Université Orsay-Paris-Saclay — Année 2022–2023

LDD/S6 MDD354 — Structures algébriques

Corrigé Des exercices I.5

I.5 . –Exercices

Exercice I.5.1 (Unicité des éléments remarquables) Soit $(E, *)$ un ensemble muni d'une loi associative.

Solution

Il s'agit en définitive d'un magma (cf. cours définition 0.5.1) associatif ; et l'on pourra se borner ici à rappler les résultats de la proposition 0.5.14 et de l'exercice 0.7.13.

1) (**Élément neutre**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un élément neutre ϵ celui-ci est unique.

Solution

(cf. le point i de la proposition 0.5.14.)

2) (**Symétrique**)
Montrer que si $(E, *)$ possède un élément neutre ϵ, tout élément $x \in E$ possède au plus un symétrique.

Solution

(cf. le point ii de la proposition 0.5.14.)

Exercice I.5.2 (Affaiblissement des axiomes de groupe) Soit G un ensemble muni d'une loi associative notée $(G, *)$. On suppose qu'il existe un élément neutre à gauche e (c'est-à-dire que $e * x = x$ pour tout $x \in G$) et que tout élément admet un inverse à gauche (c'est-à-dire que pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $y * x = e$.)

1) Montrer que l'inverse à gauche est aussi un inverse à droite *i.e.*

$$y * x = e \Rightarrow x * y = e .$$

Indication : *On pourra considérer l'inverse à gauche z de y et calculer $e * (x * y) = (z * y) * (x * y)$.*

Solution

Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $y * x = e$ et $z \in g$ tel que $z * y = e$. Alors :

$$\begin{aligned} x * y &= e * (x * y) \\ &= (z * y) * (x * y) \\ &= ((z * y) * x) * y \\ &= (z * (y * x)) * y \\ &= (z * e) * y \\ &= z * (e * y) \\ &= z * y \\ &= e . \end{aligned}$$

2) Montrer que e est aussi un élément neutre à droite *i.e.*

$$\forall x \in G, \ x * e = x .$$

Solution

Pour tout $x \in G, \exists y \in G,$ *tel que* $y * x = e$; *mais (cf. la question 1 ,) on a aussi* $x * y = e$. *Alors*

$$x * e = x * (y * x) = (x * y) * x = e * x = x .$$

3) Montrer que $(G, *)$ est un groupe.

Solution

Grâce à la question 2 et à la question 1 , les axiomes de la définition I.1.1 sont satisfaits.

Exercice I.5.3 (Morphismes de groupes) Soit

$$f : (G, *, \epsilon_G) \to (H, \cdot, \epsilon_H)$$

un morphisme de groupes.

Solution

Cet exercice est évidemment à mettre en rapport avec exercice 0.7.14 et l'on va constater que l'hypothèse que l'on a des groupes et non plus simplement des magmas donnent des propriétés supplémentaires :

1) (**Élément neutre**)
Montrer que $f(\epsilon_G) = \epsilon_H$.

Solution

On a $\epsilon_G * \epsilon_G = \epsilon_G$; *ce qui entraîne, puisque* f *est un morphisme*

$$f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G * \epsilon_G) = f(\epsilon_G) .$$

Or H *est un groupe si bien que* $f(\epsilon_G)$ *a un symétrique* $\eta \in H$. *L'égalité précédente entraîne alors :*

$$\epsilon_H = \eta \cdot f(\epsilon_G) \, a = \eta \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) \cdot f(\epsilon_G) = f(\epsilon_G) .$$

2) (**Symétrique**)
Montrer que pour tout $x \in G$, si y est son symétrique, $f(y)$ est le symétrique de $f(x)$.

Solution

Si $(x, y) \in G \times G$ *sont symétriques l'un de l'autre*

$$\begin{array}{rrcl} & x * y = y * x & = & \epsilon_G \\ \Rightarrow & f(x * y) = f(y * x) & = & f(\epsilon_G) \\ \Rightarrow & f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x) & = & \epsilon_H \ ; \end{array}$$

en utilisant bien entendu question 1.

3) (**Image**)
Montrer que $\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de $(H, \cdot)$.

