Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2020 – 2021

LDD/S6 MDD354 — Structures algébriques

Corrigé de l'examen du 7 mai 2021

Dans la plupart des exercices qui suivent il sera question d'espaces euclidiens, pour lesquels on notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire et $|| \cdot ||$ la norme. Pour un espace euclidien E on notera $\mathcal{O}(E)$ le groupe des isométrie de E. Si E est de dimension 3, on rappelle que $\mathcal{SO}(E)$ est le sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ formée des rotations ou isométrie directes. Pour E un espace euclidien de dimension 3, on rappelle qu'un élément $f \in \mathcal{SO}(E)$ est caractérisé par le fait que

- **il existe $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(\vec{u}) = \vec{u}$**
- **la restriction $f_{|\vec{u}^\perp}$ est un élément de $\mathcal{SO}(\vec{u}^\perp)$.**

On ne redonne pas la définition de $\mathcal{SO}(P)$ dans le cas d'un espace euclidien P de dimension 2, que vous devez connaître.

Exercice A : (10 points) (**Existance d'isométries et transitivité de l'action**)
Soit E un espace euclidien.

1) (4 points) **Soit**

$$(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E \text{ **tel que** } ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| .$$

a) (1 point) Rappeler brièvement pourquoi $E = \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \oplus (\vec{v} - \vec{u})^\perp$.

Solution

C'est une propriété des espaces euclidiens, pour tout sous-espace F de E, $E = F \oplus F^\perp$ (cf. la proposition IV.3.7.)

On définit $i_{\vec{u},\vec{v}}$ par

$${i_{\vec{u},\vec{v}}}_{|\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}} := -\mathrm{Id}_{\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}} \text{ et } {i_{\vec{u},\vec{v}}}_{|(\vec{v}-\vec{u})^\perp} = \mathrm{Id}_{(\vec{v}-\vec{u})^\perp} .$$

b) (1 point) Montrer que l'on définit bien ainsi un unique endomorphisme $i_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathrm{End}(E)$ *i.e.* une unique application linéaire $i_{\vec{u},\vec{v}} : E \to E$.

Solution

C'est en fait une propriété des somes directes : dès que ${i_{\vec{u},\vec{v}}}_{|\mathrm{Vect}\{\vec{v}-\vec{u}\}}$ et ${i_{\vec{u},\vec{v}}}_{|(\vec{v}-\vec{u})^\perp}$ sont définies, $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est bien définie.
Plus précisément puisque $E = \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \oplus (\vec{v} - \vec{u})^\perp$, pour tout $\vec{x} \in E$ il existe un unique $(\vec{y}, \vec{z}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \times (\vec{v} - \vec{u})^\perp$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$. Si donc $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est linéaire, nécessairement

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{x}) = i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y}) + i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{z}) .$$

Ceci prouve d'une part l'unicité de $i_{\vec{u},\vec{v}}$ mais aussi du fait de l'unicité de la décomposition de $\vec{x}$ son existence i.e. qu'on a donné une bonne définition.
Reste à constater, qu'ainsi définie, $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est bien linéaire ; ce qui repose une fois encore sur l'unicité de la décomposition d'un élément de E comme somme d'un élément de $\mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\}$ et d'un élément de $(\vec{v} - \vec{u})^\perp$.

c) (1 point) Montrer que $i_{\vec{u},\vec{v}}$ est une isométrie.

