Université Paris Sud Année 2019–2020

L3/S6 M305 Algèbre II

Corrigé du Problème n° II

Exercice A : (La suite des noyaux itérés)

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de E.

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^\varepsilon = 0 \,\mathrm{et} f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \textbf{on note} \ N_k := \mathrm{Ker}\, f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}_E$.)

Cet exercice peut être traité de manière tout à fait élémentaire et ne nécessite l'usage ni du théorème IV.10.10 de JORDAN ni du théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS.

1) () Montrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\{f^i(x)\}_{,0 \leq i \leq \varepsilon-1}$ est libre.

Solution : *Puisque, par hypothèse* $f^{\varepsilon-1} \neq 0$,

$$\exists x \in E, \ f^{\varepsilon-1}(x) \neq 0\,.$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\forall 0 \leq i \leq \varepsilon - 1, \ f^i(x) \neq 0\,.$$

Par ailleurs, bien entendu

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq \varepsilon \Rightarrow f^k(x) = 0\,.$$

Il s'ensuit que pour tout

$$\begin{array}{lrcl}
a_{i\,,0\leq i\leq\varepsilon-1} \in \mathbb{K} & \displaystyle\sum_{i=0}^{\varepsilon-1} a_i f^i(x) & = & 0 \\
\Rightarrow & f^{\varepsilon-1}\big(\displaystyle\sum_{i=0}^{\varepsilon-1} a_i f^i(x)\big) & = & 0 \\
\Rightarrow & \displaystyle\sum_{i=0}^{\varepsilon-1} a_i f^{i+\varepsilon-1}(x) & = & 0 \\
\Rightarrow & a_0 f^{\varepsilon-1}(x) & = & 0 \\
\Rightarrow & a_0 & = & 0\,.
\end{array}$$

On établit ainsi que

$$\forall 0 \leq i \leq \varepsilon - 1, \ a_i = 0\,.$$

2) () **(polynôme minimal)**

Quel est le polynôme minimal de f ? Qu'en déduit-on sur ε et n ?

Solution : *Par définition, X^ε est un polynôme annulateur de f ; si bien que $P_{\mathrm{min}\, f} | X^\varepsilon$. Le polynôme X étant irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, $\exists k \in \mathbb{N}, \ P_{\mathrm{min}\, f} = X^k$. Puisque $f^{\varepsilon-1} \neq 0$ par hypothèse*

$$P_{\mathrm{min}\, f} = \varepsilon\,.$$

Or on a montré (cf. question 1),) qu'il existe alors une famille libre à ε éléments dans E ; ce qui entraîne

$$\varepsilon \leq n\,.$$

Bien entendu on pouvait obtenir l'inégalité ci-dessus grâce au gthéorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON *puisque*

$$\varepsilon = \deg(P_{\mathrm{min}\, f}) \leq \deg(P_{\mathrm{car}\, f}) = n\,;$$

néanmoins l'argument de question 1) est beaucoup plus élémentaire.

3) () Montrer que la suite
$$\{0\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} f^{\varepsilon-1} \subset \operatorname{Ker} f^{\varepsilon} = E$$
est strictement croissante ; et constante lorsque $k \geq \varepsilon$.

Solution : *Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $N_k = N_{k+1}$. Alors*

$$\begin{array}{lrcl} \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in N_{k+1+p}, & f^{k+1+p}(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & f^{k+1}[f^p(x)] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & f^p(x) & \in & N_{k+1} \\ \Leftrightarrow & f^p(x) & \in & N_k \\ \Leftrightarrow & f^{k+p}(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & \in & N_{k+p} \,. \end{array}$$

4) () Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure stricte.

Solution : *Cette assertion équivaut en fait à construire une fammille $E_i\ _{,0\leq i\leq n}$ de sous-$\mathbb{K}$-espaces vectoriels de E, tels que*

$$\forall 0 \leq i \leq n,\ \dim_{\mathbb{K}} E_i = i \text{ et } \forall 1 \leq i \leq n,\ E_{i-1} \subset E_i \text{ et } f(E_i) \subset E_{i-1}\,.$$

En effet E_1 est alors une ddroite dont on peut prendre une base e_1. $E_1 \subset E_2$ qui est un plan et dans lequel la base e_1 se complète en une base (e_1, e_2). On construit ainsi, de proche en proche, une base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$. Or la condition $f(E_i) \subset E_{i-1}$ entraîne que $f(e_1) = 0$ et que pour $i > 1$, $f(e_i)$ s'exprime en fonction des $e_j\ _{,1\leq j\leq i-1}$; ce qui signifie exactement que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

Reste à construire le « drapeau » $E_i\ _{,0\leq i\leq n}$. On verra à la question 6) que dans le cas où $\varepsilon = n$, la suite $N_i\ _{,0\leq i\leq n\,=\,\varepsilon}$ des noyaux convient. Dans le cas général, on a montré (cf. question 3),) que cette suite est cependant strictement croissante. Il se pourrrrait que le « saut de dimension » entre deux noyaux successifs soit plus grand strictement que 1 [8]

On aura nécessairement
$$E_0 = \{0\} \text{ et } E_n = N_{\varepsilon} = E\,.$$

Supposons donc qu'on ait construit $E_k\ _{,i\leq k\leq n}$ avec

$$\dim_{\mathbb{K}} E_k = k\ ,\ E_{k-1} \subset E_k \text{ et } f(E_k) \subset E_{k-1}$$

tel que $E_i = N_j$.

Bien entendu si $N_j = N_0 = \{0\}$, on a terminé.

Sinon, soit
$$\dim_{\mathbb{K}} N_{j-1} = \dim_{\mathbb{K}} N_j - 1$$
et l'on pose
$$E_{i-1} = N_{j-1}\ ;$$
soit on « intercale » le nombre de E_k qu'il faut. Plus précisément il existe $E_k\ _{,i-(\dim_{\mathbb{K}} N_j - \dim_{\mathbb{K}} N_{j-1})\leq k\leq i}$ tel que

$$E_{i-(\dim_{\mathbb{K}} N_j - \dim_{\mathbb{K}} N_{j-1})} = N_{j-1}\ ,\ E_k \subset E_{k+1} \text{ et } \dim_{\mathbb{K}} E_k = k\,.$$

Comme par ailleurs $E_k \subset N_j$,
$$f(E_k) \subset f(N_j) \subset N_{j-1} \subset E_{k-1}\,.$$

5) () Dans le cas où $\varepsilon = n$, montrer qu'il existe une base où la matrice de f est

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Solution : *Dans le cas où $\varepsilon = n$, la famille libre $f^i(x)\ _{,0\,\leq\, i\,\leq\, \varepsilon-1}$ (cf. question 1),) est une base de E dans laquelle la matrice de f est précisément* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. On pourra même calculer très précisément ces sauts (cf. exercice C, question 3), exercice C, question 4) ;) mais on a alors supposé qu'on disposait d'une réduite de JORDAN ce dont on peut se passer ici.

6) () Quand $\varepsilon = n$, décrire complètement la suite $\dim_{\mathbb{K}} N_i\ _{,i\,\in\,\mathbb{N}}$.
Solution : *Choisissons une base $e_i\ _{,0\leq i\leq n-1}$ donnée par un vecteur*

$$x \in E \text{ tel que } \{e_i := f^i(x)\}\ _{,0\,\leq\,i\,\leq\,\varepsilon-1} \text{ soit une base de } E \text{ (cf. question 1) .)}$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall 1\leq i\leq n,\quad \forall 0\leq j\leq n-1-i,\ f^i(e_j) & = & e_{i+j} \\ \forall n-i\leq j\leq n-1,\ f^i(e_j) & = & 0\,. \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{ll} f_{|\mathrm{Vect}\left\{e_j\ _{,0\leq j\leq n-1-i}\right\}} & \textit{est injective} \\ f_{|\mathrm{Vect}\left\{e_j\ _{,n-i\leq j\leq n-1}\right\}} & \textit{est nulle}\ . \end{array}$$

Comme par ailleurs

$$E = \mathrm{Vect}\left\{e_j\ _{,0\leq j\leq n-1-i}\right\} \oplus \mathrm{Vect}\left\{e_j\ _{,n-i\leq j\leq n-1}\right\},$$

on en déduit que

$$\forall 0\leq i\leq n-1,\ N_i = \mathrm{Vect}\left\{e_j\ _{,n-i\leq j\leq n-1}\right\} \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} N_i = i\,.$$

Enfin $f^n = 0$, si bien que

$$\forall i\in\mathbb{N},\ i \geq n = \dim_{\mathbb{K}} N_i = n\,.$$

Exercice B : (Injection de FROBENIUS)

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de E.

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^\varepsilon = 0 \,\mathrm{et} f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \textbf{on note}\ N_k := \mathrm{Ker}\, f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}_E$.)

On note

$$\forall i\in\mathbb{N}^*,\ d_i := \dim_{\mathbb{K}} N_i - \dim_{\mathbb{K}} N_{i-1}\,.$$

Il est vraisemblable que nombre des énoncés de cet exercice peuvent être obtenus comme corollaires du théorème IV.10.10 de réduction de JORDAN, mais on va chercher à les établir ici par des méthodes plus élémentaires.

1) (0.5points) Étant donnés un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie et $W \subset V$ un sous-espace de V, , rappeler ce que vaut $\dim_{\mathbb{K}} V/W$ en fonction de $\dim_{\mathbb{K}} V$ et $\dim_{\mathbb{K}} W$.
Solution : *On a*

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W + \dim_{\mathbb{K}} V/W$$

en application par exemple du théorème I.9.19 qui se déduit en fait du fait que V/W est isomorphe à n'importe qu'elle supplémentaire de W dans V.

2) (0.5points) Montrer que

$$\forall i\in\mathbb{N},\ d_i \geq 0\,.$$

Solution : *(cf. exercice A, question 3),) d'où l'on peut même déduire plus précisément que*

$$\forall 1\leq i\leq\varepsilon,\ d_i > 0 \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ k > \varepsilon \Rightarrow d_k = 0\,.$$

3) (0.5points) Vérifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la restriction $f_{|N_{i+1}}$ de f à N_{i+1} est à valeurs dans N_i.
Solution :

$$\forall x\in N_{i+1},\ u^i[u(x)] = u^{i+1}(x) = 0 \Leftrightarrow u(x) \in N_i\,.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, **on note**

$$p_i : N_{i+1} \to N_{i+1}/N_i \textbf{ la surjection canonique} .$$

4) (1point) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un unique morphisme

$$f_i : N_{i+2}/N_{i+1} \to N_{i+1}/N_i tq\ f_i \circ p_{i+1} = p_i \circ f_{|N_{i+2}} .$$

Solution : *Considérons le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} N_{i+1} & \hookrightarrow & N_{i+2} \\ {\scriptstyle f_{|N_{i+1}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_{|N_{i+2}}} \\ N_i & \hookrightarrow & N_{i+1} \end{array}$$

dont les flèches horizontales sont injectives. On obtient, par factorisation un morphisme

$$f_i : N_{i+2}/N_{i+1} \to N_{i+1}/N_i$$

si bien qu'on a un morphisme de suites exactes (c'est-à-dire un diagramme commutatif à lignes exactes) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & N_{i+1} & \longrightarrow & N_{i+2} & \xrightarrow{p_{i+1}} & N_{i+2}/N_{i+1} & \to & 0 \\ & & {\scriptstyle f_{|N_{i+1}}} \downarrow & & {\scriptstyle f_{|N_{i+2}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f_i} & & \\ 0 & \to & N_i & \longrightarrow & N_{i+1} & \xrightarrow{p_i} & N_{i+1}/N_i & \to & 0 \end{array} .$$

5) (1point) Montrer que

$$\forall i \in \mathbb{N},\ f_i \text{ est injective } .$$

On l'appellera l'*injection de* FROBENIUS.

Solution :

$$\forall y \in N_{i+2}/N_{i+1},\ \exists x \in N_{i+2}, \text{ tel que } p_{i+1}(x) = y .$$

Alors :

$$\begin{array}{rrcl} & f_i(y) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & f_i[p_{i+1}(x)] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & p_i[u(x)] & = & 0 \\ \Leftrightarrow & u(x) & \in & N_i \\ \Rightarrow & x & \in & N_{i+1} \\ \Rightarrow & p_{i+1}(x) & = & 0 \\ \Rightarrow & y & = & 0 . \end{array}$$

Ainsi f_i est injective.

6) (0.5points) Déduire de ce qui précède que $d.$ est décroissante.

Solution :

$$\begin{array}{rcl} \forall i \in \mathbb{N}, \quad d_{i+1} - d_i & = & \big(\dim_{\mathbb{K}} N_{i+1} - \dim_{\mathbb{K}} N_i\big) \\ & & -\big(\dim_{\mathbb{K}} N_i - \dim_{\mathbb{K}} N_{i-1}\big) \qquad \textit{(cf. question 1) .)} \\ & = & \dim_{\mathbb{K}} N_{i+1}/N_i - \dim_{\mathbb{K}} N_i/N_{i-1} \end{array}$$

Or f_{i-1} étant injectif (cf. question 5),)

$$\dim_{\mathbb{K}} N_{i+1}/N_i \leq \dim_{\mathbb{K}} N_i/N_{i-1}$$

ce qui conclut.

Exercice C : **(Tableaux de YOUNG)**

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de E.

On suppose qu'il existe un entier $\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f^{\varepsilon} = 0 \,\mathrm{et} f^{\varepsilon-1} \neq 0$$

autrement dit tel que f soit nilpotent d'échelon (d'indice) ε (cf. cours IV.8.1.)

