Fluctuations des mesures centrales sur les partitions d'entiers

Pierre-Loïc Méliot

7 novembre 2017

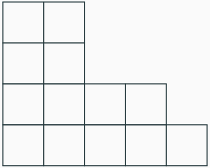
Université Paris-Sud (Orsay)

Mesures centrales sur les partitions

Partitions d'entiers

Si $n \in \mathbb{N}$, une **partition** de taille n est une suite décroissante d'entiers positifs $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell)$ telle que $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$. On la représente par son diagramme de Young :

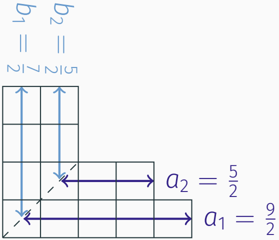
$$(5, 4, 2, 2) \ =$$



L'ensemble des partitions de taille n est noté $\mathfrak{P}(n)$. Les **coordonnées de Frobenius** de λ sont les suites de demi-entiers $(a_1, a_2 \ldots, a_d)$ et $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ définies par

$$a_i = \lambda_i - \left(i - \frac{1}{2}\right) \qquad ; \qquad b_i = \lambda'_i - \left(i - \frac{1}{2}\right),$$

où λ' est la partition conjuguée de λ (par ex., $(5, 4, 2, 2)' = (4, 4, 2, 2, 1)$).



Les fréquences de λ sont données par les deux suites

$$\alpha(\lambda) = \left(\frac{a_1}{n}, \ldots, \frac{a_d}{n}, 0, 0, \ldots\right) \qquad ; \qquad \beta(\lambda) = \left(\frac{b_1}{n}, \ldots, \frac{b_d}{n}, 0, 0, \ldots\right).$$

La paire $\omega(\lambda) = (\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$ est un élément du **simplexe de Thoma** :

$$\mathscr{P} = \left\{((\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0), (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0)) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i + \beta_i \leq 1\right\}.$$

Réciproquement, si $\omega \in \mathscr{P}$, on peut lui associer des partitions aléatoires $\lambda_n(\omega)$ avec $|\lambda_n(\omega)| = n$ et

$$\mathbb{P}[\lambda_n(\omega) = \lambda] = (\dim \lambda)\, s_\lambda(\omega),$$

où $\dim \lambda$ est le nombre de tableaux standards de forme λ, et $s_\lambda(\omega)$ est la spécialisation de la fonction de Schur $s_\lambda \in \mathrm{Sym}$ définie par :

$$p_1(\omega) = 1 \qquad ; \qquad p_{k\geq 2}(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i)^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i)^k.$$

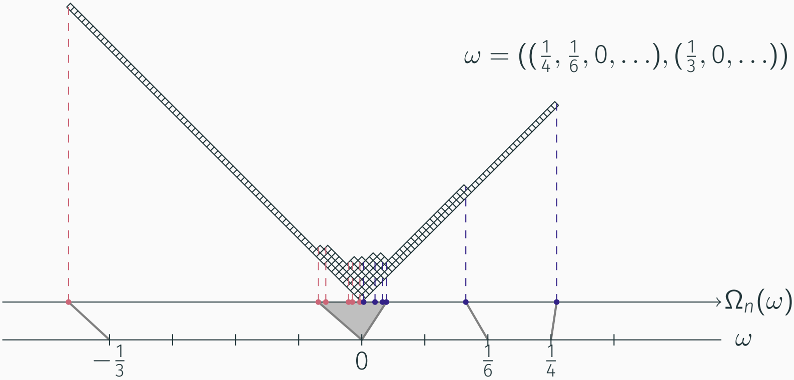
Les lois de ces modèles de partitions aléatoires sont les **mesures centrales** de paramètre ω, et elles ont été étudiées par Kerov et Vershik dans les années 80. On notera $\Omega_n(\omega) \in \mathscr{P}$ la suite des fréquences de la partition aléatoire $\lambda_n(\omega)$.