Solution

Pour tout

$$\vec{x} \in E , \exists (\vec{y}, \vec{z}) \in \mathrm{Vect}\{\vec{v} - \vec{u}\} \times (\vec{v} - \vec{u})^\perp, \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} .$$

En particulier $\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle = 0$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} ||\vec{x}||^2 &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \\ &= \langle \vec{y} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z} \rangle \\ &= \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle + \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \\ &= ||\vec{y}||^2 + ||\vec{z}||^2 . \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned}
||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{x})||^2 &= ||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y}+\vec{z})||^2 \\
&= ||i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{y})+i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{z})||^2 \\
&= ||-\vec{y}+\vec{z}||^2 \\
&= \langle \vec{z}-\vec{y}, \vec{z}-\vec{y}\rangle \\
&= \langle \vec{y},\vec{y}\rangle - 2\langle \vec{y},\vec{z}\rangle + \langle \vec{z},\vec{z}\rangle \\
&= ||\vec{y}||^2 + ||\vec{z}||^2 \\
&= ||\vec{x}||^2 \ ;
\end{aligned}$$

ce qui pproueve que $i_{\vec{u},\vec{v}}$ *est une isométrie.*

d) (1 point) Montrer que

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \text{ et } i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{u} \ .$$

Solution

Rappelons d'abord (cf. le point i de la proposition IV.3.8,) que

$$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \Rightarrow (\vec{v}-\vec{u}) \perp (\vec{u}+\vec{v}) \ .$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \tfrac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})\right) \\
\Rightarrow \quad i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) &= i_{\vec{u},\vec{v}}\left[\tfrac{1}{2}\left((\vec{u}+\vec{v})+(\vec{u}-\vec{v})\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{2}\left(i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}+\vec{v})+i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}-\vec{v})\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}-(\vec{u}-\vec{v})\right) \\
&= \vec{v} \ .
\end{aligned}$$

Puisque les rôles de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont identiques on obtient de manière exactement analogue*

$$i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{v}) = \vec{u} \ .$$

2) (1 point) Déduire des questions précédentes que $\mathcal{O}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble

$$\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E \, ; \, ||\vec{x}|| = 1\} \ .$$

Solution

On a déjà expliqué (cf. la question 1 de l'exercice VII.3.12,) pourquoi $\mathcal{O}(E)$ *agit sur* $\mathcal{S}$*. On vient de montrer (cf. 1.d,) que pour tout* $(\vec{u},\vec{v}) \in \mathcal{S}\times\mathcal{S}$ *l'isométrie* $i_{\vec{u},\vec{v}}$ *satisfait* $i_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}$ *; ce qui prouve que l'action est transitive.*

3) (2 points) (**Le cas de la dimension** 2)
Soit P **un espace euclidien de dimension** 2**, et**

$$(\vec{u},\vec{v}) \in P\times P \ \textbf{tel que} \ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \neq 0.$$

Montrer qu'il existe une unique rotation $r_{\vec{u},\vec{v}}$ *i.e.* un unique élément

$$r_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathcal{SO}(P) \ \text{ tel que } \ r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v} \ .$$

Solution

Supposons d'abord que $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = 1$*. Soit* $\vec{w} \in P$ *tel que* $(\vec{u},\vec{w})$ *soit une base orthonormée de* P*. Puisque* $||\vec{v}|| = 1$*, il existe*

$$(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \ , \ a^2+b^2 = 1 \ , \ \vec{v} = a\vec{u} + b\vec{v} \ .$$

S'il existe $r_{\vec{u},\vec{v}}$ *telle que* $r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}$, $\vec{z} = r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{w})$ *vérifie*

$$||\vec{z}|| = 1 \text{ et } \langle \vec{v},\vec{z}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle = 0 \ .$$

Il s'ensuit que

$$\vec{z} = -b\vec{u} + a\vec{v} \text{ ou } \vec{z} = b\vec{u} - a\vec{v}\,;$$

ce qui correspond aux matrices pour $r_{\vec{u},\vec{v}}$ dans la base $(\vec{u},\vec{w})$:

$$M_{(\vec{u},\vec{w})}(r_{\vec{u},\vec{v}}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ou } M_{(\vec{u},\vec{w})}(r_{\vec{u},\vec{v}}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Seule la première est une matrice de rotation.
Dans le cas où l'on a simplement $||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| \neq 0$, posons

$$\vec{u_1} := \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u} \text{ et } \vec{v_1} := \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}\,.$$

Appliquant le résultat ci-dessus à $(\vec{u_1},\vec{v_1})$, on obtient l'existence d'une rotation r telle que $r(\vec{u_1}) = \vec{v_1}$; ce qui entraîne, par linéarité $r(\vec{u}) = \vec{v}$. Le même argument assure que si $r(\vec{u}) = \vec{v}$, nécessairement $r(\vec{u_1}) = \vec{v_1}$, ce qui assure l'unicité de r.