Étant donné un endomorphisme $f \in \mathrm{End}(E)$ de E,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \textbf{on note } N_k := \mathrm{Ker}\, f^k \text{ et } n_k := \dim N_k$$

(avec la convention que $f^0 = \mathrm{Id}_E$.)

1) (0.5points) Justifier, en citant précisément le théorème que vous utilisez, mais sans le redémontrer bien entendu, qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$, des entiers strictement positifs $r_j\ ,_{1\leq j\leq m}$ et des sous espaces $E_j\ ,_{1\leq j\leq m}$ tels que :

J_1)

$$E = \bigoplus_{j=1}^{m} E_j \ ;$$

J_2) $\forall 1 \leq j \leq m,\ E_j$ est stable par f ;

J_3)

$$\forall 1 \leq j \leq m-1,\ r_j \geq r_{j+1} \ ;$$

J_4) le sous-espace $(E_j, f_{|E_j})$ est cyclique de polynômes minimal X^{r_j}.

Solution : *Le polynôme minimal de f est X^{ε}. Il est sindé et n'a qu'un facteur irréductible, si bien que dans ce cas, aussibien le théorème IV.11.5 de réduction de* FROBENIUS *que le théorème IV.10.10 donne le résultat demandé.*

2) (0.5points) Que vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} r_j$?

Solution : *Puisque les sous-espaces $E_j\ ,_{1\leq j\leq m}$ sont cycliques, on a :*

$$\forall 1 \leq j \leq m,\ \dim_{\mathbb{K}} E_j = \deg(P_{min\, f_{|E_j}}) = r_j \ \textit{(cf. IV.4.1 .)}$$

Or il résulte de question 1), J_1) que

$$n = \dim_{\mathbb{K}} E = \sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{K}} E_j = \sum_{j=1}^{m} r_j \ .$$

On peut donc trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est J :

Pour tout $r \leq n$, soit

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

le bloc de JORDAN "élémentaire".

La matrice J est donc de la forme

$$J = \textbf{diag}\,(J_{r_1}, J_{r_2}, \cdots, J_{r_m}) = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r_m} \end{pmatrix}$$

pour un certain entier m .

3) (0.5points) (**Décomposition des noyaux**)

Notons

$$\forall 1 \leq i \leq m,\ f_i \ := \ f_{|E_i} \ .$$

Pour tout $k \ \in \ \mathbb{N}$ et tout $1 \ \leq \ i \ \leq \ m$, donnez une relation entre les $n_{i,k} \ := \ \dim \operatorname{Ker} f_i^k$ et n_k .

Solution : *Étant donné un endomorphisme u d'un espace vectoriel E tel que E soit somme directe des F_α $_{,1\leq\alpha\leq q}$, stables par u, alors*

$$\operatorname{Ker} u \ = \ \bigoplus_{\alpha=1}^{q} \operatorname{Ker} u \cap F_\alpha \ .$$

De plus, $\operatorname{Ker} u \cap F_\alpha$ *est le noyau de la restriction u_α de u à F_α .*

En effet pour tout $x \in \operatorname{Ker} u$, il existe un unique q-uplet $(x_1, \ldots, x_q)$ $x_\alpha \in F_\alpha$, tel que $x \ = \ \sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha$. Par conséquent

$$\begin{array}{rcl} u(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \quad u(\sum_{\alpha=1}^{q} x_\alpha) & = & 0 \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{q} u(x_\alpha) & = & 0 \ . \end{array}$$

Or chacun des F_α étant stable par u, pour tout $1 \ \leq \ \alpha \ \leq \ q$, $u(x_\alpha) \in F_\alpha$. La décomposition de 0 étant unique sur les F_α, il en résulte que pour tout $1 \ \leq \ \alpha \ \leq \ q$, $u(x_\alpha) = 0$.

On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker} u$ *est inclus dans la somme des* $\operatorname{Ker} u \cap F_\alpha$.

Cette dernière somme est directe car la décomposition de tout vecteur de E étant unique sur les F_α ceci est a fortiori vrai pour un élément de la somme des $\operatorname{Ker} u \cap F_\alpha$ *. Cette décomposition reste bien évidemment unique sur des sous-espaces des F_α .*

L'inclusion réciproque est claire.

Enfin si u_α désigne la restriction de u à F_α, pour tout $x \in F_\alpha$, $u_\alpha(x) = 0$ équivaut à $x \in F_\alpha$ et $u(x) = 0$, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} u \cap F_\alpha$ *est bien le noyau de la restriction de u à F_α .*

On applique le résultat précédent à $u \ := \ f^k$ et à la décomposition de E en somme directe des E_i $_{,1 \ \leq \ i \ \leq \ m}$, en ayant soin de remarquer que la restriction de f^k à E_i est bien f_i^k, et on en déduit que

$$n_k \ = \ \sum_{i=1}^{m} n_{i,k} \ .$$

4) (0.5points) Établir la valeur de $n_{i,k}$ en fonction de k et de r_i.

Solution : *Si $f_i \ := \ f_{|E_i}$ désigne, pour tout $1 \ \leq \ i \ \leq \ m$ la restriction de f à E_i, f_i est nilpotante d'échelon $r_i \ = \ \dim_{\mathbb{K}} E_i$.*

On a donc

$$\forall 0 \leq k \leq r_i,\ n_{i,k} \ = \ k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ k \ \geq \ r_i \ \Rightarrow \ n_{i,k} \ = \ r_i \textit{ (cf. exercice A, question 6) ,)}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$n_{i,k} \ = \ \min(k, r_i) \ .$$

5) (0.5points) En déduire que

$$n_1 \ := \ \dim \operatorname{Ker} f \ = \ m \text{ et } n_k \ = \ \sum_{i=1}^{m} \min(k, r_i) \ .$$

Solution : *Pour tout $1 \ \leq \ i \ \leq \ m$, on a $r_i \geq 1$, ce qui implique (cf. question 4),) que $n_{i,1} = 1$ et par conséquent $n_1 = m$.*

$$n_k \ = \ \sum_{i=1}^{m} n_{i,k} \ = \ \sum_{i=1}^{m} \min(r_i, k) \ . \textit{ (cf. question 3) , question 4))}$$

On définit le *tableau de* YOUNG de (E, f) comme le tableau constitué de m lignes, alignées sur la gauche et tel que la $j^{\text{ème}}$ ligne comporte r_j cases. Par exemple si $m = 3, (r_1, r_2, r_3) = (5, 4, 1)$, le tableau de YOUNG est

$$Y(E, f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & & & & \end{pmatrix} .$$

6) (1.5points) Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $d_j := \dim_{\mathbb{K}} N_j - \dim_{\mathbb{K}} N_{j-1}$ est la hauteur (le nombre de cases) de la $j^{\text{ème}}$ colonne du tableau de YOUNG $Y(E, f)$.

Solution : *Si l'on note h_j la hauteur de la $j^{\text{ème}}$ colonne du tableau de* YOUNG*, par construction*

$$h_j = \#\big(\{i \in \mathbb{N} \,;\, r_i \geq j\}\big) .$$

Puisque le tableau de YOUNG *est construit en rangeant les r_i par ordre décroissant, on a*

$$\forall 1 \leq i \leq h_j,\ r_i \ \geq j \text{ et } \forall h_j + 1 \leq i \leq m,\ r_i \ < \ j .$$

Alors

$$\begin{array}{rcccccc} \forall 1 \leq i \leq h_j, & n_{i,j} & = & j & \text{et} & n_{i,j-1} & = & j-1 \\ \forall h_j + 1 \leq i \leq m, & n_{i,j} & = & r_j & \text{et} & n_{i,j-1} & = & r_j \end{array} \quad \textit{(cf. question 4) .)}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} d_j &= n_j - n_{j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{m} n_{i,j} - n_{i,j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{h_j} n_{i,j} - n_{i,j-1} + \sum_{i=h_j+1}^{m} n_{i,j} - n_{i,j-1} \\ &= \sum_{i=1}^{h_j} j - (j-1) + \sum_{i=h_j+1}^{m} r_j - r_j \\ &= h_j . \end{aligned}$$

7) (1.5points) **a)** (1.5points) Donner les invariants de similitudes de f nilpotent dont le tableau de YOUNG est

$$Y(E, f) = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & & & & \end{pmatrix} .$$

Solution : *On a immédiatement*

$$m = 3 \,,\ r_1 = 5 \,,\ r_2 = 4 \text{ et } r_3 = 1 .$$

b) (1.5points) Quelle est la dimension de E ?

Solution :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \sum_{i=1}^{m} r_i = 5 + 4 + 1 = 10 . \ \textit{(cf. question 2) .)}$$

c) (1.5points) Quels sont le tableau de YOUNG de f^2 et ses invariants de similitude.

Solution : *Cette question est l'une de celles qui met le mieux en évidence l'intérêt des tableaux de* YOUNG *dans l'études des endomorphismes nilpotents. En effet ces tableaux mettent en relation (leur lignes) les invariants de similitude $r_i\ _{,1 \leq i \leq m}$ d'un endomorphisme nilpotent et les sauts (les colonnes) dans la suite des noyaux itérés $d_j\ _{,1\ \leq\ j\ \leq\ r_1}$. Comme chaque fois qu'on établit de telles correspondances il se peut que, suivant les situations, certains invariants soient plus facile à calculer ; ce qui permet de déterminer les autres.*

Typpiquement si l'on note $g := f^2$, on va constater que les sauts dans la suites des noyaux sont assez faciles à déterminer alors qu'il semble beaucoup moins immédiat de calculer les invariants de similitude. En effet,

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} g^j - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} g^{j-1} &= \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f^{2j} - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f^{2j-2} \\ &= n_{2j} - n_{2j-2} \\ &= (n_{2j} - n_{2j-1}) + (n_{2j-1} - n_{2j-2}) . \end{aligned}$$

Il faut donc « empiler l'une sur l'autre » (cf. question 6),) deux colonnes successives du tableau de f pour obtenir celui de g. Il en résulte, dans le cas particulier considéré ici que

$$Y(E, f^2) \;=\; Y(E, g) \;=\; \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & \\ * & * & \\ * & * & \\ * & & . \end{pmatrix} .$$

Il an résulte que

$$m \;=\; 5 \;,\; r_1 \;=\; 3 \;,\; r_2 \;=\; r_3 \;=\; r_4 \;=\; 2 \;=\; r_5 \;=\; 1 \;.$$

Exercice D : **(Commutant)**

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$. On appelle *commutant de* u et on note

$$\mathrm{Com}(u) \;:=\; \{v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)\;;\; u \circ v \;=\; v \circ u\} \;\subset\; \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$$

l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec u. On rappelle que $\mathbb{K}[u] \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ est l'ensemble des polynômes en u *i.e.* l'image de $\mathbb{K}[X]$ par le morphisme $X \mapsto u$.

1) (0.5points) Montrer que $\mathrm{Com}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$.

Solution : *Il est clair que l'application nulle et l'identité de E appartiennent à $\mathrm{Com}(u)$ qui est donc non vide. Par ailleurs pour v et w dans $\mathrm{Com}(u)$, a et b dans $\mathbb{K}$,*

$$\begin{aligned} u \circ (av + bw) &= u \circ av + u \circ bw \\ &= av \circ u + bw \circ u \\ &= (av + bw) \circ u \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $av + bw \in \mathrm{Com}(u)$ ce qui prouve que $\mathrm{Com}(u)$ est un sous espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$.

On peut également constater que l'application

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \;\to\; \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E) \;,\; v \;\mapsto\; u \circ v \;-\; v \circ u$$

est linéaire et que $\mathrm{Com}(u)$ est son noyau.

2) (2points) **On suppose dans cette question que u est cyclique et que $x_0 \in E$ est un vecteur cyclique pour u.**

a) (1points) En considérant l'application

$$\varphi \;:\; \mathrm{Com}(u) \;\to\; E \;,\; v \;\mapsto\; v(x_0),$$

montrer que l'on a $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) \;\leqslant\; n$.

Solution : *Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$ tel que $\phi(v) = 0$ c'est-à-dire que $v(x_0) \;=\; 0$. On en déduit alors que*

$$\forall 1 \leq k \leq n-1,\; v[u^k(x_0)] \;=\; u^k[v(x_0)] \;=\; u^k(0) \;=\; 0$$

c'est-à-dire que v s'annule sur une base de E et donc que $v \;=\; 0$.

Il s'ensuit que ϕ est injective ce qui entraîne

$$\dim \mathrm{Com}(u) \;\leq\; \mathrm{rg}(\phi) \;\leq\; \dim E \;\leq n \;.$$

b) (1point) Montrer que $\dim \mathbb{K}[u] \;\geq\; n$ et que

$$\mathrm{Com}(u) \;=\; \mathbb{K}[u] \;.$$

On pourra remarquer, en particulier que si u est nilpotent d'échelon n (cf. cours IV.8.1,)

$$\mathrm{Com}(u) \;\cong\; \mathbb{K}[u] \;.$$

Solution :

i) Considérons la famille $F_U := \{u^i\}_{,0 \le i \le n-1} \subset \mathbb{K}[u]$. *Pour tout* n*-uplet* $(a_0, \dots, a_{n-1})$ *d'éléments de* $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x_0) &= 0 \\ \Rightarrow \qquad a_i &= 0 \; \forall 0 \le i \le n-1, \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{B}$ *est une base de* E. *Il en résulte que* F_u *est une famille libre de cardinal* n *de* $\mathbb{K}[u]$ *qui est donc de dimension au moins* n.

