Université Paris Sud — Année 2019–2020

L3/S6 M305 — Algèbre II

TD n° II

Anneaux idéaux

Exercice A : (Rappels et compléments sur les idéaux)
Soient A et B deux anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1) On suppose que f est surjectif.

a) Montrer que si $\mathfrak{I} \subset A$ est un idéal de A alors $f(\mathfrak{I})$ est un idéal de B.

b) Montrer que si $\mathfrak{I}$ est un idéal de A contenant$\mathrm{Ker}\, f$ alors

$$f^{-1}(f(\mathfrak{I})) = \mathfrak{I}\,.$$

c) En déduire que l'application $\mathfrak{I} \mapsto f(\mathfrak{I})$ réalise une bijection croissante entre l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathrm{Ker}\, f$ et l'ensemble des idéaux de B.

d) Soit $\mathbb{K}$ un corps et $P \in \mathbb{K}[X]$. Décrire les idéaux de $\mathbb{K}[X]/(P)$.

2) On ne suppose plus que f est surjectif.

a) Si $\mathfrak{I} \subset A$ est un idéal de A, le sous-ensemble $f(\mathfrak{I}) \subset B$ est-il toujours un idéal de B ?

b) Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(\mathfrak{J}) \subset A$ est un idéal de A et que $A/f^{-1}(\mathfrak{J})$ s'identifie à un sous-anneau de $B/\mathfrak{J}$.

c) En déduire que si $\mathfrak{J}$ est un idéal premier de B, alors $f^{-1}(\mathfrak{J})$ est un idéal premier de A.

d) Si $\mathfrak{J} \subset B$ est un idéal maximal de B, le sous-ensemble $f^{-1}(\mathfrak{J}) \subset A$ est-il nécessairement un idéal maximal de A ?

Exercice B : (Autour du théorème chinois)
Soit A un anneau commutatif. Si $\mathfrak{I}, \mathfrak{J} \subset A$ sont des idéaux de A, on pose :

$$\mathfrak{I} + \mathfrak{J} := \{a + b \mid a \in \mathfrak{I} \text{ et } b \in \mathfrak{J}\} \text{ et } \mathfrak{I}\mathfrak{J} := \{a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k \mid a_i \in \mathfrak{I} \text{ et } b_j \in \mathfrak{J}\}\ .$$

1) Montrer que si $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ sont des idéaux de A alors $\mathfrak{I} + \mathfrak{J}$, $\mathfrak{I}\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}$ sont des idéaux de A.

2) Soient $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$ des idéaux de A.

a) Montrer que $\mathfrak{I}\mathfrak{J} \subset \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}$

b) On suppose que $\mathfrak{I} + \mathfrak{J} = A$. Montrer que $\mathfrak{I}\mathfrak{J} = \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}$.

c) Donner un contre-exemple à cette égalité si $\mathfrak{I} + \mathfrak{J} \neq A$. (On pourra choisir $A = \mathbb{Z}$).

d) Soient $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{L}$ des idéaux tels que

$$\mathfrak{I} \subset \mathfrak{K}\,,\ \mathfrak{J} \subset \mathfrak{L}\,,\ \mathfrak{K} \cap \mathfrak{L} \subset \mathfrak{I} \cap \mathfrak{J} \text{et } \mathfrak{K} + \mathfrak{L} \subset \mathfrak{I} + \mathfrak{J}\,.$$

Montrer qu'alors

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{K} \text{ et} \mathfrak{J} = \mathfrak{L}\,.$$

3) Soient $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ des idéaux de A. On note

$$p_{\mathfrak{I}} \;:\; A \;\to\; A/\mathfrak{I} \text{ et } p_{\mathfrak{J}} \;:\; A \;\to\; A/\mathfrak{J}$$

les surjections canoniques et

$$q \;:\; A \;\to\; A/\mathfrak{I} \times A/\mathfrak{J} \;,\; x \;\mapsto\; \big(p_{\mathfrak{I}}(x), p_{\mathfrak{J}}(x)\big) \;.$$

a) Vérifier que q est un morphisme d'anneaux ; montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux

$$i \;:\; A/(\mathfrak{I} \cap \mathfrak{J}) \;\to\; A/\mathfrak{I} \times A/\mathfrak{J} \text{ tel que } i \;\circ\; p_{\mathfrak{I}\cap\mathfrak{J}} \;=\; q$$

et que i est injectif.

b) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux

$$q_{\mathfrak{I}} \;:\; A/\mathfrak{I} \;\to\; A/(\mathfrak{I}+\mathfrak{J}) \text{ tel que } q_{\mathfrak{I}} \;\circ\; p_{\mathfrak{I}} \;=\; p_{\mathfrak{I}+\mathfrak{J}} \text{ (resp. } q_{\mathfrak{J}} \;:\; A/\mathfrak{J} \;\to\; A/(\mathfrak{I}+\mathfrak{J}) \text{ tel que } q_{\mathfrak{J}} \;\circ\; p_{\mathfrak{J}} \;=\; p_{\mathfrak{I}+\mathfrak{J}}\text{)}$$

et que $q_{\mathfrak{I}}$ et $q_{\mathfrak{J}}$ sont surjectifs.