4) (2 points) (**Le cas de la dimension** 3)
Soient E un espace euclidien de dimension 3 et

$$(\vec{u},\vec{v}) \in E \times E \ \textbf{tel que} \ ||\vec{u}|| = ||\vec{v}||\,.$$

Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } f(\vec{u}) = \vec{v}\,.$$

Solution

Soit

$$\vec{w} \in E \setminus \{0\} \text{ tel que } \vec{u}\perp\vec{w} \text{ et } \vec{u}\perp\vec{w}\,.$$

Un tel vecteur existe toujours puisque

$$\dim \operatorname{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\} \leq 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Vect}\{\vec{u},\vec{v}\}^{\perp} \geq 1\,.$$

En notant $P := \vec{w}^{\perp}$, on a $\vec{u} \in P$ et $\vec{v} \in P$. On sait alors (cf. 3,) qu'il existe (on perd peut-être lu'nicité si on n'exige pas $\vec{u} \neq 0$,)

$$r_{\vec{u},\vec{v}} \in \mathcal{SO}(P) \text{ tel que } r_{\vec{u},\vec{v}}(\vec{u}) = \vec{v}\,.$$

Il existe alors une unique application linéaire

$$f \in \operatorname{End}(E) \text{ telle que } f_{|\operatorname{Vect}\{\vec{w}\}} = \operatorname{Id} \text{ et } f_{|P} = r_{\vec{u},\vec{v}}\,.$$

On a déjà montré (cf. 1,) qu'une telle application est bien définie. Une vérification très semblable prouve que c'est également une isométrie qui répond de plus à la caractérisation des éléments de $\mathcal{SO}(E)$.

5) (1 point) Déduire de ce qui précède que si E est un espace euclidien de dimension 2 ou 3,[12] que $\mathcal{SO}(E)$ agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{S} := \{\vec{x} \in E\,;\, ||\vec{x}|| = 1\}$.

Solution

L'argument est, mutatis mutandis exactement celui donné à la question 2 , en remplaçant l'existence d'une isométrie (cf. la question 1 ,) par l'existence d'une rotation (isométrie directe) (cf. 3, question 4.)

Exercice B : (10 points) (**Sous-groupes finis de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$**)

Il n'est absolument pas nécessaire, pour résoudre cet exercice, de savoir ce qu'est l'équation caractéristique d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, et encore moin d'en connaître la forme.

Dans la suite E est un espace euclidien de dimension 3 et G un sous-groupe de $\mathcal{SO}(E)$.

1) (2 points) Montrer que G a 2 (resp. 3) éléments si et seulement si il existe

$$r_G \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } r_G^2 = \operatorname{Id}_E \text{ et } G = \{r_G, \operatorname{Id}_E\} \text{ (resp. } r_G^3 = \operatorname{Id}_E \text{ et } G = \{\operatorname{Id}_E, r_G, r_G^2\}\text{ .)}$$