On pourrait aussi voir que

$$\mathbb{K}[u] \cong \mathbb{K}[X]/P_{\min u}$$

qui est (cf. TD n° V, exercice C,) un espace vectoriel de dimension $\deg(P_{\min u})$. *Or* u *étant cyclique*

$$\deg(P_{\min u}) = n \text{ (cf. IV.4.1 .)}$$

ii) Pour tout $v \in \mathbb{K}[u]$, *il existe*

$$a_{i\ ,0 \le i \le k} \in \mathbb{K} \text{ tel que } v = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} u \circ v &= u \circ \big(\sum_{i=0}^{k} a_i u^i\big) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i u^{i+1} \\ &= \big(\sum_{i=0}^{k} a_i u^i\big) \circ u \\ &= v \circ u . \end{aligned}$$

Il en résulte donc que $\mathbb{K}[u] \subset \mathrm{Com}(u)$ *ce qui combiné aux inégalités précédemment obtenues sur les dimensions donne finalement*

$$\mathbb{K}[u] = \mathrm{Com}(u) .$$

3) (0.5point) Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ avec E_i stable par u. Comparer

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) \text{ et } \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u_{|E_i}) .$$

Solution : *Notons* $\forall 1 \le i \le r,\ u_i := u_{|E_i}$. *Pour tout* $v_{i\ ,1 \le i \le r} \in \mathrm{Com}(u_i)$ *notons* $v \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ *l'unique endomorphisme de* E *défini par*

$$\forall x := \sum_{i=1}^{r} x_{i\ ,x_i \in E_i} \in E,\ v(x) := \sum_{i=1}^{r} v_i(x_i) .$$

Notons que si l'on s'est donné des bases des sous-espaces E_i *dont la réunion forme une base de* E, *ce qui précède revient à écrire la matrice de* v *par blocs. De manière plus abstraite, c'est une conséquence de la proposition A.4.7.*

Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad u[v(x)] &= u\big(\sum_{i=1}^{r} v(x_i)\big) \\ &= u\big(\sum_{i=1}^{r} v_i(x_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{r} u[v_i(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{r} u_i[v_i(x)] \\ &= \sum_{i=1}^{r} v_i[u_i(x_i)] \\ &= v\big(\sum_{i=1}^{r} u_i(x_i)\big) \\ &= v[u(x)] . \end{aligned}$$

On construit ainsi une application

$$\gamma \;:\; \prod_{i=1}^{r} \mathrm{Com}(u_i) \;\to\; \mathrm{Com}(u)\;.$$

C'est une vérification assez pénible mais sans grande difficulté que de montrer que γ est linéaire. De plus :

$$\begin{array}{lrcl} \forall v_{i\;,1\le i\le r} \in \prod_{i=1}^{r}\mathrm{Com}(u_i), & \gamma(v) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \forall 1\le i\le r,\ \forall x\in E_i,\ \gamma(v)(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & v_i(x) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \forall 1\le i\le r,\ v_i & = 0\,; & \end{array}$$

c'est-à-dire que γ est injective ; d'où l'on déduit que

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u_i) \;=\; \dim_{\mathbb{K}}\big(\prod_{i=1}^{r}\mathrm{Com}(u_i)\big) \;\le\; \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u)\;.$$

4) (2.5points) **On suppose que** $E \;=\; E_1 \;\oplus\; E_2$, **où** E_i **est stable par** u, **cyclique de polynôme minimal** μ_i **avec** $\mu_2|\mu_1$.

a) (0.5points) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$M_{\mathcal{B}}(u) \;=\; \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & 0 \\ 0 & C_{\mu_2}\end{pmatrix}$$

où pour tout polynôme $R \;\in\; \mathbb{K}[X]$, C_R désigne la matrice compagnon de R.

Solution : *Par définition des espaces Cycliques (cf. cours IV.4.1.)*

b) (1.5point) En déduire qu'il existe un endomorphisme $v \;\in\; \mathrm{Com}(u) \;\setminus\; \{0\}$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_{\mathcal{B}}(v) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0\end{pmatrix}.$$

Solution : *Si un tel v existe :*

$$\begin{array}{lrcl} & M_{\mathcal{B}}(u)M_{\mathcal{B}}(v) - M_{\mathcal{B}}(v)M_{\mathcal{B}}(u) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} C_{\mu_1} & 0 \\ 0 & C_{\mu_2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_{\mu_1} & 0 \\ 0 & C_{\mu_2}\end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{\mu_2}A & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ AC_{\mu_1} & 0\end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & C_{\mu_2}A - AC_{\mu_1} & = & 0\,. \end{array}$$

Une matrice non nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0\end{pmatrix}$ par blocs correspond à un morphisme $v \;:\; E_1 \;\to\; E_2$. La condition de commutation correspond à $v \;\circ\; u_1 \;=\; u_2 \;\circ\; v$ ce qui signifie exactement que v est un morphisme de $\mathbb{K}[X]$-modules (cf. cours IV.1.) Or $E_i \;=\; \mathbb{K}[X]/\mu_i$ avec $\mu_2|\mu_1$. On sait bien que dans ce cas, on a un morphisme naturel factorisant les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbb{K}[X]/\mu_1 & \to & \mathbb{K}[X]/\mu_2\,. \end{array}$$

Si l'isomorphisme $E_i \;\cong\; \mathbb{K}[X]/\mu_i$ est donné par un vecteur cyclique x_i, dans les identifications ci-dessus, v est l'unique morphisme

$$v \;:\; E_1 \;\to\; E_2\;,\; x_1 \;\mapsto\; x_2 \text{ et } v \;\circ\; u_1 \;=\; u_2 \;\circ\; v\;.$$

c) (0.5points) Montrer que

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) \;>\; n\;.$$

Solution : *Pour $i \;=\; 1$ ou 2, notons*

$$V_i \;:=\; \big\{v \;\in\; \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)\;;\; E_{j\;,j\;=\;1 \text{ ou } 2} \text{ est stable par } v\;,\; v_{|E_i} \;\in\; \mathrm{Com}(u_{|E_i})\;,\; v_{|E_{3-i}} \;=\; 0\big\}\;.$$

On a alors $V_i \;\cong\; \mathrm{Com}(u_{|E_i})$, $V_i \;\subset\; \mathrm{Com}(u)$ et la somme $V_1 + V_2$ est directe. On en déduit que

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) \;\ge\; \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 \;\ge\; \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2$$

en utilisant les résultats de la question 2). Or l'endomorphisme v construit en b) n'appartient pas à $V_1 \;\oplus\; V_2$ ce qui rend strict l'inégalité précédente.

5) (1point) Déduire de ce qui précède que, si u n'est pas cyclique $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) > n$; puis que $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) = n$ si et seulement si u est cyclique.

Solution : *On a vu (cf. question 2), b),) que lorsque u est cyclique $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) = n$.*

Si u n'est pas cyclique, il existe en vertu du théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS *une décomposition de*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

en sous-espaces cycliques. L'énoncé d'unicité IV.11.5.2) dans le théorème loc. cit., assure alors que nécessairement $r \geq 2$. En appliquant alors un argument de récurrence sur r, on montre (cf. question 4),) que

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Com}(u) > n .$$

Exercice E : (Une question réciproque)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n .

On cherche dans ce problème à savoir s'il existe des endomorphismes nilpotents de E dont la dimension des noyaux itérés est arbitrairement fixée. Si c'est le cas, on essayera de les déterminer, au moins à conjugaison près. Il est recommandé de traiter l'exercice C avant le présent exercice. On y a, en effet étudié certains invariants liés à la suite des noyaux itérés en grand détail ; ce qui pourra s'avéré très utile pour traiter les questions qui suivent.

L'objectif de cet exercice est de déterminer quelles sont les suites finies d'entiers $n_k\,_{,0\leq k\leq n}$, $n_k \leq n$, pour lesquelles il existe un endomorphisme <u>nilpotent</u> $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ de E tel que

$$\forall 1 \leq k \leq n, \;\; , \dim \mathrm{Ker}\, f^k = n_k . \qquad \mathbf{1}$$

Soit donc donnée, dans toute cette partie, une suite n_k satisfaisant les hypothèses ci-dessus. On suppose qu'il existe f nilpotent vérifiant la condition 1 et l'on cherche à en tirer un certain nombre de conséquences.

On cherche au moins à déterminer la classe de conjugaison de f comme ci-dessus et, par conséquent, on peut se placer dans une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est une réduite de JORDAN notée J .

Pour tout $r \leq n$, soit

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

le bloc de JORDAN "élémentaire".

La matrice J est donc de la forme

$$J = \mathbf{diag}\,(J_{r_1}, J_{r_2}, \cdots, J_{r_m}) = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{r_m} \end{pmatrix}$$

pour un certain entier m .

1) (2pts) Pour toute permutation σ de l'ensemble $[1;m]$, montrer que les matrices J et

$$J_\sigma := \mathrm{diag}\,(J_{r_{\sigma(1)}}, J_{r_{\sigma(2)}}, \cdots, J_{r_{\sigma(m)}})$$

obtenue en permutant les blocs de JORDAN, sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une matrice <u>inversible</u>

$$P_\sigma \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \text{ telle que } J = P_\sigma\, J_\sigma\, P_\sigma^{-1} ,$$

ou encore qu'il existe une autre base $\mathcal{B}_\sigma$ dans laquelle la matrice de f est également une réduite de JORDAN.

Solution : *On peut donner deux arguments diférents :*

i) ***(Construction d'une matrice de permutation)***

Nous avons déjà remarqué que l'écriture de la matrice J de f par blocs signifie qu'on a une décomposition de l'espace vectoriel E en somme directe de sous-espaces E_i de dimension r_i stables par f . L'écriture par blocs de la matrice J signifie également qu'on a choisi une base $\mathcal{B}$ de E réunion de bases

$$\mathcal{B}_i := \{b_{ij}\,_{,1 \leq j \leq r_i}\} ,$$

où $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i .

On construit une base

$$\mathcal{B}_\sigma \ := \ \{b_{\sigma,\alpha\ ,1\leq\alpha\leq n}\ \}$$

de E de la manière suivante :

Pour tout $1 \leq \alpha \leq n$, il existe un unique $1 \leq i_\alpha \leq m$ tel que

$$\beta \ := \ \sum_{i<i_\alpha} r_{\sigma(i)} \ < \ \alpha \ \leq \ \sum_{i\leq i_\alpha} r_{\sigma(i)} \ .$$

Posons

$$b_{\sigma,\alpha} \ := \ b_{\sigma(i_\alpha),\alpha-\beta} \ .$$

Il n'est alors pas difficile de vérifier que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_\sigma$ est J_σ .

ii) ***(En utilisant les théorème de réduction (cf. cours IV.10 , IV.11))***

En effet les matrices J et J_σ ont les mêmes paramètres de JORDAN *(cf. cours IV.10.2 ;) ce qui entraîne, en vertu du corollaire IV.10.13.i), que J et J_σ sont conjugués.*

De manière équivalente, dans le cas des matrices nilpotentes, (ou plus généralement n'ayant qu'une valeur propre) la réduction de JORDAN *est également la réduction de* FROBENIUS *et l'on constate que les matrices J et J_σ ont mêmes invariants de similitude (cf. cours IV.11.9 ;) ce qui assure en vertu du corollaire IV.11.8 qu'elles sont semblables.*

2) (3pts) (**Pentes**)

Pour tout

$k \in \mathbb{N}^*$ **on note encore** $d_k \ := \ n_k \ - \ n_{k-1}$. **(cf. exercice C, question 6) .)**

Montrer qu'alors d_k est le nombre d'indice j tel que $r_j \ \geq k$.

Solution : *On a en fait déjà répondu à cette question (cf. exercice C, question 6).)En effet on a :*

$$\begin{aligned} d_k \quad &= \quad n_k - n_{k-1} \\ &\underset{exercice\ C, question\ 3)}{=} \sum_{i=1}^m n_{i,k} - n_{i,k-1} \\ &\underset{exercice\ C, question\ 4)}{=} \sum_{i=1}^m \min(r_i,k) - \min(r_i,k-1)\ . \end{aligned}$$

Or $\min(r_i,k) - \min(r_i,k-1)$ vaut 1 si et seulement si $r_i \ \geq \ k$ et vaut 0 sinon. On en déduit que d_k est le nombre de blocs de dimension supérieure ou égale à k . En particulier que $d_1 \ = \ n_1$ est la dimension du noyau de f soit le nombre de blocs (de taille supérieure ou égale à 1 dans J .)

3) (2pt) (**Nombre de blocs**)

En déduire que pour tout $k \geq 0$, $d_k - d_{k+1}$ est exactement le nombre d'indices $1 \ \leq \ j \ \leq \ m$ tels que $r_j \ = \ k$. Remarquer qu'on obtient à nouveau ainsi l'énoncé de décroissance établi à l'exercice B, question 6) sans avoir recours à l'injection de FROBENIUS et par un argument particulièrement élémentaire. Qu'en pensez-vous ?