Les mesures centrales ont une propriété de concentration :

Théorème (Kerov–Vershik, 1981)

Pour tout $\omega \in \mathscr{P}$, on a la convergence en probabilité

$$\Omega_n(\omega) \to_{\mathbb{P}, n\to\infty} \omega.$$



Asymptotique fine des mesures centrales

Objectif : préciser la loi des grands nombres par un théorème central limite, des estimées de Berry–Esseen, des inégalités de concentration.

La convergence dans $\mathscr{P}$ est équivalente à celle de tous les **moments de Frobenius** $p_k(\omega)$.

Théorème (Bufetov, 2012 ; M., 2012)

Pour tout entier $k \geq 1$,

$$\sqrt{n}\,\frac{p_k(\Omega_n(\omega)) - p_k(\omega)}{k\sqrt{p_{2k-1}(\omega) - p_{(k,k)}(\omega)}} \rightharpoonup_{n\to\infty} \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1).$$

Théorème (Féray–M.–Nikeghbali, 2017)

La vitesse de convergence vers la gaussienne est un $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$ pour la distance de Kolmogorov, et on a l'inégalité de concentration :

$$\forall k \geq 1,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}[|p_k(\Omega_n(\omega)) - p_k(\omega)| \geq x] \leq 4\,\exp\left(-\frac{nx^2}{9k^2}\right).$$

Interprétations combinatoires

Lien avec les représentations de $\mathfrak{S}(\infty)$

Si $\omega \in \mathscr{P}$, on peut lui associer un **caractère extrémal** χ^ω du groupe symétrique infini $\mathfrak{S}(\infty)$. Si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in \mathfrak{P}$ et si σ_μ est un produit de cycles disjoints de longueurs $\mu_1, \ldots, \mu_r$,

$$\chi^\omega(\sigma_\mu) = p_\mu(\omega) = \prod_{i=1}^{r} p_{\mu_i}(\omega).$$

Alors, la mesure centrale $\mathbb{P}_{n,\omega}$ (loi de $\lambda_n(\omega)$) est la **mesure spectrale** de la décomposition de $(\chi^\omega)_{|\mathfrak{S}(n)}$ sur la base des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}(n)$:

$$(\chi^\omega)_{|\mathfrak{S}(n)} = \sum_{\lambda \in \mathfrak{P}(n)} \mathbb{P}_{n,\omega}[\lambda]\, \chi^\lambda.$$

En particulier, si $n \geq |\mu|$, alors $\mathbb{E}[\chi^{\lambda_n(\omega)}(\sigma_\mu)] = p_\mu(\omega)$. Par ailleurs, la formule de Frobenius–Schur implique $\mathbb{P}_{n,\omega}[\lambda] = (\dim \lambda)\, s_\lambda(\omega)$.

Lien avec les battages de cartes

Si $\omega \in \mathscr{P}$, on peut lui associer le battage de cartes suivant :

0. On part d'un paquet de cartes $[\![1, n]\!]$, ordonnées de haut en bas.
1. On **scinde** le paquet en blocs de tailles $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots, m$, la loi d'une suite $((k_1, k_2, \ldots), (l_1, l_2, \ldots), m)$ étant la loi multinomiale de paramètres $((\alpha_i)_{i\geq 1}, (\beta_i)_{i\geq 1}, \gamma)$. Ainsi,

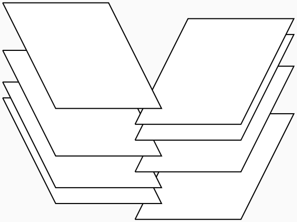
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[((k_1, k_2, \ldots, k_r), (l_1, l_2, \ldots, l_s), m)]\\ &= \frac{n!}{(k_1)! \cdots (k_r)!\,(l_1)! \cdots (l_s)!\,m!} \prod_{i\geq 1} (\alpha_i)^{k_i} \prod_{i\geq 1} (\beta_i)^{l_i}\,\gamma^m\end{aligned}$$

   où $\gamma = 1 - \sum_{i\geq 1}(\alpha_i + \beta_i)$ et $k_1 + \cdots + k_r + l_1 + \cdots + l_s + m = n$. Les blocs de tailles k_i sont dits de type A, les blocs de tailles l_j sont dits de type B, et le dernier bloc de taille m est dit de type C.

