*\Delta^{-1}$ a un noyau homogène de degré $1-n$, donc est borné $L^p \to L^q$ dès que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{n}$ (Calderon-Zygmund 1952). Enfin, $1 = dT + Td$.

Exemple. X = boule de $\mathbb{R}^n$. Alors $L^{q,p}H^k(X) = 0$ si $1 < p \leq q < \infty$ et $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{n}$.

Démonstration (Iwaniec-Lutoborsky 1993). La formule d'homotopie de Cartan fournit une homotopie T, $1 = dT + Td$, qui a un noyau homogène de degré $1-n$. Les formes n'ont pas besoin d'être définies globalement. Hölder $\implies$ q peut diminuer. Marche pour les convexes.

Théorème (Leray, circa 1946)

L'annulation de $L^{q,p}H^{\cdot}$ pour chaque simplexe entraîne que $L^{q,p}H^{\cdot} = \ell^{q,p}H^{\cdot}$ pour les variétés triangulées à géométrie bornée.

Par conséquent, Iwaniec-Lutoborsky $\implies \ell^{q,p}H^{\cdot} = L^{q,p}H^{\cdot}$ si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{n}$.

Théorème (Leray, circa 1946)

L'annulation de $L^{q,p}H^\cdot$ pour chaque simplexe entraîne que $L^{q,p}H^\cdot = \ell^{q,p}H^\cdot$ pour les variétés triangulées à géométrie bornée.

Par conséquent, Iwaniec-Lutoborsky $\implies \ell^{q,p}H^\cdot = L^{q,p}H^\cdot$ si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \leq \dfrac{1}{n}$.

Proposition (Rumin)

La Proposition persiste sous la forme $\ell^{q,p}H^\cdot = L^{q,p}_\infty H^\cdot$, où $L^p_\infty = \{$formes dont toutes les dérivées sont $L^p\}$.

"On peut perdre de la régularité". Utile car ne met aucune restriction sur l'exposant q.

Théorème (Leray, circa 1946)

L'annulation de $L^{q,p}H^{\cdot}$ pour chaque simplexe entraîne que $L^{q,p}H^{\cdot} = \ell^{q,p}H^{\cdot}$ pour les variétés triangulées à géométrie bornée.

Par conséquent, Iwaniec-Lutoborsky $\implies \ell^{q,p}H^{\cdot} = L^{q,p}H^{\cdot}$ si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{n}$.

Proposition (Rumin)

La Proposition persiste sous la forme $\ell^{q,p}H^{\cdot} = L^{q,p}_{\infty}H^{\cdot}$, où $L^{p}_{\infty} = \{$formes dont toutes les dérivées sont $L^p\}$.

"On peut perdre de la régularité". Utile car ne met aucune restriction sur l'exposant q.

Proposition (Pansu)

La Proposition persiste sous une hypothèse plus faible : toute forme fermée sur une boule de rayon 2 a une primitive sur la boule unité avec normes contrôlées.

"On peut perdre sur le domaine". Clé de l'invariance par quasiisométrie.

Un *groupe de Carnot*, c'est un groupe de Lie G avec un groupe à 1 paramètre d'automorphismes δ_t tel que $\mathfrak{g}_1 = \{v \in \mathfrak{g}\,;\, \delta_t v = tv\}$ engendre $\mathfrak{g}$.

Exemple. Le groupe d'Heisenberg : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$ est symplectique.

Un *groupe de Carnot*, c'est un groupe de Lie G avec un groupe à 1 paramètre d'automorphismes δ_t tel que $\mathfrak{g}_1 = \{v \in \mathfrak{g}\,;\, \delta_t v = tv\}$ engendre $\mathfrak{g}$.

Exemple. Le groupe d'Heisenberg : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$ est symplectique.

Le laplacien de Kohn. Pour une fonction u, soit $d_R u = du_{|\mathfrak{g}_1}$ et soit $\Delta u = d_R^* d_R$. Il est homogène de degré 2 sous δ_t.

Un *groupe de Carnot*, c'est un groupe de Lie G avec un groupe à 1 paramètre d'automorphismes δ_t tel que $\mathfrak{g}_1 = \{v \in \mathfrak{g}\,;\, \delta_t v = tv\}$ engendre $\mathfrak{g}$.

Exemple. Le groupe d'Heisenberg : $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, où $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2 = \mathbb{R}$ est symplectique.

Le laplacien de Kohn. Pour une fonction u, soit $d_R u = du_{|\mathfrak{g}_1}$ et soit $\Delta u = d_R^* d_R$. Il est homogène de degré 2 sous δ_t.