Solution

Puisque G *est un groupe il est non vide et par conséquent* $\operatorname{Im} f = f(G)$ *est non vide.*
De plus pour tout $(u, v) \in \operatorname{Im} f \times \operatorname{Im} f$, *il existe* $(x, y) \in G \times G$ *tel que*

$$u = f(x) \text{ et } v = f(y) .$$

Or (cf. 2,) $u^{-1} = f(x^{-1})$; *si bien que* $\cdot^{-1} v = f(x^{-1} * y)$ *qui appartient à* $\operatorname{Im} f$, *qui et donc ien un sous-groupe de* H.

4) (**Noyau**)
Montrer que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

Solution

Puisque (cf. 1,) $f(\epsilon_G) = \epsilon_H, \epsilon_G \in \operatorname{Ker} f$ *; si bien que* $\operatorname{Ker} f \neq \emptyset$.
De plus :

$$\begin{array}{rcl} \forall (x,y) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Ker} f, \quad f(x^{-1} * y) & = & f(x^{-1}) \cdot f(y) \\ & = & f(x)^{-1} \cdot f(y) \\ & = & \epsilon_H^{-1} \cdot \epsilon_H \\ & = & \epsilon_H \\ \Rightarrow \qquad x^{-1} * y & \in & \operatorname{Ker} f\,. \end{array}$$

ce qui prouve que $\operatorname{Ker} f$ *est un sous-groupe de* G.

5) (**Isomorphisme**)
Montrer que si f est bijective et que g est son applications réciproque, alors g est un morphisme de groupe.

Solution

Ici il n'est pas utile d'avoir affaire à des groupes puisque le résultat est déjà vrai pour des magmas associatifs (cf. 0.5.6.)

Exercice I.5.4 (Le groupe des bijections d'un ensemble E) Pour E un ensemble, on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans lui-même. On notera $\circ$ de manière usuelle la composition des applications.

1) (**Le groupe** $(\mathcal{S}(E), \circ)$)
Soit E un ensemble.

a) Vérifier que $\circ$ est une loi interne sur $\mathcal{S}(E)$.

Solution

La composée de deux bijections de E *dans* E *est encore une bijection de* E *dans* E.

b) Montrer qu'il existe un élément neutre pour la loi $\circ$ dans $\mathcal{S}(E)$ et le caractériser.

Solution

Il est immédiat de constater que

$$\forall f \in \mathcal{S}(E),\ \mathrm{Id}_E \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$$

c'est-à-dire que l'application $\mathrm{Id}_E : E \to E$ *caractérisée par*

$$\forall x \in E,\ \mathrm{Id}E(x) = x$$

est un élément neutre pour $\circ$ *dans* $\mathcal{S}(E)$.

c) Montrer finalement que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est un groupe.

Solution

On a vu au point a que la loi $\circ$ *sur* $\mathcal{S}(E)$ *est une loi interne. Elle est évidemment associative. Elle possède un élément neutre* Id_E *(cf. le point b .)*
De plus pour toute bijection $f : E \to E$ *il existe une bijection* $g : E \to E$ *telle que*

$$\forall x \in E,\ g[f(x)] = f[g(x)] = x$$

c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_E$ *(cf. l'exercice 0.7.8,) donc que* g *est le symétrique de* f *pour* $\circ$ *qu'on notera usuellement* f^{-1}.

2) (**La bijection** $\mathcal{S}(E) \cong \mathcal{S}(F)$)
Soient E et F deux ensembles et $u : E \to F$ une bijection de E dans F dont on notera v la bijection réciproque *i.e.*

$$v : F \to E : v \circ u = \mathrm{Id}_E\,,\ u \circ v = \mathrm{Id}_F\,.$$

Montrer que l'application

$$\phi_u : (\mathcal{S}(E), \circ) \to (\mathcal{S}(F), \circ)\,,\ f \mapsto u \circ f \circ v$$

est un isomorphisme de groupes.

Solution

*i) (**Application**)*
On constate d'abord que, pour tout $f \in \mathcal{S}(E)$, $\phi_u(f) = u \circ f \circ v$ est bien une application de F dans lui-même qui est de plus, une bijection comme composée de trois bijections. C'est donc bien un élément de $\mathcal{S}(F)$.

*ii) (**Morphisme**)*
De plus,

$$\begin{array}{rcl} \forall (f,g) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E), \quad \phi_u(f \circ g) & = & u \circ f \circ g \circ v \\ & = & u \circ f \circ v \circ u \circ g \circ v \\ & = & \phi_u(f) \circ \phi(g) \ ; \end{array}$$

c'est-à-dire que ϕ_u est bien un morphisme de groupes.