2. On **retourne** les blocs de type B, en remplaçant $(a, a+1, \dots, a+b)$ par $(a+b, a+b-1, \dots, a)$; et on **mélange** le bloc de type C, en remplaçant $(n-m+1, n-m+2, \dots, n)$ par une permutation uniforme de ces entiers.
3. On **bat** les cartes de tous les blocs, en choisissant avec probabilité uniforme l'une des

$$\frac{n!}{(k_1)! \cdots (k_r)!\,(l_1)! \cdots (l_s)!\,m!}$$

permutations $\sigma \in \mathfrak{S}(n)$ possibles parmi les battages des blocs de type A, B et C.



Exemple : si $n = 15$ et $\omega = ((\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, 0, \ldots), (\frac{1}{3}, 0, \ldots))$, une possibilité est de battage est la suivante.

0. On part du paquet de cartes ordonné 123456789ABCDEF.
1. On choisit $k_1 = k_2 = 3$, $k_{i\geq 3} = 0$, $l_1 = 5$, $l_{j\geq 2} = 0$, $m = 4$; on obtient ainsi
$$\underbrace{123 \mid 456}_{\text{blocs de type } A} \quad \mid \quad \underbrace{789AB}_{\text{bloc de type } B} \quad \mid \quad \underbrace{CDEF}_{\text{bloc de type } C} \quad .$$
2. On retourne le bloc de type B et on mélange le bloc de type C :
$$\underbrace{123 \mid 456}_{\text{blocs de type } A} \quad \mid \quad \underbrace{BA987}_{\text{bloc de type } B} \quad \mid \quad \underbrace{FCED}_{\text{bloc de type } C} \quad .$$
3. On bat tous les blocs, obtenant par exemple :
$$\text{F4BC1A928E537D6.}$$

Si $w = w_1 w_2 \dots w_n$ est un mot de taille n, l'algorithme de Robinson–Schensted–Knuth lui associe deux tableaux de même forme $\lambda \in \mathfrak{P}(n)$, tels que

$$\forall r \geq 1,\ \ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = \max(\ell(w^{(1)}) + \ell(w^{(2)}) + \cdots + \ell(w^{(r)})),$$

le maximum portant sur les familles de sous-mots croissants et disjoints dans w.

Soit $\sigma_n(\omega) \in \mathfrak{S}(n)$ la permutation aléatoire obtenue par ω-battage, et $\lambda_n(\omega) \in \mathfrak{P}(n)$ la partition d'entiers correspondante.

Théorème (Fulman, 2002 ; M., 2012)

La loi de $\lambda_n(\omega)$ est la mesure centrale sur les partitions de taille n de paramètre $\omega \in \mathscr{P}$.

Lien avec les marches aléatoires dans les cônes

Supposons $\omega = ((\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 0, \ldots), (0, \ldots))$, avec $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i = 1$. On considère la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N}^d$ avec