En général, il n'existe pas de laplacien différentiel homogène sur les formes, car les formes invariantes à gauche se décomposent sous δ_t en plusieurs poids.

Exemple. Sur le groupe d'Heisenberg, deux poids sur les k-formes, k et $k+1$, car $\Lambda^k \mathfrak{g}^* = \Lambda^k \mathfrak{g}_1^* \oplus \Lambda^{k-1} \mathfrak{g}_1^* \otimes \mathfrak{g}_2^*$.

Un laplacien homogène mais pseudodifférentiel. On pose $|\nabla| = \Delta^{1/2}$. Soit $|\nabla|^N$ l'opérateur agissant composante par composante qui vaut $|\nabla|^w$ sur les formes de poids w. Alors $d^\nabla := |\nabla|^{-N} d |\nabla|^N$ est pseudodifferentiel d'ordre 0, son laplacien $\Delta^\nabla = (d^\nabla)^* d^\nabla + d^\nabla (d^\nabla)^*$ aussi. Ils sont homogènes.

Un laplacien homogène mais pseudodifférentiel. On pose $|\nabla| = \Delta^{1/2}$. Soit $|\nabla|^N$ l'opérateur agissant composante par composante qui vaut $|\nabla|^w$ sur les formes de poids w. Alors $d^\nabla := |\nabla|^{-N} d |\nabla|^N$ est pseudodifferentiel d'ordre 0, son laplacien $\Delta^\nabla = (d^\nabla)^* d^\nabla + d^\nabla (d^\nabla)^*$ aussi. Ils sont homogènes.

Δ^∇ a un inverse pseudodifferentiel (Helffer-Nourrigat 1979, Christ-Geller-Glowacki-Polin 1992), donc d^∇ a une homotopie $K^\nabla := (d^\nabla)^* (\Delta^\nabla)^{-1}$, $1 = d^\nabla K^\nabla + K^\nabla d^\nabla$, d'où une homotopie homogène $K := |\nabla|^N K^\nabla |\nabla|^{-N}$ pour d.

Un laplacien homogène mais pseudodifférentiel. On pose $|\nabla| = \Delta^{1/2}$. Soit $|\nabla|^N$ l'opérateur agissant composante par composante qui vaut $|\nabla|^w$ sur les formes de poids w. Alors $d^\nabla := |\nabla|^{-N} d |\nabla|^N$ est pseudodifferentiel d'ordre 0, son laplacien $\Delta^\nabla = (d^\nabla)^* d^\nabla + d^\nabla (d^\nabla)^*$ aussi. Ils sont homogènes.

Δ^∇ a un inverse pseudodifferentiel (Helffer-Nourrigat 1979, Christ-Geller-Glowacki-Polin 1992), donc d^∇ a une homotopie $K^\nabla := (d^\nabla)^*(\Delta^\nabla)^{-1}$, $1 = d^\nabla K^\nabla + K^\nabla d^\nabla$, d'où une homotopie homogène $K := |\nabla|^N K^\nabla |\nabla|^{-N}$ pour d.

K^∇ a un noyau homogène donc est borné sur L^p (Folland 1975), K est borné sur

$$L^{N,p} := \{\alpha\,;\, |\nabla|^{-N}\alpha \in L^p\},$$

et sur $L^{N-m,p}$ pour toute constante m.

Sur les fonctions,

$$L^p_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

Sur l'espace des formes de poids compris entre a et b, Ω_a^b,

$$\Omega_a^b \cap \bigcap_{m=a}^{\infty} L^{N-m,p} \subset \Omega_a^b \cap L^p_\infty \subset \bigcap_{m=b}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

Sur les fonctions,

$$L^p_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

Sur l'espace des formes de poids compris entre a et b, Ω_a^b,

$$\Omega_a^b \cap \bigcap_{m=a}^{\infty} L^{N-m,p} \subset \Omega_a^b \cap L^p_\infty \subset \bigcap_{m=b}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

$|\nabla|^{-\mu}$ est borné de L^p dans L^q si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\mu}{Q}$, $Q = \sum i \dim(\mathfrak{g}_i)$ (Folland 1975). D'où l'inégalité de Poincaré graduée

$$L^{N-m,p} \subset L^{N-m+\mu,q}.$$

Sur les fonctions,

$$L^p_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

Sur l'espace des formes de poids compris entre a et b, Ω_a^b,

$$\Omega_a^b \cap \bigcap_{m=a}^{\infty} L^{N-m,p} \subset \Omega_a^b \cap L^p_\infty \subset \bigcap_{m=b}^{\infty} L^{N-m,p}.$$