Solution : *C'est une conséquence immédiate de question 2). À noter qu'on a montré (cf. exercice B, question 6),) que $d.$ est décroissante. Il pourrait sembler surprenant qu'on ait dépensé tant d'énergie à établir ce résultat dans l'exercice B alors qu'il semble découler ici d'un simple argument de comptage très élémentaire. Si la différence $d_k - d_{k+1}$ représente en effet un cardinal fini, c'est par nature un entier positif. On remarquera qu'on n'a pas fait dans l'exercice B l'hypothèse que l'endomorphisme f possède une réduction de* JORDAN. *On conseillerait bien volontiers au lecteur de se reporter aux preuves des théorème IV.10.10 de réduction de* JORDAN *et IV.11.5 de réduction de* FROBENIUS *pour constater à quel point cette hypothèse n'est pas gratuite !*

On suppose que $n \ = \ 25$, **on donne la suite**

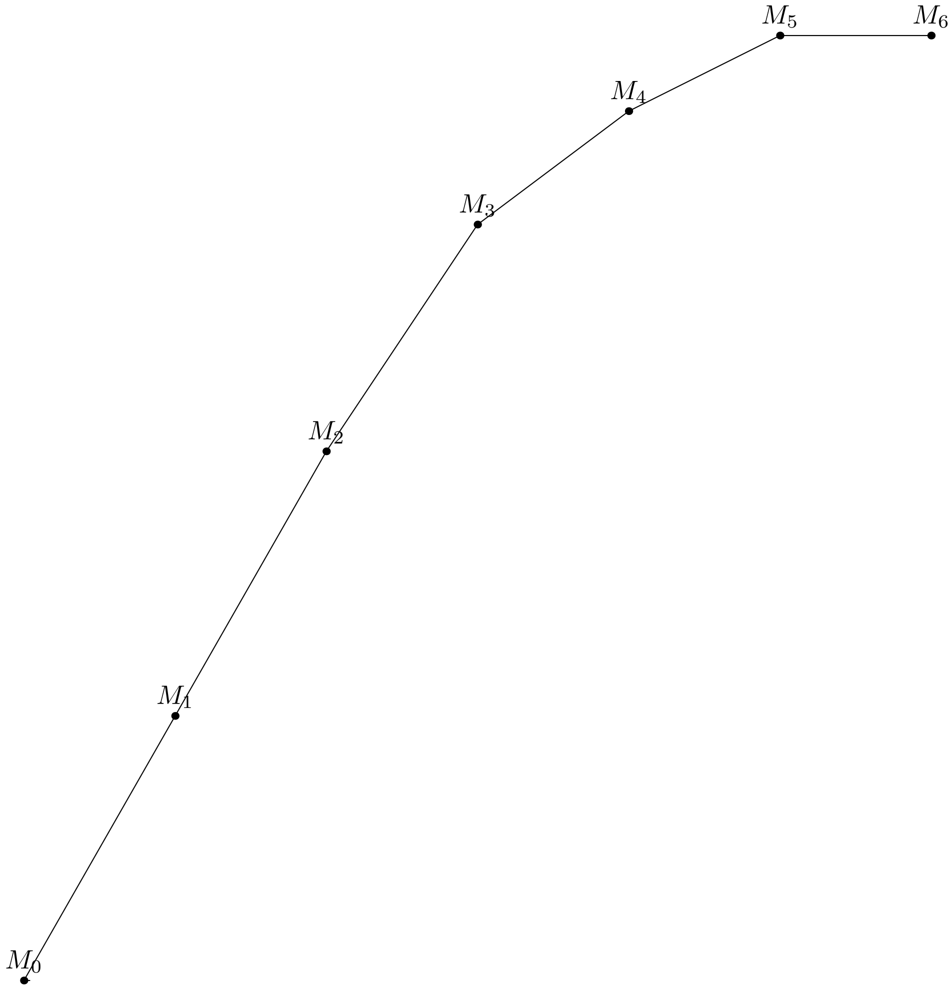
$$n_1 \ = \ 7 \ , \ n_2 \ = \ 14 \ , \ n_3 \ = \ 20 \ , \ n_4 \ = \ 23 \ , \ n_5 \ = \ 25 \ .$$

Un endomorphisme f **vérifiant 1 pour cette suite est donc nilpotent d'échelon** 5 .

4) (1pt) (**Polygône**)

On note $M_k \ := \ (k, n_k)_{\ ,0\ \leq\ k\ \leq\ 5}$. Tracez le graphe obtenu en reliant M_k et M_{k+1} par un segment de droite.

Solution :



5) (4pt) **a)** (1pt) Interpréter géométriquement dans ce cas les d_k de la question 2).

Solution :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; d_k \; = \; n_k - n_{k-1} \; = \; \frac{n_k - n_{k-1}}{k - (k-1)}$$

qui et donc la pente du segment $[M_{k-1}; M_k]$ *ou de manière équivalente la dérivée de la fonction affine par morceaux définissant le graphe sur l'intervalle* $]k-1; k[$.

b) (1pt) Montrer que le graphe correspond à une fonction concave.

Solution : *On a montré (cf. question 3),) ou (cf. exercice B, question 6),) que* $d.$ *est décroissante ; ce qui combiné avec l'identification précédente de* $d.$ *avec la pente du graphe, assure que ce dernier est concave.*

c) (2pt) À quoi correspondent les points anguleux de ce graphe ?

Solution : *Le point* M_k *du graphe est anguleux si et seulement si la pente "à gauche" de* M_k (d_k) *est différente de la pente "à droite" de* M_k $(d_{k+1}\;;)$ *autrement dit si et seulement si* $d_k - d_{k+1}$ *est non nul. Or nous avons vu (cf. question 3),) que cette différence est précisément le nombre de blocs de* JORDAN *élémentaires de taille* k *dans la matrice de* f *. Il s'ensuit que le point* M_k *est anguleux si et seulement si la matrice de* f *comporte des blocs de taille* k *.*

6) (4pts) Montrer l'existence d'un endomorphisme nilpotent d'échelon 5 vérifiant 1 pour la suite n_k donnée dans cette question. Que peut-on dire de tous les endomorphismes solutions du problème ?

Solution :

*i) **(Conditions nécessaires)***

On sait (cf. question 3),) que s'il existe un endomorphisme f *vérifiant 1, nécessairement il existe une base de* E *dans laquelle sa matrice est sous forme de* JORDAN *et comporte :*

$$\begin{array}{lclcll}
d_1 - d_2 & = & 2n_1 - n_2 & = & 0 & \text{blocs de taille } 1 \\
d_2 - d_3 & = & 2n_2 - n_1 - n_3 & = & 1 & \text{blocs de taille } 2 \\
d_3 - d_4 & = & 2n_3 - n_2 - n_4 & = & 3 & \text{blocs de taille } 3 \\
d_4 - d_5 & = & 2n_4 - n_3 - n_5 & = & 1 & \text{blocs de taille } 4 \\
d_5 - d_6 & = & 2n_5 - n_4 - n_6 & = & 2 & \text{blocs de taille } 5 .
\end{array} .$$

Il faut remarquer que, même s'il n'est pas donné, nécessairement $n_6 = 25$. *On constate que* $2 + 3 * 3 + 4 + 2 * 5 = 25$ *ce qui fait qu'on a bien réalisé une partition de* 25. *On choisit donc une base de* E *et l'on définit* f *comme l'endomorphisme de* E *défini par la matrice comportant* 1 *bloc de* JORDAN *élémentaire de taille* 2, 3 *blocs de* JORDAN *élémentaires de taille* 3, 1 *bloc de taille* 4 *et* 2 *blocs de taille* 5 :

$$J := \left\{ \begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 00 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array} \right\} . \qquad 1$$

ii) ***(Unicité à conjugaison près)***

Puisque la forme de JORDAN *de* f *répondant à 1 est fixée (à conjugaison près (cf. question 1),)) on sait que toute autre solution au problème aura une matrice semblable à J.*

iii) ***(Conditions suffisantes)***

On a rappelé en i), que la réduite de JORDAN *d'un endomorphisme dont la suite des noyaux itérés est*

$$n_{i\ ,1 \leq i \leq 5} = (7, 14, 20, 23, 25)$$

comporte $m = 1 + 3 + 1 + 2 = 7$ *blocs de* JORDAN *dont les dimensions sont données par*

$$r_{i\ ,1 \leq i \leq m\ =\ 7} = (5, 5, 4, 3, 3, 3, 2) \, .$$

Cette réduction correspond également au tableau de YOUNG *(cf. exercice C :)*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & \\ * & * & * & & \\ * & * & * & & \\ * & * & * & & \\ * & * & & & \end{pmatrix} . \qquad 1$$

Reste à vérifier, sinon à démontrer qu'un endomorphisme ayant une réduite de JORDAN *comme en i).1 ou de manière équivalente un tableau de* YOUNG *comme en 1 répond bien à la question.*

On pourra poser, pour rendre les notations plus commodes, mais néanmoins toujours cohérentes,

$$n_0 := \dim \operatorname{Ker} f^0 = \dim \operatorname{Ker} \operatorname{Id} = 0 \, .$$

On a alors,

$$\forall 1 \leq k \leq 5, \; n_k - n_{k-1} = \sum_{i=1}^{7} \min(r_i, k) - \min(r_i, k-1) \text{ (cf. exercice C, question 3) , exercice C, question 4) , question 2).)}$$

Si donc la suite des paramètres de JORDAN *est* $r_i\ _{,1\leq i\leq m\,=\,7}\ =\ (5,5,4,3,3,3,2)$, *correspondant au tableau de* YOUNG *1, on a :*

$$\begin{array}{rcccl} n_1 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\min(r_i,1)-\min(r_i,0) &=& 7\\ n_2 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\min(r_i,2)-\min(r_i,1) &=& 14\\ n_3 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\min(r_i,3)-\min(r_i,2) &=& 20\\ n_4 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\min(r_i,4)-\min(r_i,3) &=& 23\\ n_5 &=& \displaystyle\sum_{i=1}^{7}\min(r_i,5)-\min(r_i,4) &=& 25 \end{array}\ .$$

7) (4pts) Dans le cas général (n quelconque,) quelles conditions (nécessaires et suffisantes) doit satisfaire la suite n_k pour qu'il existe un endomorphisme f nilpotent vérifiant 1 ?

Solution : *Soit donc* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers. On cherche ici à généraliser la construction faite à la question 6) ; c'est-à-dire plus précisément à déterminer à quelles conditions il est possible de construire un endomorphisme* f *nilpotent d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie* n *dont la suite des noyaux itérés est la suite* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$*. Supposons donc qu'il existe* (E,f) *avec* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $f\ \in\ \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ *un endomorphisme nilpotent de* E*.*

N$_1$*) La suite* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$ *est à valeurs entières.*

Puisque

$$n_0\ =\ \mathrm{Ker}\,f^0\ =\ \mathrm{Ker}\,\mathrm{Id}_E\ =\ 0,$$

N$_2$*)* $n_0\ =\ 0$.

Si f *est un endomorphisme d'un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* n,

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{Ker}\,f^k\ \subset\ E\ \Rightarrow\ n_k\ =\ \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ker}\,f^k\ \leq\ n,$$

ce qui entraîne que

N$_3$*) La suite* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$ *est bornée.*

Il est par ailleurs presque immédiat que

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{Ker}\,f^k\ \subset\ \mathrm{Ker}\,f^{k+1}\ \Rightarrow\ n_k\ \leq\ n_{k+1}\ ;$$

c'est-à-dire que :

N$_4$*) La suite* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

Enfin on a montré (cf. exercice B, question 6),) ou (cf. question 3),) que :

N$_5$*) La suite* $(d_k)_{,k\,\in\,\mathbb{N}^*}$ $d_k\ :=\ n_k-n_{k-1}$ *est décroissante ; c'està-dire que la fonction* n_k *est concave.*

Dès l'instant où la condition N$_2$*) est satisfaite, puisque les suites* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_k)_{,k\,\in\,\mathbb{N}^*}$ *sont reliées par la formule* $d_k\ =\ n_k-n_{k-1}$, *(« dérivation ») et la formule réciproque*

$$n_k\ =\ n_0\ +\ \sum_{i=1}^{k}d_k\ \text{« intégration »}\qquad 1$$

l'une des deux suites est à valeurs entières si et seulement si l'autre l'est aussi.

La condition N$_4$*) équivaut bien entendu à ce que la suite* $(d_k)_{,k\,\in\,\mathbb{N}}$ *soit à valeurs positive. Quant aux conditions N*$_4$*) et N*$_3$*), elles équivalent à ce que* n_k *soit stationnaire à partir d'un certain rang, autrement dit qu'il*

$$\exists k\ \in\ \mathbb{N},\ \forall\ell\in\mathbb{N},\ \ell\ \geq\ k\ \Rightarrow\ n_\ell\ =\ n_k\ .$$

Ceci entraîne en particulier que $d_{k+1}\ =\ 0$ *; ce qui, sous l'hypothèse que* d_k *est positive et décroissante, équivaut à*

$$\forall\ell\in\mathbb{N},\ \ell\ >\ k\ \Rightarrow\ d_\ell\ =\ 0\ .$$

Il s'ensuit que les conditions N$_1$*) à N*$_5$*) sont encore équivalentes aux conditions suivantes pour une suite* $\left(n_k\right)_{,k\in\mathbb{N}}$*, en notant* $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ d_k\ =\ n_k-n_{k-1}\ :$

D$_1$*) La suite* $(d_k)_{,k\,\in\,\mathbb{N}^*}$ *est à valeurs entières i.e.à valeurs dans* $\mathbb{N}$.

D_2) $n_0 = 0$.

D_3) La suite $(d_k)_{,k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

D_4) Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d_k = 0$.

Avant de montrer (cf. 7).3,) que les conditions ci-dessus sont sufisantes à l'existence d'un couple (E, f) solution du problème, établissons la formule suivante qui nous servira à plusieurs reprises :

Lemme 7).1

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{k} i\#\big(\{j \in [1;m]\,;\ r_j = i\}\big) = \sum_{i=1}^{k} i(d_i - d_{i+1}) = (1-k)n_k - kn_{k+1}\,.$$

Preuve *: La première égalité est une conséquence de la question 3). Pour la seconde on calcule :*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} i\#\big(\{j \in [1;m]\,;\ r_j = i\}\big) &= \sum_{i=1}^{k} i(d_i - d_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} id_i - \sum_{i=1}^{k} id_{i+1} \\
&= \sum_{i=1}^{k} id_i - \sum_{i=2}^{k+1} (i-1)d_i \\
&= \sum_{i=2}^{k} (i-(i-1))d_i - kd_{k+1} + d_1 \\
&= d_1 + \sum_{i=2}^{k} d_i - k(n_{k+1} - n_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} d_i - k(n_{k+1} - n_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i - n_{i-1} - k(n_{k+1} - n_k) \\
&= n_k - kn_k + kn_{k+1} - n_0 \\
&= (1-k)n_k - kn_{k+1}
\end{aligned}$$

en se souvenant qu'on doit satisfaire à la condition N_2) ou D_2), i.e.$n_0 = 0$.