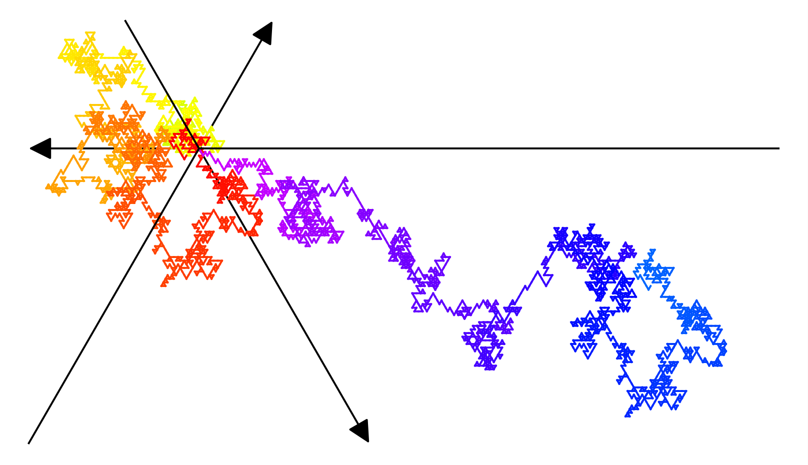
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}[X_{n+1} - X_n = e_i] = \alpha_i.$$

On peut voir cette marche comme la discrétisation d'un chemin continu $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto X_t \in \mathbb{R}^d$, avec $\sum_{i=1}^{d} X_{t,i} = t$ pour tout temps t. Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des chemins continus vérifiant cette propriété. La **transformation de Pitman**

$$\Pi : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

est une opération qui transforme un chemin continu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ en un nouveau chemin $((\Pi X)_t)_{t\in\mathbb{R}^d}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad (\Pi X)_{t,1} \geq (\Pi X)_{t,2} \geq \cdots \geq (\Pi X)_{t,d}.$$



Théorème (O'Connell, 2003)

La loi de $(\Pi X)_n$ *est la mesure centrale sur les partitions de taille n de paramètre* $\omega \in \mathscr{P}$.

Convergence mod-Gaussienne et méthode des cumulants

La méthode des cumulants

Les **cumulants** d'une variable aléatoire X sont les coefficients $\kappa^{(r)}(X)$ de

$$\log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX}] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\kappa^{(r)}(X)}{r!}\, z^r.$$

La loi $\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$ est caractérisée par $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX}] = \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}$, et donc $\kappa^{(r)}(X) = 1_{(r=2)}$.

Idée : si l'on contrôle les cumulants d'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on peut montrer que $Y_n \rightharpoonup \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$, et on aura aussi :

- des bornes de type Berry–Esseen pour

$$d_{\mathrm{Kol}}(Y_n, \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \left|\mathbb{P}[Y_n \leq s] - \mathbb{P}[\mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1) \leq s]\right| ;$$

- des inégalités de concentration du type

$$\forall x \geq 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}[|Y_n| \geq x] \leq 2\,\exp(-Kx^2).$$

- des estimées de grandes déviations, des théorèmes limites locaux, *etc.*

La théorie de la **convergence mod-Gaussienne** donne plus généralement de tels résultats dès que l'on sait estimer le ratio des transformées de Laplace

$$\frac{\mathbb{E}[\mathrm{e}^{zX_n}]}{\mathrm{e}^{t_n \frac{z^2}{2}}} = \psi(z)\,(1+o(1)), \quad \text{avec } X_n = \sqrt{t_n} Y_n,\ t_n \to +\infty.$$

On considère une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient les hypothèses suivantes :

(MC1) Il existe deux suites $N_n \to +\infty$ et $D_n = o(N_n)$, et un réel A telles que

$$\forall r \geq 1, \quad \left|\kappa^{(r)}(S_n)\right| \leq N_n\,(2D_n)^{r-1}\, r^{r-2}\, A^r.$$

(MC2) Il existe $\sigma^2 \geq 0$ et L tels que

$$\frac{\kappa^{(2)}(S_n)}{N_n D_n} = \sigma^2 \left(1 + o\left(\left(\frac{D_n}{N_n}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right) \qquad ; \qquad \frac{\kappa^{(3)}(S_n)}{N_n (D_n)^2} = L\,(1+o(1))\,.$$

Définition (Méthode des cumulants)

Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux hypothèses précédentes, on dit qu'elle satisfait aux hypothèses de la méthode des cumulants avec paramètres (A, D_n, N_n) et limites (σ^2, L).