$|\nabla|^{-\mu}$ est borné de L^p dans L^q si $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\mu}{Q}$, $Q = \sum i \dim(\mathfrak{g}_i)$ (Folland 1975). D'où l'inégalité de Poincaré graduée

$$L^{N-m,p} \subset L^{N-m+\mu,q}.$$

Supposons que $K(\Omega_a^b) \subset \Omega_{a'}^{b'}$. Si $\mu = b - a'$, alors

$$K(L^p_\infty \cap \Omega_a^b) \subset \Omega_{a'}^{b'} \cap \bigcap_{m=b}^{\infty} L^{N-m,p} \subset \Omega_{a'}^{b'} \cap \bigcap_{m=b}^{\infty} L^{N-m+\mu,q} = \Omega_{a'}^{b'} \cap \bigcap_{m=a'}^{\infty} L^{N-m,q} \subset L^q_\infty,$$

Proposition

$\ell^{q,p}H^k(G) = 0$ si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{b-a'}{Q}$, où b poids maximal en degré k, a' poids minimal en degré $k-1$.

Exemple. Pour le groupe d'Heisenberg, $b = k+1$, $a' = k-1$, $b - a' = 2$. Non optimal.

Proposition

$\ell^{q,p}H^k(G) = 0$ si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{b-a'}{Q}$, où b poids maximal en degré k, a' poids minimal en degré $k-1$.

Exemple. Pour le groupe d'Heisenberg, $b = k+1$, $a' = k-1$, $b - a' = 2$. Non optimal.

Stratégie. Remplacer d par un sous-complexe utilisant moins de poids : le complexe de Rumin (1994, 1999).

Soit d_0 la composante de poids 0 de d (opérateur algébrique). On choisit des supplémentaires de $\ker(d_0)$ et $\mathrm{im}(d_0)$, on définit d_0^{-1}. Les puissances de $1 - d_0^{-1}d - dd_0^{-1}$ se stabilisent en un projecteur Π_E sur un sous-complexe E. $\Pi_0 = 1 - d_0^{-1}d_0 - d_0 d_0^{-1}$ est le projecteur sur un sous-espace E_R de formes comportant moins de poids : la fibre de E_R est la cohomologie de $\mathfrak{g}$. On pose

$$d_R = \Pi_0 \circ d \circ \Pi_E.$$

Le complexe de Rumin (E_R, d_R) est homotope au complexe de de Rham.

Exemple. Pour le groupe d'Heisenberg de dimension 3,

- $E_R^1 = \{$1-formes horizontales$\}$, $d_R : E_R^0 \to E_R^1$ est le gradient horizontal $du_{|\mathfrak{g}_1}$.
- $E_R^2 = \{$2-formes verticales$\}$. Π_E prolonge une 1-forme horizontale α de sorte que $d\Pi_E\alpha$ soit verticale (choix unique). $d_R\alpha = d\Pi_E\alpha$ dérive 2 fois α.

En général, pour le groupe d'Heisenberg de dimension $2m+1$, E_R comporte un seul poids par degré, $w = k$ si $k \leq m$, $w = k+1$ si $k \geq m+1$, et $d_R : E_R^m \to E_R^{m+1}$ est d'ordre 2.

Exemple. Pour le groupe d'Heisenberg de dimension 3,

- $E_R^1 = \{$1-formes horizontales$\}$, $d_R : E_R^0 \to E_R^1$ est le gradient horizontal $du_{|\mathfrak{g}_1}$.
- $E_R^2 = \{$2-formes verticales$\}$. Π_E prolonge une 1-forme horizontale α de sorte que $d\Pi_E\alpha$ soit verticale (choix unique). $d_R\alpha = d\Pi_E\alpha$ dérive 2 fois α.

En général, pour le groupe d'Heisenberg de dimension $2m+1$, E_R comporte un seul poids par degré, $w = k$ si $k \leq m$, $w = k+1$ si $k \geq m+1$, et $d_R : E_R^m \to E_R^{m+1}$ est d'ordre 2.

Théorème (Pansu-Rumin)

1. *$\ell^{q,p}H^k(G) = 0$ si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq \frac{b-a'}{Q}$, où b poids maximal en degré k, a' poids minimal en degré $k-1$ de la cohomologie de $\mathfrak{g}$.*
2. *$\ell^{q,p}H^k(G) \neq 0$ si $1 \leq p, q \leq \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\max\{1, b'-a\}}{Q}$, où b poids minimal en degré k, a' poids maximal en degré $k-1$ de la cohomologie de $\mathfrak{g}$.*

Exemple. Pour le groupe d'Heisenberg, $b - a' = b' - a = 1$, sauf en degré moitié où $b - a' = b' - a = 2$.