*iii) (**Isomorphisme**)*
Notons

$$\phi_v \ : \ (\mathcal{S}(F), \circ) \ \to \ (\mathcal{S}(E), \circ) \ , \ f \ \mapsto \ v \circ f \circ u$$

Alors :

$$\begin{array}{rcl} \forall f \in \mathcal{S}(E), \quad \phi_v[\phi_u(f)] & = & v \circ \phi_u(f) \circ u \\ & = & v \circ u \circ f \circ v \circ u \\ & = & f \\ \Rightarrow \quad \phi_v \circ \phi_u & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(E)} \ ; \end{array}$$

et de plus :

$$\begin{array}{rcl} \forall f \in \mathcal{S}(F), \quad \phi_u[\phi_v(f)] & = & u \circ \phi_v(f) \circ v \\ & = & u \circ v \circ f \circ u \circ v \\ & = & f \\ \Rightarrow \quad \phi_u \circ \phi_v & = & \mathrm{Id}_{\mathcal{S}(F)} \ . \end{array}$$

Ceci prouve que ϕ_u est un isomorphisme, d'isomorphisme réciproque ϕ_v.

Exercice I.5.5 (Sous-groupes) 1) (Caractérisation des sous-groupes)
Étant donné un groupe $(G, *)$, montrer qu'une partie $H \subset G$ de G est un sous-groupe (cf. cours définition I.3.1,) de G si et seulement si, $H \neq \emptyset$ et

$$\forall x \in H, \ \forall y \in H, \ x * y^{-1} \in H \ .$$

Solution

(cf. I.3.5.)

2) (Groupe des automorphismes)
Complétez la construction de l'exemple I.3.6.

Solution

Étant donné un groupe G,

- *on constate d'abord que $\mathrm{Aut}(G) \neq \emptyset$, puisqu'on a remarqué (cf. l'exemple I.2.7,) que $\mathrm{Id}_G \in \mathrm{Aut}(G)$.*
- *De plus pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, puisque $\phi \in \mathcal{S}(G)$, il exist $\psi \in \mathcal{S}(G)$ tel que*

  $$\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = \mathrm{Id}_G \ .$$

  Il résulte alors lemme 0.5.5 que ψ et également un morphisme et donc un automorphisme i.e. $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$.
- *Enfin $\forall (\phi, \psi) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(G)$, , $\phi \circ \psi \in \mathcal{S}(G)$, puisqu'on sait déjà que $\mathcal{S}(G)$ est un groupe. De plus $\phi \circ \psi$ est un morphisme d'après le point ii du lemme I.2.2.*

Il résulte alors des vérifications ci-dessus et de la proposition I.3.5 que $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}(G), \circ)$.

3) (Union de deux sous-groupes)
Étant donnés des sous-groupes H et K d'un groupe commutatif $(G, +)$, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G, +)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.
Indication : *Montrer qu'il revient au même de démontrer que [$H \not\subset K$ et $H \cup K$ sous-groupe entraîne $K \subset H$] puis prouver cette dernière assertion.*

Solution

Étant donnés un groupe commutatif $(G,+)$, H et K des sous-groupes, si $H \subset K$ (resp. $K \subset H$,) $H \cup K = K$ (resp. H) qui est bien évidemment un sous-groupe.
Si $H \cup K$ est un sous-groupe de $(G,+)$ supposons que H n'est pas inclus dans K. Il existe alors $x \in H$ tel que $x \notin K$. Alors pour tout $y \in K$, x et y sont des éléments de $H \cup K$ et par conséquent $x+y \in H \cup K$ c'est-à-dire que $x+y \in K$ ou $x+y \in H$. Si $x+y \in K$, comme $y \in K$, $x+y-y \in K$ c'est-à-dire que $x \in K$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Il s'ensuit que nécessairement $x+y \in H$. Comme $x \in H$, $x+y-x \in H$ c'est-à-dire que $y \in H$. Nous avons donc démontré que tout élément $y \in K$ est dans H c'est-à-dire que $K \subset H$.