12. Le résultat vaut en fait en toute dimension mais nous n'avons pas fourni les arguments permettant de l'établir.

Solution

La condition est évidemment suffisante ; car si $r_G \in \mathcal{SO}(E)$ *vérifie* $r_G^2 = \mathrm{Id}_E$ *(resp.* $r_G^3 = \mathrm{Id}_E$*,) la loi de composition de* $\mathcal{SO}(E)$ *se restreint à l'ensemble* $\{\mathrm{Id}_E, r_G\}$ *(resp.* $\{\mathrm{Id}_E, r_G, r_G^2\}$*.) De plus* $r_G = r_G^{-1}$ *(resp.* $r_G^2 = r_G^{-1}$*,) assure qu'on construit bien ainsi des groupes.*
Réciproqument elle est nécessaire. En effet soit G *un sous-groupe de* $\mathcal{SO}(E)$ *de cardinal* 2 *ou* 3*. Puisque* G *est un sous-groupe de* $\mathcal{SO}(E)$*, l'élément neutre* $\mathrm{Id}_E \in G$*. Il existe donc*

$$r \in \mathcal{SO}(E) \text{ (resp. } r \in \mathcal{SO}(E) \text{ et } s \in \mathcal{SO}(E)\text{) tel que } G = \{\mathrm{Id}_E, r\} \text{ (resp. } G = \{\mathrm{Id}_E, r, s\}\text{ .)}$$

$\#(G) = 2$ *alors* $r^2 = \mathrm{Id}_E$ ou r*, puisque la loi de composition doit être interne sur un sous-groupe. Or*

$$r^2 = r \Rightarrow r = \mathrm{Id}_E \Rightarrow G = \{\mathrm{Id}_E\} \Rightarrow \#(G) = 1\,.$$

Ainsi $r^2 \neq r$ *et donc* $r^2 = \mathrm{Id}_E$*.*

$\#(G) = 3$ *Pour les même raisons que ci-dessus on a*

$$r^2 = \mathrm{Id}_E \text{ ou } r^2 = r \text{ ou } r^2 = s\,.$$

Comme précédemment $r^2 = r$ *entraînerait* $r = \mathrm{Id}_E$ *et par conséquent* $\#(G) = 2$*.*
Si $r^2 = \mathrm{Id}_E$*, le sous ensemble* $\{\mathrm{Id}_E, r\}$ *de* G *est un sous-groupe de cardinal* 2*. Or le cardinal d'un sous-groupe divise le cardinal du groupe et* 2 *ne divise pas* 3*.*
On a donc finalement nécessairement $r^2 = s$*.*
Reste à déterminer la valeur de r^3 *; qui ne peut être ni* r^2 *car alors* $r = \mathrm{Id}_E$ *; ni* r *car alors* $r^2 = \mathrm{Id}_E$ *; et et donc finalement* Id_E*.*

2) (2 points) Pour G un sous-groupe à 2 (resp. 3) éléments de $\mathcal{SO}(E)$, montrer qu'il existe une droite D_G et un plan P_G orthogonaux tels que

$$\forall f \in G,\ f_{|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ f_{|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G) \text{ et } {f_{|P_G}}^2 = \mathrm{Id}_E \text{ (resp. } {f_{|P_G}}^3 = \mathrm{Id}_E\text{ .)}$$

Solution

Notons

$$G = \{\mathrm{Id}_E, r_G\} \text{ (resp. } \{\mathrm{Id}_E, r_G, r_G^2\}\text{ .)}$$

Puisque $r_G \in \mathcal{SO}(E)$*, il existe une droite* D_G *et un plant* P_G *orthogonaux tels que*

$$r_{G|D_G} = \mathrm{Id}D_G \text{ et } r_{G|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G)\,.$$

On a évidemment

$$\mathrm{Id}_{E|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ \mathrm{Id}_{E|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G) \text{ et } r^2_{G|D_G} = \mathrm{Id}D_G\ ,\ r^2_{G|P_G} \in \mathcal{SO}(P_G)\,.$$

Puisque P_G *est stable sous* r_G*,*

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ {r_{G|P_G}}^k = r^k_{G|P_G}\,.$$

3) (2 points) Étant donné un sous-groupe G de $\mathcal{SO}(E)$, de cardinale 2 ou 3, déterminer $r_{G|P_G}$.