Remarque 7).2 On écrira souvent par la suite $\displaystyle\sum_{\ell=k}^{+\infty} d_\ell$ qui est en fait une somme finie, puisque la suite $(d_k)_{,k \in \mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang (cf. D_4).)

Énonçons et prouvons le résulta suivant :

Proposition 7).3 *Étant donné une suite $\big(n_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions N_1) à N_5) ou de manière équivalentes les condition D_1) à D_4),*

*i) **(Existence)***
il existe (E, f) avec E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(E)$ un endomorphisme nilpotent de E tel que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k = n_k\,.$$

*ii) **(Unicité à isomorphisme près)***
De plus si (E, f) et (F, g) sont deux solutions au problème, il existe un

$$\mathbb{C}-\ \text{isomorphisme}\ u : E \to F\ \text{tel que}\ g \circ u = u \circ f\,.$$

Preuve :

i) D'après D$_4$) il existe des entiers k tels que $d_k = 0$. Soit donc ε le plus petit d'entre eux. Puisque d_k est décroissante (cf. D$_3$),) et à valeurs entières (cf. D$_1$),)

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq \varepsilon \Rightarrow d_k = 0\ .$$

Lemme i).1 *S'il existe un couple (E, f) solution au problème ε est l'échelon de nilpotence de f et n_ε la dimension de E.*

Preuve :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq \varepsilon \Rightarrow n_k = n_\varepsilon + \sum_{i=\varepsilon+1}^{k} d_k = n_\varepsilon\ .$$

Or en vertu de N$_4$),

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \leq \varepsilon \Rightarrow n_k \leq n_\varepsilon\ .$$

Il en découle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ n_k = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k \leq \dim_{\mathbb{C}} E \Rightarrow n_\varepsilon \leq \dim_{\mathbb{C}} E\ .$$

Cependant si f est nilpotent il existe k tel que $\operatorname{Ker} f^k = E$, i.e.$\dim_{\mathbb{C}} E = n_k$. Il s'ensuit que

$$\dim_{\mathbb{C}} E \leq \max_{k \in \mathbb{N}}(n_k) \leq n_\varepsilon\ .$$

Il en résulte donc que $\dim_{\mathbb{C}} E = n_\varepsilon$.

Notons donc désormais $n := n_\varepsilon$. On a déterminé à la question 3) quel devait être les paramètres de JORDAN $\left(m, r_{i\ ,1\leq i\leq m}\right)$ *d'un endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ nilpotent vérifiant*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k = n_k\ .$$

Lemme i).2 *Si*

$$\left(m, r_{i\ ,1\leq i\leq m}\right)$$

est l'ensemble de paramètre de JORDAN *construit comme en question 3),*

$$\sum_{i=1}^{m} r_i = n = n_\varepsilon\ .$$

Preuve : *Il faut constater qu'une bonne part du mystère possible de cette formule disparaît lorsqu'on réalise qu'il ne s'agit ni plus ni moins que d'égaler la somme suivant les lignes ou suivant les colonnes dans le tableau de* YOUNG *ou encore, pour ceux qui sauraient ce que sont ces objets, de considérer une partition et sa partition duale.*

Plus formellement, d'après la question 3), on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} r_i &= \sum_{k=1}^{+\infty} k(d_k - d_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\varepsilon} k(d_k - d_{k+1}) \\
&\underset{\text{(cf. 7).1)}}{=} (1-\varepsilon)n_\varepsilon + \varepsilon n_{\varepsilon+1} \\
&= n_\varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi, en vertu du lemme i).2 ci-dessus il existe un endomorphisme f de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice est donnée par blocs, dans la base canonique par

$$J := \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{r_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\dots & J_{r_m} & \end{pmatrix}.$$

Reste à montrer, pour conclure à l'existence de f que :

Lemme i).3

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k = n_k\ .$$

Preuve *: on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k \;=\; \sum_{i=1}^{m} n_{i,k} \;=\; \sum_{i=1}^{m} \min(r_i, k) \text{ (cf. exercice C, question 3) , exercice C, question 4).)}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k &= \sum_{i=1}^{m} \min(r_i, k) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq m\ ,\ r_i \leq k} r_i + \sum_{1 \leq i \leq m\ ,\ r_i > k} k \\
&= \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\ell=1}^{k} r_i \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) + \sum_{1 \leq i \leq m} \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} k \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} r_i \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} k \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \ell \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} k \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big)
\end{aligned}$$

On peut encore calculer l'expression ci-dessus grâce à la question 3) :

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} f^k & \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \ell \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\}\big) + \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} k \#\big(\{i \in [1;m]\ ;\ r_i = \ell\} \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \ell(d_\ell - d_{\ell+1}) + k \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} (d_\ell - d_{\ell+1}) \\
&\underset{\text{(cf. 7).1)}}{=} (1-k)n_k + kn_{k+1} + k \sum_{\ell=k+1}^{+\infty} (d_\ell - d_{\ell+1}) \\
(1-k)n_k + kn_{k+1} + k\left(\sum_{\ell=K+1}^{+\infty} d_\ell - \sum_{\ell=k+2}^{+\infty} d_\ell\right) & \\
&= (1-k)n_k + kn_{k+1} + kd_{k+1} \\
&= (1-k)n_k + kn_{k+1} + k(n_k - n_{k+1}) \\
&= n_k\ .
\end{aligned}$$

ii) On a vu (cf. question 3),) que la suite $(d_k)_{,k \in \mathbb{N}^*}$ détermine complètement les paramètres de JORDAN *d'un couple (E, f) solution du problème. Pour peu que D$_2$) ou de manière équivalente N$_2$) les suites $\big(n_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$ et $(d_k)_{,k \in \mathbb{N}^*}$ se déterminent complètement l'une l'autre. Autrement dit les paramètre de* JORDAN *d'un couple (E, f) solution du problème sont entièrement déterminés par la suite $\big(n_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$. La solution du problème est alors unique à isomorphisme près en vertu de la proposition IV.10.9 du cours.*

Exercice F : (Géométrie du cône nilpotent)

On regarde dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes, comme espace topologique. On l'appelle le *cône nilpotent*. (En fait on pourrait considérer n'importe quel corps, même si pour la suite il faudrait préciser les topologies, ce qu'est une variété etc..)

1) (6.5points) $\mathcal{N}$ est-il un espace vectoriel ?
Solution : *Il est claire que*

$$\forall N \in \mathcal{N},\ \forall a \in \mathbb{C},\ aN \;\in\; \mathcal{N}\ ;$$

c'est-à-dire que $\mathcal{N}$ est au moins un cône i.e.une réunion de droites. Néanmoins, $\forall (N, M) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, il n'est pas du tout certain que $N + M$ soit encore nilpotent en particulier si N et M ne commutent pas. En particulier

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\in\; \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

sont nilpotentes mais leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang* 2*, et ne peut donc être nilpotente puisque une matrice nilpotente n'est jamais de rang maximal. On peut même voir explicitement que*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) (6.5points) Même si ce n'est pas le cas, on va montrer que $\mathcal{N}$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et déterminer sa dimension.

a) (6.5points) Montrer que $\mathcal{N}$ est fermé.
Solution : *Une matrice nilpotente dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est au maximaum d'échelon* n *(cf. exercice A, question 2).) Ainsi*

$$\forall N \in \mathcal{N},\ N^n = 0\,;$$

mais réciproquement si $N^n = 0$*,* N *est nilpotente si bien que*

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,;\ N^n = 0\}\,.$$

Or l'application

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,,\ N \mapsto N^n \text{ est continue}$$

et $\mathcal{N}$ *est l'image réciproque du singleton* 0 *par cette application et est donc fermé.*

b) (6.5points) **Supposons dans cette question que** $n = 2$.

i) Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.
Solution : *Si* $n = 2, \forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$ *, le polynôme caractéristique* $P_{\text{car}\,N}$ *est*

$$P_{\text{car}\,N} = \det(XI - N) = X^2 - \operatorname{Tr}(N)X + \det(N)\,.$$

Or, en vertu du théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON*, le polynôme minimal* $P_{\min N}$ *divise* $P_{\text{car}\,N}$*. Si* N *est nilpotente,* $P_{\min N} = X^k$*,* $k > 0$*, ce qui entraîne* $\det(N) = 0$ *; ce qu'on sait déjà d'ailleurs puisqu'une matrice nilpotente ne peut être de rang maximal. On sait également (cf. exercice I, ou IV.11.11) que* $P_{\text{car}\,N}$ *et* $P_{\min N}$ *ont les même facteurs irréductibles ce qui force* $\operatorname{Tr}(N) = 0$.

ii) Donner deux équations définissant $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ (ou une seule équation dans $\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,;\ \operatorname{Tr}(M) = 0\}$).
Solution : *On vient de voir ci dessus que si* $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ *est nilpotente alors*

$$\operatorname{Tr}(N) = \det(N) = 0\,.$$

Réciproquement si tel est le cas, $P_{\text{car}\,N} = X^2$*, si bien que, toujours en vertu du théorème de* CAYLEY–HAMILTON,

$$P_{\min N} = X^k\,,\ 1 \le k \le 2\,;$$

i.e. N *est nilpotente. Ainsi :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} &= \{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,;\ \operatorname{Tr}(N) = 0 \text{ et } \det(N) = 0\} \\
&= \left\{N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,;\ x + t = 0 \text{ et } xt - yz = 0\right\} \\
&= \left\{N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})\,;\ x^2 + yz = 0\right\}.
\end{aligned}$$

iii) Quelle est cette surface ?
Indication : *on pourra effectuer le changement de variables linéaire* $x = x'$, $y = y' + z'$ *et* $z = y' - z'$.
Solution : *En effectuant le changement de variable demandé l'équation* $x^2 + yz = 0$ *obtenue ci-dessus devient*

$$\begin{aligned}
& x'^2 + (y' + z')(y' - z') = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

On constate qu'alors la courbe à z' *constant qu'on obtient est un cercle, ce qui caractérise un cône. À noter qu'en considérant la première forme de l'équation* $x^2 + yz = 0$*, on constate que la courbe obtenue à* X *constant est une hyperbole ce qui caractérise également un cône.*

On avait vérifié à la question 1) une propriété d'homogénéité qui assurait déjà que la variété $\mathcal{N}$ *est un cône.*

iv) Montrer que $\mathcal{N}$ s'identifie à une surface dans $\mathbb{C}^3$, mais a un point singulier en 0.

Indication : *On pourra considérer l'espace tangeant en la matrice nulle, et montrer qu'il est de dimension 3.*

Solution : *La différentielle* df *avec* $f(x,y,z) = x^2+yz$ *vaut* $df = \begin{pmatrix}2x & z & y\end{pmatrix}$ *et son rang ne chute qu'en* 0.

On peut aussi "tracer" des courbes sur $\mathcal{N}$, *passant par* $0 \in \mathcal{N}$ *en* $t=0$ *et prendre le vecteur tangeant en* 0 *: l'espace tangeant en un point est l'ensemble de ces vecteurs tangeants, modulo équivalence. Soit alors*

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix}0 & T\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}, \quad \gamma_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix}0 & 0\\ t & 0\end{pmatrix}\end{array}, \quad \gamma_3 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix}t & -t\\ t & -t\end{pmatrix}\end{array},$$

qui sont clairement bien définies, et $\mathcal{C}^\infty$. *Alors, l'espace (vectoriel) tangeant à* $\mathcal{N}$ *en 0* $T_0\mathcal{N}$ *contient*

$$d\gamma_1(0) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, d\gamma_2(0) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, d\gamma_3(0) + d\gamma_1(0) - d\gamma_2(0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

c'est donc $\mathfrak{sl}_2$, *l'ensemble des matrices de taille 2 et trace nulle, de dimension 3.*

c) (6.5points) Montrer que les matrices nilpotentes de rang $n-1$ (*i.e.*d'échelon n (cf. cours IV.8.1,)) forment un ouvert, dense, de $\mathcal{N}$.

Indication : *On pourra considérer* N *sous forme de Jordan, et regarder* $N + \frac{1}{k}J_n$.

Solution : *Supposons que* J *soit une matrice nilpotente sous forme de* JORDAN *: Pour tout* $r \leq n$, *soit*

$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

le bloc de JORDAN *"élémentaire".*

La matrice J *est donc de la forme*

$$J = \text{diag}\,(J_{r_1}, J_{r_2}, \cdots, J_{r_m}) = \begin{pmatrix} J_{r_1} & 0\cdots & \cdots & 0\\ 0 & J_{r_2} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & J_{r_m}\end{pmatrix}$$

pour un certain entier m .

La suite $J + \frac{1}{k}J_n$ *est formée de matrice nilpotentes puisque triangulaire inférieure stricte. On a montré en effet (cf. exercice A, question 4),) que cette condition était nécessaire, mais en considérant attentivement les arguments de la preuve on se convaincra facilement qu'elle est suffisante. Or les matrices* $J + \frac{1}{k}J_n$ *sont de rang* n *et donc d'échelon* $n-1$.