4) (**Intersection de deux sous-groupes**)
Pour deux sous-groupes H et K d'un groupe G, $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

Solution

Puisque H et K sont des sous-groupes $\epsilon \in H$ et $\epsilon \in K$; si bien que $\epsilon \in H \cap K$ qui est donc non vide.
De plus $\forall (x,y) \in (H \cap K) \times (H \cap K)$, ,

$$x^{-1} * y \in H \text{ et } x^{-1} * y \in K$$

puisque H et K sont des sous-groupes. Par conséquent $x^{-1} * y \in H \cap K$ qui est donc un sous-groupe.

5) Soit S une partie de G et H une autre partie de G. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'ensemble H est l'intersection de tous les sous-groupes de G contenant S.

b) L'ensemble H est un sous-groupe de G contenant S et tel que, pour tout sous-groupe K de G contenant S, $H \subset K$.

c) H est constitué des éléments $s_1 s_2 \dots s_r$ avec $r \geq 1$ où un élément s_i est dans S ou a son inverse dans S.

Solution

a $\Rightarrow$ b L'intersection d'une famille (non nécessairement finie) de sous-groupes est encore un sous-groupe. Si chaque élément de la famille contient S, l'intersection contient encore S. Enfin si K est un sous-groupe contenant S, c'est précisément un élément de la famille et il contient donc l'intersection H.

b $\Rightarrow$ a Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les sous-groupes de G contenant S. Alors par hypothèse $H \in \mathcal{H}$. Si $L = \bigcap_{K \in \mathcal{H}} K$, $L \subset H$. Mais, par hhypothèse, $\forall K \in \mathcal{H}$, , $H \subset K$, donc $H \subset L$, donc $H = L$.

b $\Leftrightarrow$ c Notons L l'ensemble des produit $s_1 \dots s_r$ avec

$$\forall 1 \leq i \leq r,\ s_i \in S \text{ ou } s_i^{-1} \in T\,.$$

Vérifions d'abord que L est un sous-groupe : Si $S = \emptyset$, $L = \{\epsilon\}$ où ϵ est l'élément neutre de G ; et L est donc bien un sous-groupe de G. Sinon $L \subset S$, de manière presque immédiate ; ce qui entraîne $L \neq \emptyset$.
De plus, pour tout $s_1, \dots s_r \in L$,

$$(s_1 \dots s_r)^{-1} = s_r^{-1} \dots s_1^{-1} \in L\,.$$

Enfin pour

$$(s_1 \dots s_r, s'_1 \dots s'_{r'} \in L \times L\,,\ s_1 \dots s_r \cdot s'_1 \dots s'_{r'} \in L\,;$$

ce qui achève de prouver que L est un sous-groupe de G contenant S.
Or l'équivalence a $\Leftrightarrow$ b assure qu'un tel sous-groupe est unique et que c'est donc bien H défini en b.

Exercice I.5.6 (Famille filtrante) Faire la preuve du point iv de la proposition I.3.7.

Solution

Notons $K := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H$. $\forall n \in \mathbb{N}$, , H_n est un sous-groupe de G par hypothèse ; et H_n est donc non vide ; si bien que $K \neq \emptyset$.
Par ailleurs pour tout $(x,y) \in K \times K$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $x \in H_p$ et $y \in H_q$.
Or il existe, par hypothèse, $r \in \mathbb{N}$ tel que $H_p \subset H_r$ et $H_q \subset H_r$; si bien que

$$x \in H_r \text{ et } y \in H_r\,.$$

Or H_r étant un sous-groupe de G, $x^{-1} * y \in H_r$; comme $H_r \subset K$, $x^{-1} * y \in K$; ce qui achève de prouver que K

est un sous-groupe de G.

Exercice I.5.7 (Groupe de matrices triangulaires) On rappelle que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et qui sont inversibles, *i.e.*

$$\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ \exists B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ A * B = B * A = I,$$

où l'on désignera par I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) (**Le groupe** $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$)
Rappeler pourquoi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un groupe pour la loi $*$.

Solution

— *Il est bien connu que la multiplication des matrices est associative.*
— *Montrons que c'est bien une loi interne sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. En effet pour $A, b, c, D \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, telles que*

$$A * B = B * A = C * D = D * C = I,$$

$$A * C * D * B = A * I * B = A * B = I \text{ et } D * B * A * C = D * I * C = D * C = I\ .$$

— *I est évidemment un élément neutre pour cette loi ; puisque*

$$\forall A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),\ A * I = I * A = A\ .$$

— *Enfin par définition tout $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ possède un inverse.*
Le couple $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$ satisfait donc bien aux axiomes de la définition I.1.1.