Solution

Soit $(\vec{u}, \vec{v})$ *une base orthonormée de* P_G*. Alors il existe*

$$(a,b) \in \mathbb{R}^2\ ,\ a^2 + b^2 = 1\ ,\ M_G := M_{(\vec{u},\vec{v})}(r_G) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} M_G^2 &= \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ M_G^3 &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^3-3ab^2 & -3a^2b+b^3 \\ 3a^2b-b^3 & -3ab^2+a^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$\#(G) = 2$

$$\begin{aligned} & {r_{G|P_G}}^2 = \mathrm{Id}_{P_G} \\ \Leftrightarrow\ & M_G^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ a^2-b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} 2a^2 & = & 2 \\ 2b^2 & = & 0 \\ 2ab & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a & = & \pm 1 \\ b & = & 0 \end{array} \right\} . \end{aligned}$$

Or $a = 1$ entraîne $r_G = \mathrm{Id}_E$, ce qui contredit $\#(G) = 2$. On a donc nécessairement

$$r_{G|P_G} = -\mathrm{Id}P_G \ . \qquad 1$$

$\#(G) = 3$

$$\begin{aligned} & {r_{G|P_G}}^3 = \mathrm{Id}_{P_G} \\ \Leftrightarrow\ & M_G^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ a^3-3ab^2 & = & 1 \\ b^3-3a^2b & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ 3a^3+3ab^2 & = & 3a \\ 3a^2b+3b^3 & = & 3b \\ a^3-3ab^2 & = & 1 \\ b^3-3a^2b & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ 3a^3+3ab^2 & = & 3a \\ 3a^2b+3b^3 & = & 3b \\ 4a^3 & = & 1+3a \\ 4b^3 & = & 3b \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ (a-1)(4a^2+4a+1) & = & 0 \\ b(4b^2-3) & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{ \begin{array}{lcl} a^2+b^2 & = & 1 \\ (a-1)(2a+1)^2 & = & 0 \\ b(4b^3-3) & = & 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow\ & (a,b) = (1,0) \\ \text{ou}\ & (a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \\ \text{ou}\ & (a,b) = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) . \end{aligned}$$

La solution $(a,b) = (1,0)$ correspond à $r_G = \mathrm{Id}_E$ qu'il faut exclure. On a donc :

$$M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \qquad 2$$

4) (3 points) Soient G et H deux sous-groupes de $\mathcal{SO}(E)$ de même cardinal 2 ou 3. Montrer qu'il existe

$$f \in \mathcal{SO}(E) \text{ tel que } H = f \circ G \circ f^{-1} .$$

Indication : *On pourrat utiliser l'exercice A,question 4.*

Solution

Notons

$$r_G \in G \text{ (resp. } r_H \in H \text{ ,)}$$

(cf. 1.) Soit alors D_G (resp. D_H,) l'axe des éléments de G (resp. H,) (cf. 2,) et

$$\vec{u_G} \in D_G \text{ (resp. } \vec{u_H} \in D_H \text{ tel que } ||\vec{u_G}|| = ||\vec{u_H}|| = 1 .$$

Alors (cf. A.4,) il existe $f \in \mathcal{SO}(E)$ *telle que* $f(\vec{u_G}) = \vec{u_H}$. *On a alors bien évidemment :*

$$\begin{aligned} r_H(\vec{u_H}) &= \vec{u_H} \\ &= f[f^{-1}(\vec{u_H}) \\ &= f(\vec{u_G}) \\ &= f[r_G(\vec{u_G})] \\ &= f\left[r_G[f^{-1}(\vec{u_H})]\right] \\ &= f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{u_H}) . \end{aligned}$$