Si $N \in \mathcal{N}$ *n'est pas sous forme de* JORDAN, *le théorème IV.10.10 de réduction de* JORDAN *qu'il existe une matrice* J *sous forme de* JORDAN *et une matrice* P *inversible telles que* $N = PJP^{-1}$. *Or* $M \mapsto PMP^{-1}$ *est continue de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *si bien que*

$$\lim_{k\to+\infty} J + \frac{1}{k}J_n = J \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} P(J + \frac{1}{k}J_n)P^{-1} = N\,;$$

ce qui donne le résultat puisque le rang et l'échelon de nilpotence sont inchangés par conjugaison.

d) (6.5points) Montrer que toutes les matrices nilpotentes de rang $n-1$ sont conjuguées.

Solution : *Elle sont toute conjuguées à* J_n. *À noter que la combinatoire devient plus compliquée si on ne suppose pas le rang maximal et l'on est amené alors, pour déterminer les différentes classes de conjugaison à considérer des partitions du nombre* n *comme c'est fait dans l'exercice E ou dans l'exercice G.*

e) (6.5points) Soit N une telle matrice. Montrer que l'ensemble des matrices P qui commutent à N est isomorphe à $\mathbb{C}^n$

Indication : *on pourra supposer que* N *est sous forme normale de Jordan disons sous-diagonale (pourquoi ? , et regarder* l image par P de e_1).

Solution : *Si* $N = J_n$ *et* $NP = PN$, *on a* $Pe_i = PNe_{i-1} = NPe_{i-1}$ *donc par une récurrence immédiate,* $Pe_i = N^{i-1}Pe_1$.

Réciproquement, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$ *en posant* $Pe_i = N^{i-1}v$, *alors* $NP = PN$. *On a donc un isomorphisme entre* $\mathbb{C}^n$ *et* $\mathrm{Com}(J_n)$, *l'ensemble des matrices commutant à* J_n. *Si maintenant* N *n'est pas sous forme de Jordan,* $N = QJ_nQ^{-1}$, *et donc* P *commute à* N *si et seulement si*

$$PQJ_nQ^{-1} = QJ_nQ^{-1}P \Leftrightarrow Q^{-1}PQJ_n = J_nQ^{-1}PQ,$$

si et seulement si $Q^{-1}PQ$ *commute à* J_n. *Donc le commutant* $\mathrm{Com}(N)$ *de* N *est* $Q^{-1}\mathrm{Com}(J_n)Q$, *donc est aussi de dimension* n.

Voir aussi l'exercice D.

f) (6.5points) (**Difficile**)

Montrer que l'ensemble des matrices de rang exactement $n-1$ est de dimension $n(n-1)$. On pourra construire un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme explicite entre $\mathcal{N}_n$, l'ensemble des matrices nilpotentes d'ordre exactement n, et

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \star & & \star \end{pmatrix} \mid M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\},$$

en utilisant ce qui précède.

Solution : *Par ce qui précède, si $N = J_n$ et $NP = PN$, on a $Pe_i = PNe_{i-1} = NPe_{i-1}$ donc par une récurrence immédiate, $Pe_i = N^{i-1}Pe_1$. Donc si P commute à N et appartient à S, on a $Pe_1 = e_1$, et donc $P = \mathrm{Id}$.*

Essayons de donner un inverse à

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{N}_n \\ P & \longmapsto & PNP^{-1} \end{array}$$

qui est clairement C^∞, surjective, et injective restreinte à S. Réciproquement si $M = PNP^{-1}$, comment déduire P en fonction de M ? On calcule

$$Me_1 = PNP^{-1}e_1 \underbrace{=}_{P\in S} PNe_1 = Pe_2.$$

Plus généralement,

$$M^i e_1 = PN^iP^{-1}e_1 = PN^ie_1 = Pe_{i+1}.$$

Donc la matrice P est donnée en colonne par $e_1, Me_1, \dots, M^{n-1}e_1$ (qui est une base car M est de rang maximal). On en déduite un inverse à ϕ ;

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{N}_n & \longrightarrow & S \\ M & \longmapsto & \mathrm{Mat}(e_1, Me_1, \dots, M^{n-1}e_1) \end{array}$$

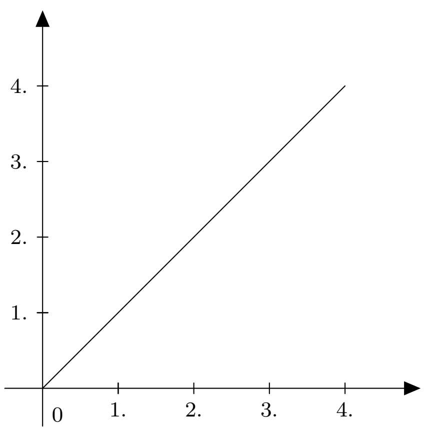
qui est clairement $\mathcal{C}^\infty$, puisque $M \mapsto Mx$ est C^∞ (linéaire en fait) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n$.

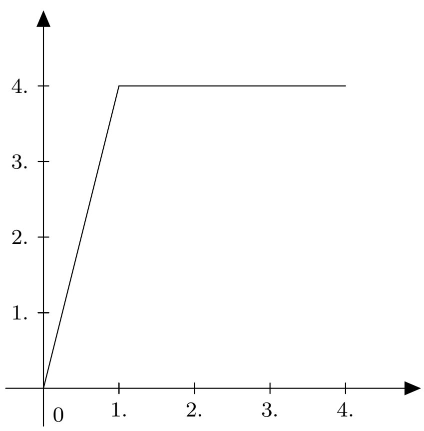
Remarque 1 Si X est un fermé de $\mathbb{C}^N$, on peut définir la dimension de X comme le plus grand entier d tel qu'il existe un ouvert de X C^∞-difféomorphe à $\mathbb{C}^d$. Lorsque X est une variété différentiable, en particulier lisse, tous les ouverts de X ont même dimension (si X est connexe disons). Dans notre cas, $\mathcal{N}$ est connexe mais n'est pas lisse, et sa dimension est la dimension de $\mathcal{N}_n$, c'est donc $n(n-1)$.

Exercice G : (**Partitions, tableaux de YOUNG, polygônes concaves**)

On appelle partition de n une suite $d_1 \geq d_2 \geq \dots d_n \geq 0$ telle que $d_1 + \dots + d_n = n$ (on autorise à avoir des répétitions et des zéros). On note $\mathcal{P}art(n)$ leur ensemble. On note $\mathcal{P}ol$ l'ensemble des polygones croissants, concaves, à abscisses de rupture entières tels que $P(0) = 0$ et $P(n) = n$ et pour tout $0 \leq k \leq n, P(k) \in \mathbb{N}$.

FIGURE 2 – Deux exemples de polygônes dans $\mathcal{P}ol$ pour $n = 4$





On note $\mathcal{Y}$ l'ensemble des diagrammes de Young à n cases (https://fr.wikipedia.org/wiki/Tableau_de_Young).

1) (6.5points) Montrer que l'on a des bijections (naturelles) entre $\mathcal{P}art(n)$, $\mathcal{P}ol$, et $\mathcal{Y}$.

Solution : *Étant donné un polygône $p \in \mathcal{P}ol$, sa dérivée p' est une application constante sur les intervalles $]i-1; i[_{,1 \leq i \leq n}$, et décroissante puisque p est concave. Si l'on note d_i la valeur de p' sur $]i-1; i[$, en intégrant p', on a bien évidemment*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = p(n) - p(0) = n.$$

Réciproquement une suite $d_i\ _{,1\leq i\leq n}$ définit une application constante de valeur d_i sur les intervalles $]i-1;i[$, dont la primitive s'annulant en 0 est un élément de $\mathcal{P}ol$.

On associe en outre bijectivement à toute partition dans $\mathcal{P}art(n)$ un tableau de Young ayant d_i cases sur sa $i^{\text{ième}}$ colonne.

2) (6.5points) Construire une application naturelle $\nu\ :\ \mathcal{N}\ \to\ \mathcal{P}art(n)$ telle qu'une matrice d'échelon n est envoyée sur la partition $1+1+..+1=n$, et la matrice nulle est envoyée sur $n+0+\cdots+0=n$.

Solution : *Pour tout*

$$A\ \in\ \mathcal{N}\ ,\ \forall 1\leq i\leq n,\ \nu(A)_i\ :=\ \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A^i-\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A^{i-1}$$

convient. Le fait notamment que $\nu(A)_i$ est décroissante est établi dans l'exercice B, question 6). En outre les relations entre pentes du polygône, saut des dimensions des noyaux itérés et tableaux de YOUNG *on été étudiées notamment dans l'exercice C et l'exercice E. En particulier les entiers d_i introduit ici sont exactement ceux introduits dans l'exercice B et utilisés dans les exercices loc. cit..*

3) (6.5points) Quel polygone est alors associé à une matrice de rang $n-1$? De rang 0 ?

Solution : *Il suffit d'intégrer la formule ci-dessus autrement dit, si ν est défini comme ci-dessus, l'application π qui lui correspond par les isomorphismes (cf. exercice G,) est*

$$\pi\ :\ \mathcal{N}\ \to\ \mathcal{P}ol\ ,\ A\ \mapsto\ i\mapsto \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker} A^i\ .$$

Ainsi pour une matrice A de rang $n-1$, $\pi(A)$ est la première bissectrice, tandis que pour une matrice A de rang 0 i.e.la matrice nulle, $\pi(A)$ est la constante d'équation $y\ =\ n$.

4) (6.5points) Montrer que deux matrices de $\mathcal{N}$ sont semblables ssi leurs ν sont égaux (vu comme polygones, partition ou diagramme, au choix).

Solution : *Bien entendu, si A et B sont semblables elles ont même suites $\big(n_k\big)\ _{,k\in\mathbb{N}}$ de dimension de noyaux itérés $\forall k\in\mathbb{N},\ n_k\ =\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} \cdot^k$. On peut se reporter à l'exercice C pour voir que cette suite détermine complètement le tableau de* YOUNG.

Réciproquement si deux matrices ont le même tableau de YOUNG *(le même polygône ou la même partition) elles ont même suite $\big(n_k\big)\ _{,k\in\mathbb{N}}$ de dimension des noyaux itérés, celle-ci étant en effet la primitive (qui s'annule en 0) de la suite d_k des pentes données par la partition ou le tableau de* YOUNG *:*

$$n_i\ =\ n_0\ +\ \sum_{k=1}^{i} d_k$$

lorsque n_0 vaut nécessairement 0. On peut alors utiliser par exemple l'exercice E, question 7) pour assurer que la forme de JORDAN *correspondant aux données est alors uniquement déterminée ; et partant la classe de similitude de l'endomorphisme.*

Pour toute partition (ou polygone, ou diagramme) p, on note $\mathcal{N}_p$ l ensemble des matrices envoyées sur p.

5) (6.5points) Pourquoi $\mathcal{N}_p$ est-il une classe de conjugaison ? Donner pour $n=8$, un représentant de la classe de conjugaison de la partition $3+2+2+1=8$.

Solution : *On a vu ci-dessus q'avoir même polygône ou même tableau de* YOUNG *ou même partition revient à être semblable ce qui signifie précisément être conjugué par un élément du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

On se reporetera avec profit à l'exercice E pour les détails de la constructions d'une forme de JORDAN *dont on connaît par exemple les invariants numériques d_k. Ainsi pour la partition $(3,2,2,1)$ on sait que le*

$$\begin{array}{lcccc}
\textit{nombre de blocs de taille} & 1 & \textit{est} & 3-2 & = & 1\\
\textit{nombre de blocs de taille} & 2 & \textit{est} & 2-2 & = & 0\\
\textit{nombre de blocs de taille} & 3 & \textit{est} & 2-1 & = & 1\\
\textit{nombre de blocs de taille} & 4 & \textit{est} & 1-0 & = & 1
\end{array}$$

ce qui donne la forme de JORDAN *(à permutation près :)*

$$J\ =\ \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\ .$$

6) (6.5points) (**Difficile**)
Montrer que $\mathcal{N}_{p'}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{N}_p$ si et seulement si le polygone de p est en dessous du polygone de p'.

Solution : *On a déjà observé que la partition d_k associée à un endomorphisme nilpotent N est la « dérivée » de la suite (n_k) $_{,k\in\mathbb{N}}$ des dimension des noyaux itérés :*

$$n_k \;=\; \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} N^k \text{ et } d_k \;=\; n_k - n_{k-1}\ .$$

Par semi continuité du rang (de N^i) on en déduit donc que si N_t est une suite de limite N_0 telle que N_t^i est de rang constant, alors

$$\operatorname{rg}(N_0^i) \;\le\; \operatorname{rg}(N_t^i),$$

donc

$$\dim \operatorname{Ker} N_0^i \;\ge\; \dim \operatorname{Ker} N_t^i$$

donc

$$\sum_{k=1}^{i} d'_k \;\ge\; \sum_{k=1}^{i} d_k,$$

i.e.le polygône de p' est au dessus du polygone de p.

Réciproquement soit donc $N_0 \in \mathcal{N}_{p'}$ et montrons qu'on peut trouver une suite N_t, $t\in]0,1]$, telle que $N_t \in \mathcal{N}_p$ et $N_t \to N_0$. Tout d'abord on pourrait supposer $N_0 = J(p')$ (cf. exercice E, question 7),) la forme de Jordan standard associée à la partition p' : en effet si $N_t \to J(N_0)$, et $N_0 = PJ(p')P^{-1}$, alors PN_tP^{-1} convient. On suppose donc $N_0 = J(p')$.