Exemple. Pour tout groupe de Carnot, $b - a' = b' - a = 1$ en degrés 1 et $n = \dim(G)$.

Théorème (Baldi-Franchi-Pansu)

Soit G le groupe d'Heisenberg. Les formes fermées L^p définies sur la boule de rayon 2 possèdent des d_R-primitives sur la boule unité qui sont dans L^q, dès que $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{Q}$ (resp. $\frac{2}{Q}$ en degré $m+1$).

Théorème (Baldi-Franchi-Pansu)

Soit G le groupe d'Heisenberg. Les formes fermées L^p définies sur la boule de rayon 2 possèdent des d_R-primitives sur la boule unité qui sont dans L^q, dès que $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{Q}$ (resp. $\frac{2}{Q}$ en degré $m+1$).

Démonstration. Pas d'analogue sous-riemannien de la formule d'homotopie de Cartan.

À la place, on utilise l'homotopie Π_E de Rumin puis celle d'Iwaniec-Lutoborsky euclidienne. Comme Π_E is différentielle, il faut au préalable appliquer une homotopie régularisante.

Théorème (Baldi-Franchi-Pansu)

Soit G le groupe d'Heisenberg. Les formes fermées L^p définies sur la boule de rayon 2 possèdent des d_R-primitives sur la boule unité qui sont dans L^q, dès que $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{Q}$ (resp. $\frac{2}{Q}$ en degré $m+1$).

Démonstration. Pas d'analogue sous-riemannien de la formule d'homotopie de Cartan.

À la place, on utilise l'homotopie Π_E de Rumin puis celle d'Iwaniec-Lutoborsky euclidienne. Comme Π_E is différentielle, il faut au préalable appliquer une homotopie régularisante.

On fixe une métrique pour définir les adjoints. $\Delta_R := d_R^* d_R + d_R d_R^*$ est remplacé par $\Delta_R := (d_R^* d_R)^2 + d_R d_R^*$ ou $d_R^* d_R + (d_R d_R^*)^2$ en degrés m et $m+1$. Alors Δ_R est hypoelliptique maximal, donc $T_R = d_R^* \Delta_R^{-1}$ a un noyau lisse et homogène.

Théorème (Baldi-Franchi-Pansu)

Soit G le groupe d'Heisenberg. Les formes fermées L^p définies sur la boule de rayon 2 possèdent des d_R-primitives sur la boule unité qui sont dans L^q, dès que $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{Q}$ (resp. $\frac{2}{Q}$ en degré $m+1$).

Démonstration. Pas d'analogue sous-riemannien de la formule d'homotopie de Cartan.

À la place, on utilise l'homotopie Π_E de Rumin puis celle d'Iwaniec-Lutoborsky euclidienne. Comme Π_E is différentielle, il faut au préalable appliquer une homotopie régularisante.

On fixe une métrique pour définir les adjoints. $\Delta_R := d_R^* d_R + d_R d_R^*$ est remplacé par $\Delta_R := (d_R^* d_R)^2 + d_R d_R^*$ ou $d_R^* d_R + (d_R d_R^*)^2$ en degrés m et $m+1$. Alors Δ_R est hypoelliptique maximal, donc $T_R = d_R^* \Delta_R^{-1}$ a un noyau lisse et homogène.

Soit K_R le noyau de T_R. On décompose $K_R = K^1 + K^2$ où K_1 a un petit support et K_2 est lisse. Alors $T_R = T^1 + T^2$,

$$1 = d_R T^1 + T^1 d_R + S$$

où S est régularisant. T^1 et donc S envoie des formes définies sur la boule de rayon 2 sur des formes définies sur la boule unité. T^1 envoie L^p dans L^q comme T_R. S regagne les dérivées perdues par Π_E.

Corollaire (Baldi-Franchi-Pansu)

Supposons que $1 < p, q < \infty$ *et* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2m+2}$ *(resp.* $\frac{2}{2m+2}$ *en degré* $m+1$*). Alors* d_R *calcule la cohomologie* $\ell^{q,p}$ *: pour toute variété de contact sous-riemannienne à géométrie bornée de dimension* $2m+1$, $\ell^{q,p}H^{\cdot} = L^{q,p}H^{\cdot}(d_c)$*. Aussi, il existe une homotopie du complexe* (E_R, d_R) *qui régularise les formes.*