Ainsi :

$$r_{H|D_H} = f \circ r_G \circ f^{-1}{}_{|D_H} \qquad 1$$

$\#(G) = 2$ *Puisque* f *est une isométrie, ains ainsi que* f^{-1},

$$\begin{array}{lrcl} \forall \vec{x} \in E, & \vec{x} & \in & P_H \\ \Leftrightarrow & \langle \vec{x}, \vec{u_H} \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}(\vec{x}), f^{-1}(\vec{u_H}) \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}(\vec{x}), \vec{u_G} \rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \vec{x} & \in & P_G \\ \Leftrightarrow & r_G[f^{-1}(\vec{x})] & = & -f^{-1}(\vec{x}) \\ \Leftrightarrow & f\left[r_G[f^{-1}(\vec{x})]\right] & = & -f[f^{-1}(\vec{x})] \\ & & = & -\vec{x} \\ & & = & r_H(\vec{x}) \ ; \end{array}$$

d'où il résulte que

$$r_{H|P_H} = f \circ r_G \circ f^{-1}{}_{|P_H} \ ;$$

ce qui combiné à question 1, donne

$$r_H = f \circ r_G \circ f^{-1} .$$

Comme par ailleurs bien évidemment

$$\mathrm{Id}_E = f \circ \mathrm{Id}_E \circ f^{-1}, \qquad 2$$

il vient

$$H = f \circ G \circ f^{-1} .$$

$\#(G) = 3$ *Soit* $(\vec{v_G}, \vec{w_G})$ *une base orthonormée de* P_G *dans laquelle la matrice de* $r_{G|P_G}$ *est (cf. 3.2,)* $M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Une telle base existe toujours, en effet, il se pourrait que l'on ait* $M_G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$,
mais alors

$$M_{(\vec{x_G}, -\vec{w_G})}(r_{G|P_G}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Puisqu'on a déjà constaté que

$$f_{|P_G} : P_G \to P_H \text{ est une isométrie,}$$

en notant $\vec{v_H} := f(\vec{v_G})$ *et* $\vec{w_H} := f(\vec{w_G})$, $(\vec{v_H}, \vec{w_H})$ *est une base orthonormée de* P_H. *En notant* $M_H := M_{(\vec{v_H}, \vec{w_H})}(r_{H|P_H})$, *on a (cf. 3.2,)*

$$M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

$M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *On a alors :*

$$\begin{aligned} r_H(\vec{v_H}) &= -\frac{1}{2}\vec{v_H} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w_H} \\ &= -\frac{1}{2}f(\vec{v_G}) + \frac{\sqrt{3}}{2}f(\vec{w_G}) \\ &= f\left(-\frac{1}{2}\vec{v_G} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{w_G}\right) \\ &= f[r_G(\vec{v_G})] \\ &= f\left[r_G[f^{-1}(\vec{v_H})]\right] \\ &= f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{v_H}) \\ r_H(\vec{w_H}) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v_H} + -\frac{1}{2}\vec{w_H} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}f(\vec{v_G}) + -\frac{1}{2}f(\vec{w_G}) \\ &= f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{v_G} + -\frac{1}{2}\vec{w_G}\right) \\ &= f[r_G(\vec{w_G})] \\ &= f\left[r_G[f^{-1}(\vec{w_H})]\right] \\ &= f \circ r_G \circ f^{-1}(\vec{v_H})\ ; \end{aligned}$$

ce qui combiné à question 1, assure que

$$r_H = f \circ r_G \circ f^{-1}\ .$$

Alors

$$\begin{aligned} r_H^2 &= f \circ r_G \circ f^{-1} f \circ r_G \circ f^{-1} \\ &= f \circ r_G^2 \circ f^{-1}\ ; \end{aligned}$$

d'où il résulte finalement (cf. 2,)

$$H = f \circ G \circ f^{-1}\ .$$

$M_H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *Considérons l'unique endomorphisme* $r \in \mathrm{End}(E)$ *défini par*

$$r(\vec{u_H}) = -\vec{u_H}\ ,\ r(\vec{v_H}) = \vec{v_H} \text{ et } r(\vec{w_H}) = -\vec{w_H}\ .$$

Il est presqu'immédiat sur cette définition que $r \in \mathcal{SO}(E)$ *; et par conséquent*

$$g := r \circ f \in \mathcal{SO}(E)\ .$$

Alors

$$M_{(g(\vec{v_G}),g(\vec{w_G}))}(r_{H|P_H}) = M_{(\vec{v_H},-\vec{w_H})}(r_{H|P_H}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Le même raisonnement que ci-dessus s'applique alors à g *et l'on a*

$$H = g \circ G \circ g^{-1}\ .$$

5) (1 point) Que peut-on dire de l'action par conjugaison de $\mathcal{SO}(E)$ sur l'ensemble de ses sous groupes de cardinal 2 (resp. 3 ?)