Soit $d'_1 \ge \cdots \ge d'_n$ et $d_1 \ge \cdots \ge d_n$ les partitions p' et p. Par hypothèse, on a

$$d'_1 \ge d_1, \quad d'_1 + d'_2 \ge d_1 + d_2, \ldots, \ \sum_{k=1}^{i} d'_k \ge \sum_{k=1}^{i} d_k.$$

Soit i minimal tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} d'_k > \sum_{k=1}^{i} d_k$.

Soit $r\ \ge 1$ minimal tel que

$$N_0 : \underbrace{\operatorname{Ker} N^{i+r}/\operatorname{Ker} N^{i+r-1}}_{\dim = d_{i+r}} \longrightarrow \underbrace{\operatorname{Ker} N^{i+r-1}/\operatorname{Ker} N^{i+r-2}}_{\dim = d_{i+r-1}}$$

ne soit pas surjective. Soit alors $x = e_\ell \in \operatorname{Ker} N_0^{i+r-1}$ un vecteur de la base canonique qui n'est pas dans l'image précédente (on peut supposer que c'est un vecteur de la base canonique car $N_0 = J(p')$). Comme $d'_i = d'_{i+1} = \cdots = d'_{i+r-1} > d_i \ge \cdots \ge d_{i+r}$, il existe $j > r$ minimal tel que $d'_{i+j} < d'_{i+j+1}$, il existe donc $e_k \in \operatorname{Ker} N_0^{i+j+1}$ qui n'est pas dans l'image de N_0. On pose alors

$$N_t = N_0 + t\delta_{k,\ell}.$$

Autrement dit pour tout $i \ne \ell$, $N_te_i = N_0e_i$, et $N_te_\ell = N_0e_\ell + te_k$. Notons $p'' = d''_i$ la partition associée à N_t.

On vérifie que,

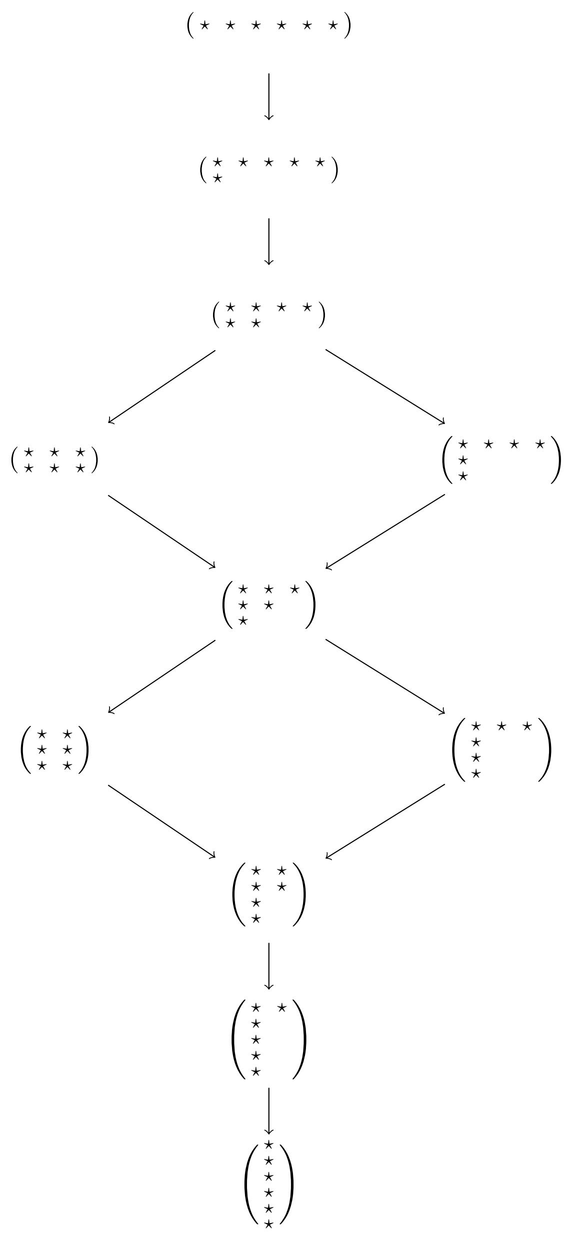
$$\begin{aligned} d''_s = d'_s, &\quad \forall s \le i+r-1, \forall s \ge i+j+1\\ d''_{i+r} &= d'_{i+r} - 1,\\ d''_{i+j} &= d'_{i+j} + 1,\\ d''_u = d'_u, &\quad \forall i+r+1 \le u \le i+j-1 \end{aligned}$$

On a évidemment $N_t \to N_0$, et on vérifie facilement que $p' > p'' \ge p$ (en fait on a juste déplacé e_ℓ de $\operatorname{Ker} N^{i+r}$ vers $\operatorname{Ker} N^{i+j}$), donc par récurrence immédiate (sur les différences $\displaystyle\sum_{k=1}^{i} d'_k - d_k$), on en déduit l'existence d'une déformation N_t telle que $\nu(N_t) = p$.

Exercice H : (**Un graphe**)

1) (6.5points) Pour $n = 6$, donner le graph orienté dont les sommets sont les classes de similitudes de matrices nilpotentes, et les arêtes sont orientées $M \longrightarrow M$ s il existe une suite de matrices dans la classe de conjugaison de M dont la limite est dans la classe de conjugaison de M (on enlevera les arêtes ayant même sommet de départ et d arrivée, et lorsque l'on a des arrêtes $M \longrightarrow M' \longrightarrow M''$ on ne fera pas apparaitre l'arrête $M \longrightarrow M''$).

Solution :



2) (6.5points) Ce graph, vu comme graphe orienté, a t'il des cycles ?

Solution : *Evidemment le graphe précédent n'a pas de cycle comme graphe orienté : en terme de polygones (cf. exercice G, question 1) et exercice G, question 6)) une flèche est orientée vers un polygone plus bas, or, (cf. ,) si deux classes de conjugaison ont le même polygone, elles sont égales : autrement dit, puisque l'on enlève les arrêtes ayant même sommet de départ et d'arrivée, le sommet d'arrivée d'une flèche a un polygone strictement en dessous de celui de départ : on ne peut donc pas avoir de cycle.*

Et si on oublie l'orientation ?

Solution : *Si par contre on oublie l'orientation des flèches, on voit que le graph précédent possède deux cycles.*

Exercice I : (**Facteurs irréductibles du polynôme minimal et du polynôme caractéristique**)

On va chercher, dans ce problème, a comparer la décomposition en produit d'irréductibles du polynôme minimal et du polynôme caractéristique d'un endo morphisme.

À noter immédiatement que le corollaire IV.7.3 du théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON est abusif. En effet du théorème de CAYLEY–HAMILTON assurant que

$$P_{\mathbf{min}\,u} | P_{\mathbf{car}\,u}$$

il résulte immédiatement que, tout facteur irréductible de $P_{\mathbf{min}\,u}$ est un facteur irréductible de $P_{\mathbf{car}\,u}$, mais rien ne permet à ce point d'affirmer que, réciproquement un facteur irréductible de $P_{\mathbf{car}\,u}$ soit un facteur irréductible de $P_{\mathbf{min}\,u}$ (hormis si toutefois il est de degré 1 mais ceux-ci jouent un rôle particulier (cf. question 1).))

En fait, dans la présentation qui est faite dans le cours, le corollaire IV.7.3 devrait apparaître comme un corollaire du corollaire IV.11.11. Ce dernier est lui-même un corollaire de la proposition IV.6.4 (cf. DOC n° III, n° III.1.exercice C) et bien entendu du théorème IV.11.5 de réduction de FROBENIUS. C'est précisément le recours à ce dernier résultat, qui est

l'un des plus techniques de ce cours, qui pourrait inciter à donner un argument alternatif ; ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Dans tout cet exercice, $\mathbb{K}$ est un corps, $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de E. On note $P_{\mathbf{car}\,u}$ (resp. $P_{\mathbf{min}\,u}$,) le *polynôme caractéristique* (cf. cours IV.6.1,) (resp. le *polynôme minimal* (cf. cours IV.2.2.iv).))

1) (6.5points) (**Les facteurs de degré** 1)

Rappeler pourquoi

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ (X-\lambda)|P_{\text{min}\,u} \ \Leftrightarrow\ (X-\lambda)|P_{\text{car}\,u}$$

et en déduire que si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos,

$$P_{\text{car}\,u}|(P_{\text{min}\,u})^n\ .$$

Solution : *Découle de l'équivalence entre IV.5.1.a) et IV.5.1.d).*

On sait déjà, grâce au théorème IV.7.2 de CAYLEY–HAMILTON, que

$$P_{\mathbf{min}\,u}|P_{\mathbf{car}\,u}\ .$$

On va montrer, (cf. question 7), c),) que

$$P_{\mathbf{car}\,u}|[P_{\mathbf{min}\,u}]^n\ .$$

L'élément technique principal pour prouver l'énoncé de divisibilité ci-dessus est la possibilité de faire la division euclidienne d'un polynôme à coefficients dans un anneau de matrices par un autre (cf. question 6).) La dificulté réside alors dans le fait de pouvoir justifier une telle construction. Si $A[X]$ et en effet un anneau de polynômes à une indéterminée, nous n'avons formellement établi un théorème de la *division euclidienne* que dans le cas où A est un corps (cf. cours III.4.2 ;) sans compter que nous n'avons même défini les anneaux de polynôme que dans le cas où A est un anneau commutatif (cf. cours III,) et que nous nous sommes bornés à ne donner la plupart des résultat que dans le cas où A est intègre. Or si l'on veut considérer l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on sait de longue date qu'il n'est ni intègre ni commutatif. Qui plus est, on risque d'être amené, comme on l'a déjà fait (cf. DOC n° III, n° III.1.exercice D,) à identifier les deux anneaux

$$\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \text{ et } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) \textbf{ (cf. question 3) .)}$$

On rappelle que, pour un anneau commutatif A, on note $\mathcal{M}_n(A)$ l'anneau des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans A. On rapelle que cet anneau est isomorphe à l'anneau $\mathrm{End}_{A-\mathbf{mod}}(A^n)$ des endomorphismes du A-module libre A^n ; cet isomorphisme n'étant pas canonique mais donné par le choix d'une base de A^n.

2) (6.5points) (**L'anneau** $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$)

Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va définir l'anneau $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ comme le sous anneaux des éléments presque nuls de l'anneau $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on rappelle brièvement la construction ci-après. On suit en cela le même schéma que celui exposé dans le chapitre III du cours pour les annaux commutatifs.

i) (Addition : groupe abélien)

Puisque $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ a une structure naturelle de groupe abélien donnée par l'addition terme à terme (cf. cours I.6.1.i) ;) pour laquelle l'élément neutre est la suite nulle de valeur constante égale à $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et pour laquelle l'opposé d'une suite $\big(M_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$ est la suite $\big(-M_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$.

ii) (Multiplication : anneau)

Comme dans le cas où A est un anneau commutatif, on définira le *produit de* CAUCHY sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ (cf. cours III.1.2.2,)

$$\forall (M,P) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}},\ (M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} P)_k \ :=\ \sum_{i=0}^{k} M_i *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} P_{k-i}\ .$$

Il faut d'ores et déjà remarquer que $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ n'étant pas commutative, $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ ne le sera pas davantage. Il est cependant toute à fait élémentaire de vérifier que $\big(U_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$U_0 \ :=\ I \ =\ 1_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ U_k \ :=\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})},$$

est un élément neutre pour $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ qu'on notera abusivment I ou même 1 dans la suite, et que

$$\begin{array}{lrcl} \forall (M,P,Q) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}, & (M+P) *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q & = & M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q + P *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q \\ \text{et} & M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} (P+Q) & = & M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} P + M *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} Q\ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ est distributive sur $+$.

On notera $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ l'anneau ainsi construit.

iii) (Anneau des polynômes)

On s'intéressera cependant surtout au sous-anneau $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ constitué des suites presque nulles, *i.e.*des suites $\big(M_k\big)_{,k\in\mathbb{N}}$ pour lesquels il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \geq p$, $M_q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Il est fastidieux mais sans grande difficulté de vérifier que

$$\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \text{ est effectivement un sous-anneau de } \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$$

ce qui signifie (cf. cours I.3.3,) que $\big(\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X],+\big)$ est un sous-groupe de $\big(\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X],+\big)$, que $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ est stable par le produit de CAUCHY $*_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}}$ et que l'élément unité I est dans $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$.

Il ne s'agit rien moins, mais rien de plus non plus que de vérifier que la somme et le produit de deux suites presque nulle est encore une suite presque nulle ; les arguments étant alors exactement de même nature que dans le cas d'un anneau commutatif.

iv) (Degré et valuation)

On peut encore définir la *valuation* $\mathrm{val}(\cdot)$ d'un élément de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ (cf. cours III.1.14,) ou de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ et le *degré* $\deg(\cdot)$ d'un élément de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ (cf. cours III.2.3.) Cependant il convient de s'arrêter un instant sur leurs propriétés (cf. b).)

v) (Morphisme structural)

L'application

$$\iota \,:\, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]\,,\; M \mapsto (M,0,0,\ldots,0,\ldots)$$

est encore un morphisme injectif d'anneaux qui est en fait à valeurs dans $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$; identifiant $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à un sous-anneau de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$; si bien que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on notera simplement M pour la série formelle (resp. le polynôme) dont le terme de rang 0 est M et les autres termes sont nuls.