Soit

$$p \;:\; A/\mathfrak{I} \times A/\mathfrak{J} \;\to\; A/(\mathfrak{I}+\mathfrak{J}) \;,\; (\alpha, \beta) \;\mapsto\; q_{\mathfrak{I}}(\alpha) - q_{\mathfrak{J}}(\beta) \;.$$

c) Montrer que p est un morphisme surjectif de A-modules.

d) Comparer $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} i$ et conclure.

e) Que devient la conclusion de d) si $\mathfrak{I} + \mathfrak{J} \;=\; A$? Montrer qu'on a alors un isomorphisme

$$A/\mathfrak{I}\mathfrak{J} \;\cong\; A/\mathfrak{I} \times A/\mathfrak{J} \;.$$

4) Reformuler les résultats des questions précédentes dans le cas où A est un anneau principal.

5) Soient K un corps et $P \in K[X]$. On écrit la décomposition de P en facteurs premiers dans $K[X]$, $P = P_1^{e_1} \cdots P_l^{e_l}$ avec $e_i \geq 1$ pour $i \leq l$. Montrer que

$$K[X]/(P) \;\cong\; K[X]/(P_1^{e_1}) \times \cdots \times K[X]/(P_l^{e_l}).$$

Exercice C : (L'anneau $\mathbb{Z}[j]$)

On note

$$\sigma \;:\; \mathbb{C} \;\to\; \mathbb{C} \;,\; a + ib \;\mapsto\; a - ib$$

la conjugaison complexe. On note

$$j \;:=\; e^{\dfrac{2i\pi}{3}} \;\in\; \mathbb{C}$$

qui vérifie

$$j^3 \;=\; 1 \;,\; 1 + j + j^2 \;=\; 0 \text{ et } \sigma(j) \;=\; j^2 \;.$$

1) Montrer que si le polynôme $1 + X + X^2 \;\in\; \mathbb{Q}[X]$ a une racine dans $\mathbb{Q}$ celle-ci est entière et en déduire que j n'est pas rationnel.

2) On note $\mathbb{Z}[j]$ le sous-anneau de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathbb{Z}[j] \;:=\; \{a + bj \;,\; (a, b) \;\in\; \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$$

muni des lois d'addition et de multiplication induites par celles de $\mathbb{C}$.

Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un $\mathbb{Z}$-module (groupe abélien) libre de rang 2 et en donner une base.

3) Soit

$$N \;:\; \mathbb{C} \;\to\; \mathbb{R} \;,\; z \;\mapsto\; z \cdot \sigma(z) \;.$$

Montrer que N se restreint en une application encore notée $N \;:\; \mathbb{Z}[j] \;\to\; \mathbb{N}$ vérifiant

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}[j] \setminus \{0\},\; N(\alpha) \;\geq\; 1 \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}[j] \times \mathbb{Z}[j],\; N(\alpha\beta) \;=\; N(\alpha)N(\beta) \;.$$

4) Déterminer le groupe $U := \mathbb{Z}[j]^{\times}$ des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.

On admettra dans la suite que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ **il existe** $\alpha \in \mathbb{Z}[j]$ **tel que** $N(z - \alpha) < 1$.

5) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[j]$ est principal.

6) **Soit** $\rho := 1 - j \in \mathbb{Z}[j]$.

Montrer que ρ est irréductible dans $\mathbb{Z}[j]$ et divise 3.

Indication : *on pourra calculer* $N(\rho)$.

7) **On note** $\kappa := \mathbb{Z}[j]/(\mathbb{Z}[j]\rho)$.

Que peut-on dire de l'anneau κ ? Montrer que la composée du morphisme

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[j]\ ,\ a \mapsto a + 0j \text{ et de la surjection canonique } \mathbb{Z}[j] \to \mathbb{Z}[j]/(\mathbb{Z}[j]\rho)$$

se factorise en un isomorphisme

$$\mathbb{F}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \kappa\ .$$

8) **Pour tout** $\alpha \in \mathbb{Z}[j]$, **on notera désormais** $v(\alpha)$ **sa valuation** ρ**-adique** ***i.e.*** **le plus grand entier naturel** k **tel que** $\rho^k|\alpha$.

Rappeler rapidement pourquoi

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}[j] \times \mathbb{Z}[j],\ v(\alpha\beta) = v(\alpha) + v(\beta) \text{ et } v(\alpha + \beta) \geq \min(v(\alpha), v(\beta))\ .$$