Théorème (Féray–M.–Nikeghbali, 2013-14-15-16-17- ?)

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les hypothèses (MC1) et (MC2). Si $\sigma^2 > 0$ et $Y_n = \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}$, alors :

1. *On a $Y_n \rightharpoonup \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$, et plus précisément,*

$$d_{\mathrm{Kol}}(Y_n, \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)) = O\left(\frac{A^3}{\sigma^3}\sqrt{\frac{D_n}{N_n}}\right).$$

2. *La zone de normalité de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un $o((\frac{N_n}{D_n})^{\frac{1}{6}})$, et on a des estimées de déviations modérées pour des zones en $o((\frac{N_n}{D_n})^{\frac{1}{4}})$.*

Théorème

Si $y_n \to +\infty$ *et* $y_n \ll (\frac{N_n}{D_n})^{\frac{1}{4}}$, *alors*

$$\mathbb{P}[Y_n \geq y_n] = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(y_n)^2}{2}}}{y_n\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(\frac{L}{6\sigma^3}\sqrt{\frac{D_n}{N_n}}\,(y_n)^3\right)\ (1+o(1)).$$

3. *Supposons* $|S_n| \leq N_n A$ *presque sûrement. Alors,*

$$\forall x \geq 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}[|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq x] \leq 2\,\exp\left(-\frac{x^2}{9\,AD_nN_n}\right).$$

4. *Pour tout* $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, *et toute partie Jordan-mesurable* B *avec* $m(B) \in (0, +\infty)$,

$$\left(\frac{N_n}{D_n}\right)^{\varepsilon}\,\mathbb{P}\left[Y_n - y \in \left(\frac{D_n}{N_n}\right)^{\varepsilon} B\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,m(B)\,(1+o(1)).$$

Ainsi, sous les hypothèses de la méthode des cumulants, on obtient un théorème central limite, une estimée de la vitesse de convergence, une estimée de déviations modérées, une inégalité de concentration et un théorème local limite.

L'hypothèse (MC2) est le plus souvent obtenue par un calcul *ad hoc*. L'hypothèse (MC1) est la plus difficile.

Théorème (Méthode des cumulants pour les mesures centrales)

Si $\omega \in \Omega$, alors $S_n(k,\omega) = n^k\, p_k(\Omega_n(\omega))$ satisfait aux hypothèses de la méthode des cumulants, avec $(A, D_n, N_n) = (1, k^2 n^{k-1}, n^k)$ et

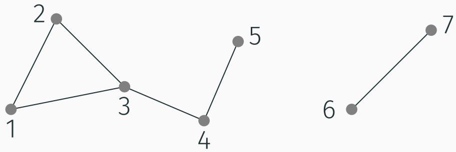
$$\sigma^2 = p_{2k-1}(\omega) - p_{(k,k)}(\omega)$$
$$L = \frac{3k-2}{k}\, p_{3k-2}(\omega) - \frac{6k-3}{k}\, p_{(2k-1,k)}(\omega) + \frac{3k-1}{k} p_{(k,k,k)}(\omega).$$

Graphes de dépendance et observables de partitions

Graphes de dépendance

Soit $S = \sum_{v \in V} A_v$ une somme de variables aléatoires. Un **graphe de dépendance** $G = (V, E)$ pour S vérifie : si $V_1, V_2 \subset V$ sont deux parties disjointes telles qu'il n'y ait pas d'arête $e = (v_1, v_2)$ avec $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$, alors les vecteurs $(A_v)_{v \in V_1}$ et $(A_w)_{w \in V_2}$ sont indépendants.

Exemple :



$(A_1, A_2, \ldots, A_5) \perp (A_6, A_7)$, mais on a aussi $(A_1, A_2, A_3) \perp A_5$.

Paramètres du graphe : $A = \max_{v \in V} \|A_v\|_\infty$,
$D = \max_{v \in V}(\deg v + 1)$,
$N = \mathrm{card}(V)$.