Solution

Cette action est transitive (cf. 4.)

Exercice C : (6 points) **(Décomposition des rotations)**

On pourra dans cette exercice utiliser les résulteats de la question 3 de l'exercice A et de la question 4 de l'exercice A même si on ne les a pas établis.

Soient

— E **un espace euclidien de dimension** 3 ;
— $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **une base orthonormée de** E ;
— $f \in \mathcal{SO}(E)$ **une rotation.**

1) (2 points) Montrer que $f(\vec{j}) \perp \vec{i}$ si et seulement s'il existe des rotations $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$,

$$(\textit{i.e.}\ \text{vérifiant}\ r_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } r_{\vec{j}}(\vec{j}) = \vec{j}\ ,)$$

et telles que :

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}\ ;$$

et que dans ce cas $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ sont uniques.

Solution

i) ***(Réciproque)***

On remarque que la condition $f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}$ entraîne

$$f(\vec{j}) = r_{\vec{i}}[r_{\vec{j}}(\vec{j}) = r_{\vec{i}}(\vec{j})\ . \qquad 1$$

Or $\vec{j} \in \vec{i}^{\perp}$ qui est un plan stable pour $r_{\vec{i}}$, si bien que

$$f(\vec{j}) = r_{\vec{i}}(\vec{j}) \in \vec{i}^{\perp}\ .$$

ii) ***(Sens direct)***

Supposons que $f(\vec{j}) \in \vec{i}^{\perp}$. L'identité point i,point 1 entraîne que

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \Rightarrow r_{\vec{i}}(\vec{j}) = f(\vec{j})\ .$$

On sait que la restriction $r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}}$ de la rotation $r_{\vec{i}}$ au plan $\vec{i}^{\perp}$ orthogonal à son axe est une rotation de ce plan i.e.

$$r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}} \in \mathcal{SO}(\vec{i}^{\perp})\ .$$

Puisque $||f(\vec{j})|| = ||\vec{j}||$, il existe un unique (cf. A.3,) $r \in \mathcal{SO}(\vec{i}^{\perp})$ tel que $r(\vec{j}) = f(\vec{j})$.
Ce qui proueve l'unicité de $r_{\vec{i}}$ définie par

$$r_{\vec{i}}(\vec{i}) = \vec{i} \text{ et } r_{\vec{i}_{|\vec{i}^{\perp}}} = r\ ;$$

ce qui et une bonne définition puisque $E = \text{Vect}\{\vec{i}\} \oplus \vec{i}^{\perp}$.
Désormais si $r_{\vec{j}}$ existe on a nécessairement

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \Rightarrow r_{\vec{j}} = r_{\vec{i}}^{-1} \circ f\ ;$$

ce qui définit complètement et de manière cohérente $r_{\vec{j}}$ puisque $\mathcal{SO}(E)$ étant un groupe,

$$r_{\vec{i}} \in \mathcal{SO}(E) \text{ et } f \in \mathcal{SO}(E) \Rightarrow r_{\vec{i}}^{-1} \circ f \in \mathcal{SO}(E)\ ;$$

et que de plus

$$r_{\vec{j}}(\vec{j}) = r_{\vec{i}}^{-1}[f(\vec{j})] = r_{\vec{i}}^{-1}[r_{\vec{i}}(\vec{j})] = \vec{j}\ .$$