2) (**Un sous-groupe de** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$)
Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note

$$\mu(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\mu(a) * \mu(b)$.

Solution

$$\begin{aligned} \mu(a) * \mu(b) &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mu(a+b)\ . \end{aligned}$$

b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mu(a) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Solution

On a vu au point a , que

$$\mu(a) * \mu(-a) = \mu(a - a) = \mu(0) = I\ ;$$

ce qui prouve que $\mu(a) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\mu : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$.

Solution

On a vu au point b , que μ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. De plus (cf. le point a ,)

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \mu(a + b) = \mu(a) * \mu(b)\ ;$$

ce qui correspond à la définition I.2.1.

d) Le groupe $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), *)$ est-il abélien ? Le sous-ensemble $\mathrm{Im}\,\mu$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est-il un sous-groupe abélien de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$?

Solution

On a
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} :$$
la composée d'une rotation et d'une symétrie dépend de l'ordre dans lequel on les compose. Ainsi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *n'est pas abélien.*
En revanche pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, *d'après le point a ,*
$$\mu(a) * \mu(b) = \mu(a + b) = \mu(b + a) = \mu(b) * \mu(a) .$$
Le groupe $(\mathbb{R}, +)$ *étant abélien son image par un morphisme de groupes l'est encore.*

Exercice I.5.8 (Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$) Soit
$$\mathcal{SO}_2\mathbb{R} := \left\{ \rho(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Montrer que $(\mathcal{SO}_2\mathbb{R}, \times)$ est un groupe abélien, et que l'application
$$\begin{array}{rccc} \rho : & (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & \mathcal{SO}_2\mathbb{R} \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta) \end{array}$$
est un morphisme de groupes.

Solution

$$\begin{aligned} \forall(\theta, \phi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \rho(\theta) \times \rho(\phi) &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \\ &= \rho(\theta + \phi) . \end{aligned}$$
On remarque que $\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *qui est lélément neutre du groupe* $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$ *des matrices inversibles* 2×2. *De plus, il découle de la formule* $\rho(\theta + \phi) = \rho(\theta) \times \rho(\phi)$ *établie ci-dessus que*
$$\rho(-\theta) \times \rho(\theta) = \rho(\theta) \times \rho(-\theta) = \rho(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$
ce qui assure que $\rho(-\theta)$ *est l'inverse de* $\rho(\theta)$ *dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; *si bien que* ρ *est une application à valeurs dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
La formule $\rho(\theta + \phi) = \rho(\theta) \times \rho(\phi)$ *assure que* ρ *est un morphisme de groupes.*
L'ensemble $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ *est alors l'image du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *par* ρ *dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. *Or* $(\mathbb{R}, +)$ *étant un groupe abélien il en est de même de* $\mathrm{Im}\,\rho$.

Exercice I.5.9 (Le groupe S_1) Soit
$$S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 a^2 + b^2 = 1 \right\} .$$

1) Montrer que S_1 est un sous-groupe du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles 2×2 à coefficients réels.

Solution

— *On constate d'abor que* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in S_1$, *ce qui assure que* $S_1 \neq \emptyset$.
— *De plus, pour tout*
$$\left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right] \in S_1 \times S_1 \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} .$$

Comme

$$\begin{array}{rcl}(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 & = & a^2c^2+b^2d^2-2acbda^2d^2+b^2c^2+2adbc \\ & = & a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 \\ & = & a^2(d^2+d^2)+b^2(c^2+d^2) \\ & = & a^2+b^2 \\ & = & 1\,;\end{array}$$

$\begin{pmatrix} ac-bd & -ad-bc \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \in S_1.$

— *Il résulte encore du calcul ci-dessus que*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dès que $a^2+b^2 = 1$. *Les éléments de* S_1, *possèdent donc un inverse pour la loi* $\times$; *ce qui achève de prouver que* S_1 *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

2) Construire un isomorphisme de groupes

$$S_1 \cong \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$$

où $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est le groupe défini à l'exercice I.5.8 .

Solution

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, *vérifiant* $a^2+b^2 = 1$, *c'est un résultat connu qu'il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $a = \cos\theta$ *et* $b = \sin\theta$. *La matrice* $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, *est alors la matrice* $\rho(\theta)$. *Il est alors clair que* S_1 *et* $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ *sont le même sous-ensemble de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.