Théorème (Féray–M.–Nikeghbali, 2013)

Si S est une somme de variables aléatoires avec un graphe de dépendance de paramètres (A, D, N), alors

$$\forall r \geq 1, \quad \left|\kappa^{(r)}(S)\right| \leq N\,(2D)^{r-1}\,r^{r-2}\,A^r.$$

La preuve repose sur la notion de cumulants joints, et sur l'inégalité plus précise

$$|\kappa(A_{v_1}, A_{v_2}, \ldots, A_{v_r})| \leq 2^{r-1}\,A^r\;\mathrm{ST}_{G[v_1,v_2,\ldots,v_r]}.$$

On peut généraliser ce résultat au cadre des graphes de dépendance pondérés (modèle d'Ising, fonctionnelles linéaires de chaînes de Markov), qui correspondent à des inégalités du type

$$|\kappa(A_{v_1}, A_{v_2}, \ldots, A_{v_r})| \leq 2^{r-1}\,A^r \sum_{T \in \mathrm{ST}_{G[v_1,v_2,\ldots,v_r]}} \left(\prod_{e \in E_T} w(e)\right).$$

Bornes sur les cumulants de $S_n(k,\omega)$

$$S_n(k,\Omega) = n^k\, p_k(\Omega_n(\omega)) = \sum_{i\geq 1} (a_i(\lambda_n(\omega)))^k + (-1)^{k-1} \sum_{i \geq 1} (b_i(\lambda_n(\omega)))^k.$$

On veut montrer que $S_n(k,\omega)$ vérifie :

$$\left|\kappa^{(r)}(S_n(k,\omega))\right| \leq n^k\,(2k^2 n^{k-1})^{r-1}\, r^{r-2}.$$

Problème : on ne sait pas décomposer $S_n(k,\omega)$ en somme de n^k variables aléatoires (lesquelles ?).

Idée : utiliser la combinatoire des observables de partitions (au sens de Kerov–Olshanski).

$$\varSigma_\mu(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|(|\lambda|-1)\cdots(|\lambda|-|\mu|+1)\,\chi^\lambda(\sigma_\mu) & \text{si } |\lambda| \geq |\mu|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que les fonctions $\Sigma_\mu,\ \mu \in \mathfrak{P}$ engendrent linéairement une algèbre graduée $\mathscr{O}$ de **fonctions polynomiales sur les partitions**, qui est la même que celle engendrée algébriquement par les fonctions

$$p_k(\lambda) = |\lambda|^k\, p_k(\omega(\lambda)) = \sum_{i=1}^{d} (a_i(\lambda))^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{d} (b_i(\lambda))^k.$$

Plus précisément, il existe des coefficients rationnels positifs tels que

$$p_k = \Sigma_k + \sum_{|\mu|<k} c_{k,\mu}\, \Sigma_\mu.$$

Exemple :

$$p_6 = \Sigma_6 + 6\,\Sigma_{(3,2)} + 6\,\Sigma_{(4,1)} + \frac{95}{4}\,\Sigma_4 + 15\,\Sigma_{(2,1,1)} + 35\,\Sigma_{(2,1)} + \frac{91}{16}\,\Sigma_2.$$

En évaluant la formule pour p_k sur la partition 1^n, on obtient :

$$n^k \geq \left(n-\frac{1}{2}\right)^k - \left(-\frac{1}{2}\right)^k = n^{\downarrow k} + \sum_{|\mu|<k} c_{k,\mu}\, n^{\downarrow |\mu|}.$$

Il suffit donc de montrer

$$\left|\kappa(\Sigma_{\mu^{(1)}}(\lambda_n(\omega)),\ldots,\Sigma_{\mu^{(r)}}(\lambda_n(\omega)))\right| \leq \left(\prod_{i=1}^{r} n^{\downarrow |\mu^{(i)}|}\right)\left(\frac{2\ \max_i |\mu^{(i)}|^2}{n}\right)^{r-1} r^{r-2}.$$

Dans le cas de partitions égales, ceci correspond à

$$\left|\kappa^{(r)}(\Sigma_{\mu}(\lambda_n(\omega)))\right| \leq n^{\downarrow |\mu|}(2\,|\mu|^2\,(n-1)^{\downarrow |\mu|-1})^{r-1}\, r^{r-2}$$

et à un graphe de dépendance de paramètres $(1, k^2(n-1)^{\downarrow k-1}, n^{\downarrow k})$ avec $k=|\mu|$.