On peut cependant constater que :

$$\begin{array}{rcl} r_{\vec{j}} & = & r_{\vec{i}}^{-1} \circ f \\ \Rightarrow\ r_{\vec{j}}[f^{-1}(\vec{i})] & = & r_{\vec{i}}^{-1}\left[f[f^{-1}(\vec{i})]\right] \\ & = & r_{\vec{i}}^{-1}(\vec{i}) \\ & = & \vec{i}\ ; \end{array}$$

ce qui caractérise i.e. prouve l'unicité (cf. A.3,) $r_{\vec{j}}$. En effet,

$$\begin{array}{rrcl} & f(\vec{j}) & \perp & \vec{i} \\ \Leftrightarrow & \langle f(\vec{j}), \vec{i}\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f^{-1}[f(\vec{j})], f^{-1}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle \vec{j}, f^{-1}(\vec{i})\rangle \,. & & \end{array}$$

2) (2 points) En déduire que tout $f \in \mathcal{SO}(E)$ se décompose sous la forme :

$$f = r'_{\vec{j}} \circ r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}}$$

où $r_{\vec{j}}$ et $r'_{\vec{j}}$ sont des rotations d'axe $\vec{j}$ et $r_{\vec{i}}$ est une rotation d'axe $\vec{i}$.

Solution

S'il existe $(r'_{\vec{j}}, r_{\vec{i}}, r_{\vec{j}})$ satisfaisant aux conditions,

$$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \,;$$

ce qui entraîne (cf. 1,)

$$\begin{array}{rrcl} & r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})] & \perp & \vec{i} \\ \Leftrightarrow & \langle r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})], \vec{i}\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle r'_{\vec{j}}\left[r'^{-1}_{\vec{j}}[f(\vec{j})]\right], r'_{\vec{j}}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \langle f(\vec{j}), r'_{\vec{j}}(\vec{i})\rangle & = & 0 \\ \Leftrightarrow & f(\vec{j}) & \perp & r'_{\vec{j}}(\vec{i}) \,. \end{array}$$

Par ailleurs si on impose à $r'_{\vec{j}}$ d'être d'axe $\vec{j}$,

$$\vec{i} \in \vec{j}^{\perp} \Rightarrow r'_{\vec{j}}(\vec{i}) \in \vec{j}^{\perp} \,;$$

Il s'ensuit que

$$r'_{\vec{j}}(\vec{i}) \in \vec{j}^{\perp} \cap f(\vec{j})^{\perp} \,. \tag{1}$$

On peut alors distinguer les deux cas suivants :

$f(\vec{j}) = \pm\vec{j}$ *Alors on a*

$$f(\vec{j}) = \pm\vec{j} \perp \vec{i} \,;$$

et il existe (cf. 1,) $r_{\vec{i}}$ et $r_{\vec{j}}$ d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ telles que

$$f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \,;$$

si bien que $r'_{\vec{j}} = \mathrm{Id}_E$ convient.

$f(\vec{j})$ *et* $\vec{j}$ *sont indépendants Dans ce cas $\vec{j}^{\perp} \cap f(\vec{j})^{\perp}$ est une droite à laquelle appartiennent exactement 2 vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ de norme 1. La condition question 1, combinée aux fait que $||\vec{i}|| = 1$ et que $r'_{\vec{j}}$ est une isométrie entraîne que*

$$r'_{\vec{j}}(\vec{i}) = \pm\vec{u} \,.$$

Ceci définit deux et deux seulement rotations d'axe $\vec{j}$ vérifiant

$$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f(\vec{j}) \perp \vec{i} \,.$$

Il existe alors (cf. 1,) un unique couple $(r_{\vec{i}}, r_{\vec{j}})$ de rotations d'axes respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que

$$r'^{-1}_{\vec{j}} \circ f = r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \text{ i.e. } f = r'_{\vec{j}} \circ r_{\vec{i}} \circ r_{\vec{j}} \,.$$

3) (2 points) Décomposer $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$ et $(x, y, z) \mapsto (x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha, z)$.