Il est encore clair que l'image $\mathrm{Im}\,\iota$ de ι est l'ensemble des éléments de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ de degré 0.

vi) (Loi externe, structure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$-module)

Pour tout

$$(A,M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$$

on peut définir $A\cdot M := A *_{\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)[X]} M$, en considérant A comme un élément de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ à travers ι.

vii) (Base)

En X l'élément $(0,1,0,\ldots,0,\ldots) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$, on constate que c'est en fait un élément de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$, et que

$$\forall k\in\mathbb{N},\; X^k := X *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} \ldots *_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}} X$$

est la suite dont le $i^{\text{ième}}$ terme est $\delta_{k,i}$. Comme dans le cas commutatif il n'est pas dificile de montrer que $\{X^k\}_{,k\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$-base de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$.

a) (6.5points) $(n = 1)$

Que dire de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ et $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ lorsque $n = 1$?

Solution : *Dans ce cas $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est canoniquement isomorphe comme anneau à $\mathbb{K}$ et $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[[X]]$ n'est autre que l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ tandis que $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ n'est autre que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

b) (6.5points) **(Valuation et degré)**

Soit $(P,Q) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$, que peut-on dire de :

$$\begin{aligned} &\mathrm{val}(P+Q),\\ &\mathrm{val}(P*Q),\\ &\deg(P+Q)\\ \text{et}\quad &\deg(P*Q)\,. \end{aligned}$$

Bien qu'on n'ait pas, en général, $P*Q = Q*P$, aurait-on cependant

$$\deg(P*Q) = \deg(Q*P)\ ?$$

Solution :

$*$) ***(Somme)***

Comme dans le cas d'un anneau de polynômes à coefficients dans un anneau commutatif on a encore

$$\mathrm{val}(P+Q) \geq \min(\mathrm{val}(p),\mathrm{val}(Q)) \text{ et } \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P),\deg(Q))$$

avec égalité dans le cas de valuations (resp. degrés) différents, puisque ces résultats ne reposent que sur la structure de groupe abélien de $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$.

†) ***(Produit)***

Il découle presque immédiatement de la définition du produit de CAUCHY *que*

$$\mathrm{val}(P * Q) \;\geq\; \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q) \text{et } \deg(P * Q) \;\leq\; \deg(P) + \deg(Q)\ .$$

On avait cependant bien remarqué qu'on avait égalité dans le cas des anneaux intègres.

Ici il suffit de s'intéresser à des éléments de degré 0*, pour obtenir des contre-exemples. Dès que* $n \;\geq\; 2$ *en effet, on sait bien qu'on peut trouver*

$$(A, B) \;\in\; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;\; \textit{tel que} \;\; A \;\neq\; 0\ ,\ B \;\neq\; 0 \text{ et } A * B \;=\; 0\ .$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{val}(A * B) \;=\; +\infty \;>\; 0 \;=\; \mathrm{val}(A) + \mathrm{val}(B) \text{ et } \deg(A * B) \;=\; -\infty \;<\; 0 \;=\; \deg(A) + \deg(B)\ .$$

‡) *On peut aussi trouver*

$$(A, B) \;\in\; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;\; \textit{tel que} \;\; A * B \;=\; 0 \text{ et } B * A \;\neq\; 0\ .$$

ce qui entraîne

$$\deg(A * B) \;=\; -\infty \text{ et } \deg(B * A) \;=\; 0\ .$$

3) (6.5points) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$-linéaire :

$$\begin{aligned} \phi : \quad \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) \\ X \quad &\longmapsto \quad M_1 \;:=\; \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et que de plus ϕ est un isomorphisme.

Indication : *On pourra noter*

$$\forall i \in \mathbb{N},\ M_i \;:=\; M_1^i$$

et remarquer que M_i *commute avec tous les éléments de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$*.*

Solution :

i) ***(Condition nécessaire (unicité))***

Notons $M_1 \;\in\; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ *la matrice*

$$XI \;:=\; \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{pmatrix}\ .$$

Si ϕ *est un morphisme d'anneau,*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \phi(X^k) \;=\; \phi(X)^k \;=\; M_1^k \;=\; M_k \;:=\; \begin{pmatrix} X^k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & X^k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X^k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & X^k \end{pmatrix}\ .$$

Puisque $\{X^k\}_{k \,\in\, \mathbb{N}} \;\subset\; \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ *est une base de* $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$*, si on demande à* ϕ *d'être* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*-linéaire il est entièrement déterminé.*

ii) (**Condition suffisante (existence)**)

Reste à montrer que le morphisme $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$-linéaire défini ci-dessus est bien un morphisme d'anneaux.

Il est claire que

$$\phi(1_{(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))[X]}) \;=\; \phi(X^0) \;=\; M_0 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

De plus :

$$\begin{aligned} &\forall P \;:=\; \sum_{i=0}^{d} A_i X^i \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X], \\ &\forall Q \;:=\; \sum_{i=0}^{e} B_i X^i \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X], \\ &\phi(P * Q) \;=\; \phi\left(\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} A_i * B_j X^{i+j}\right) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} A_i * B_j * \phi(X^{i+j}) \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} A_i * B_j * M_{i+j} \\ &\qquad = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} A_i * B_j * M_i * M_j \;. \end{aligned}$$

On rencontre le seul point délicat de la preuve ici, ou du moins le seul qui diffère vraiment d'un calcul analogue dans des anneaux commutatifs. Il faut en effet remarquer ici que

$$\forall i \in \mathbb{N},\; \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]),\; M_i * A \;=\; A * M_i \;;$$

c'est-à-dire que les matrices M_i commutent avec toutes les autres ; ce qui est bien connu (ce sont des matrices scalaires, à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$ certes.)

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \phi(P * Q) &= \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{e} A_i * M_i * B_j * M_j \\ &= \sum_{i=0}^{d} A_i * M_i * \sum_{j=0}^{e} B_j * M_j \\ &= \phi(P) * \phi(Q) \;. \end{aligned}$$

iii) (**Bijectivité**)

Il suffit de montrer que $\{M_k\}_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. C'est essentiellement ce qu'on a fait au DOC n° III, n° III.1.exercice D, question 1).

Il est presque immédiat de montrer que $\{M_k\}_{k \,\in\, \mathbb{N}}$ est une famille libre. Si en effet $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} A_i * M_i \;=\; 0$,

$$\forall 1 \le j \le n,\; \forall 1 \le k \le n,\; \sum_{i=1}^{r} A_{i,j,k} X^i \;=\; 0\;;$$

ce qui entraîne,, puisque $\{X^k\}_{k \,\in\, \mathbb{N}} \;\subset\; \mathbb{K}[X]$ est une base de $\mathbb{K}[X]$,

$$\forall 1 \le i \le r,\; \forall 1 \le j \le n,\; \forall 1 \le k \le n,\; A_{i,j,k} \;=\; 0 \;\textit{i.e.}\; \forall 1 \le i \le r,\; A_i \;=\; 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\;.$$

Pour tout

$$(M_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \;\in\; \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])\;,\; \forall 1 \le i \le n,\; \forall 1 \le j \le n,\; M_{i,j} \;\in\; \mathbb{K}[X]\;.$$

Donc

$$M_{i,j} \;=\; \sum_{\ell=0}^{d_{i,j}} \alpha_{i,j,\ell} X^{\ell}\;.$$

On prolongera les applications $\alpha_{i,j,\cdot}$ en posant

$$\forall \ell \in \mathbb{N},\ \ell\ >\ d_{i,j}\ \Rightarrow\ \alpha_{i,j,\ell}\ =\ 0\ .$$

Posons alors

$$d\ :=\ \max_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ n \\ \overline{1\ \leq\ j\ \leq\ n}}}(d_{i,j})\text{ et } \forall 0 \leq \ell \leq d,\ A_\ell \textit{ la matrice } \alpha_{i,j,\ell}\ . \tag{1}$$

Il est ensuite facile de constater que

$$M\ =\ \sum_{\ell=0}^{d} A_\ell * M_\ell\ . \tag{2}$$

L'isomorphisme ϕ ci-dessus permet donc d'identifier (en tant qu'anneau) les polynômes dont les coefficients sont des matrices $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ au matrices dont les coefficients sont des polynômes $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On se placera donc, dans la suite, sous l'un ou l'autre point de vue, selon ce qui sera le plus commode. En particulier on oubliera la notation M_i pour lui préférer X^i, dont on gardera bien à l'esprit que c'est une matrice qui commute avec n'importe quel élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. On notera I l'unité de ces anneaux qui est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4) (6.5points) (**Valuation et degré**)

Pour $M\ \in\ \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ comparer la valuation et le degré de M définis en question 2), iv) et les valuations et degré respectifs des coefficients de la matrice $\phi(M)$.

Solution : *Si on note*

$$\phi(M)\ =\ (M_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ \overline{1\leq j\leq n}}}$$

on rappelle que les $M_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$. Les formules question 3), iii).1 et question 3), iii).2 montrent alors que

$$\deg(M)\ =\ \max_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ n \\ \overline{1\ \leq\ j\ \leq\ n}}}(\deg(M_{i,j}))\text{ et }\mathrm{val}(M)\ =\ \min_{\substack{1\ \leq\ i\ \leq\ n \\ \overline{1\ \leq\ j\ \leq\ n}}}(\mathrm{val}(M_{i,j}))\ .$$

5) (6.5points) (**Éléments inversibles**)

Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\phi\ :\ \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]\ \cong\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$, tout inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est encore inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$. En revanche il n'est pas tout à fait immédiat de déterminer exactement ce qu'est $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]))^\times$; ce dont d'ailleurs nous n'aurons pas explicitement besoin. On peut cependant remarquer :

a) (6.5points) (**Matrice de carré nul**)

Montrer que si $A\ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $A^2\ =\ 0$, $I - AX$ est inversible.

Solution : *En effet,*

$$(I - AX) * (I + AX)\ =\ I^2 - (AX)^2\ =\ I - A^2X^2\ =\ I\ .$$

b) (6.5points) (**Matrices nilpotentes**)

Plus généralement montrer que si $A\ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est tel que $A^n\ =\ 0$, (nilpotente d'échelon n (cf. cours IV.8.1,)) $I - AX$ est inversible.

Solution : *Puisque X et A commutent, on a :*

$$(I - AX) * \sum_{i=0}^{n-1} X^iA^i\ =\ I - X^nA^n\ =\ I\ .$$

6) (6.5points) (**Division euclidienne**)

Pour tout $(M, P)\ \in\ \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]$ tel que

$$P\ =\ \sum_{i=0}^{d} P_iX^i\ \text{ avec }\ P_d\ \in\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\times\ \text{ inversible,}$$

montrer qu'il existe

$$(Q, R)\ \in\ \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X]\ \text{ tel que }\ M\ =\ P * Q + R \text{ et } \deg(R)\ <\ \deg(P)\ .$$

Indication : *On pourra adapter la méthode utilisée dans le III.7.7.*

Solution : *On procède comme dans le III.7.7. On pourrait d'ailleurs renvoyer à ce texte en justifiant que l'argument clef est que le coefficient de plus haut degré de P est inversible. Cependant, outre le fait qu'on doit ttraiter la question pour un anneau non intègre, une difficulté supplémentaire réside ici dans le fait que les coefficients que nous considérons appartiennent à un anneau qui n'est pas commutatif. L'honnêteté veut donc que l'on réexamine les arguments de cette preuve sous les hypothèses faibles faites ici.*

i) $(\deg(M) < \deg(P))$
Il suffit, dans ce cas de prendre

$$Q = 0 \text{ et } R = M .$$

ii) $(\deg(M) \geq \deg(P))$

$*)$ *Il existe (cf. III.7.7.question 3),)*

$$(S, C) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \textit{ tel que } M = P * S + C \text{ et } \deg(C) < \deg(M) .$$

En effet, définissons S par

$$S_{\deg(M)-\deg(P)} = P_d^{-1} * M_{\deg(M)} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ k \neq \deg(M) - \deg(P) ,\ S_k = 0 .$$

Par construction on a alors

$$C := M - P * S \textit{ avec } \deg(C) < \deg(M) .$$

$\dagger)$ ***(Raisonement par récurrence)***
On termine l'argument par récurrence sur l'entier $\deg(M) - \deg(P)$ *(cf. III.7.7.question 4).) En effet, C étant construit comme ci-dessus,* $\deg(C) - \deg(P) < \deg(M) - \deg(P)$, *on peut écrire*

$$C = P * T + R \textit{ avec } \deg(R) < \deg(P)$$

d'où il résulte

$$M = P * S + C = P * S + P * T + R = P(S + T) + R .$$

7) (6.5points) **(Facteurs irréductibles)**
Soit

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } M := P_{\textbf{min}\,A} I \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]) .$$

a) (6.5points) **(Division euclidienne)**
Montrer qu'il existe

$$(Q, R) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \times \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\big)[X] \text{ tel que } M = (A - IX) * Q + R \text{ et } \deg(R) < 1 .$$

Solution : *Il faut juste constater que $A - IX$ est de degré 1 et de coefficient de plus haut degré I qui est inversible si bien qu'on est dans les conditions d'application de la question 6).*

b) (6.5points) Montrer que $R = 0$.
Solution : *Il suffit d'évaluer l'identité précédente en A.*

c) (6.5points)

$$P_{\text{car}\,A} | [P_{\text{min}\,A}]^n .$$

Solution : *Il découle de a) et b) que $M = (A - IX) * Q$. d'où il résulte*

$$[P_{\textit{min}\,A}]^n = \det(M) = \det(A - IX) * \det(Q) = P_{\textit{car}\,A} * \det(Q) .$$

d) (6.5points) **(Facteurs irréductible)**
En déduire que tout facteur irréductible de $P_{\text{car}\,A}$ est un facteur irréductible de $P_{\text{min}\,A}$.
Solution : *C'est bien entendu maintenant une conséquence immédiate de c) et du lemme de* GAUSS.