Probabilités non-commutatives

On interprète les fonctions Σ_μ comme des éléments de l'algèbre $\mathbb{C}\mathfrak{S}(n)$:

$$\Sigma_{\mu,n} = \sum_{\substack{n_1 \neq n_2 \neq \cdots \neq n_k \\ n_i \in [\![1,n]\!]}} \sigma_\mu(n_1, n_2, \ldots, n_k),$$

où $\sigma_\mu(n_1, \ldots, n_k) = (n_1, n_2, \ldots, n_{\mu_1})(n_{\mu_1+1}, \ldots, n_{\mu_1+\mu_2}) \cdots$. Alors,

$$\mathbb{E}[\Sigma_\mu(\lambda_n(\omega))] = \chi^\omega(\Sigma_{\mu,n}),$$

donc le calcul des cumulants de $\Sigma_\mu(\lambda_n(\omega))$ peut s'effectuer dans le cadre de l'**espace de probabilité non-commutatif** $(\mathbb{C}\mathfrak{S}(n), \chi^\omega)$. Dans cet espace, $\Sigma_{\mu,n}$ s'écrit comme somme de $n^{\downarrow|\mu|}$ permutations, avec le graphe de dépendance non-commutatif

$$((n_1, \ldots, n_k) \leftrightarrow (p_1, \ldots, p_k)) \iff (\exists a, b \,|\, n_a = p_b.)$$

Dans l'énoncé précédent, on utilise l'indépendance non-commutative : dans un espace $(\mathscr{A}, \tau)$, $\mathscr{A}_1 \perp \mathscr{A}_2$ si et seulement si

$$\tau(a_1 a_2 \cdots a_r) = \tau\left(\overrightarrow{\prod_{a_i \in \mathscr{A}_1}} a_i\right) \tau\left(\overrightarrow{\prod_{a_i \in \mathscr{A}_2}} a_i\right).$$

Résumé :

1. Pour toute observable $p_\mu = p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_r}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{P}} = \mathbb{R}[p_1, p_2, \ldots]$, la variable aléatoire $S_n(\mu, \omega) = n^{|\mu|}\, p_\mu(\Omega_n(\omega))$ vérifie les hypothèses de la méthode des cumulants.
2. Si

$$\kappa_2(\mu, \mu)(\omega) = \frac{1}{|\mu|^2} \sum_{a,b=1}^{\ell(\mu)} \mu_a \mu_b \left(p_{(\mu \bowtie \mu)(a,b)}(\omega) - p_{\mu \sqcup \mu}(\omega)\right) \neq 0,$$

   alors $(S_n(\mu, \omega))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les théorèmes limites précités.

Espaces de modules mod-gaussiens

On a une description similaire pour les classes de modèles suivants :

paramètres	objet combinatoire aléatoire	observables	algèbre d'observables
graphons	graphe $G_n(\gamma)$	densités de sous-graphes	algèbre des graphes $\mathscr{O}_{\mathfrak{G}}$
permutons	permutation $\sigma_n(\pi)$	densités de motifs	algèbre des permutations $\mathscr{O}_{\mathfrak{S}}$
simplexe de Thoma	partition $\lambda_n(\omega)$	moments de Frobenius	algèbre des partitions $\mathscr{O}_{\mathfrak{P}}$

Les paramètres singuliers pour lesquels la variance asymptotique s'annule correspondent à des modèles avec des symétries additionnelles.

The end