Durée : 3 heures. Les notes de cours (polycopiés ou notes manuscriptes) sont autorisées. Sont interdits : livres, calculatrices, téléphones, ordinateurs ou objets apparentés. Toutes les réponses doivent être justifiées, et la rédaction sera prise en compte. On pourra admettre un résultat d'une question précédente si nécessaire. Les deux exercices sont indépendants ; le deuxième exercice est environ deux fois plus long et rapporte environ deux fois plus de points.

Exercice I. Maximum de variables aléatoires géométriques. On fixe un paramètre $p \in (0,1)$, et on rappelle qu'une variable géométrique de paramètre p est une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que
$$\mathbb{P}[Z=k] = (1-p)^k\, p$$
pour tout entier $k \geq 0$. On fixe une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables géométriques indépendantes et toutes de paramètre p, et on note
$$X_n = \max(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n).$$

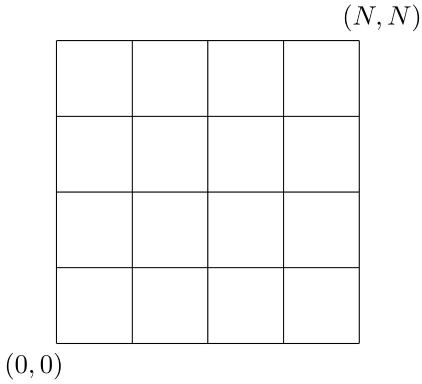
1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Préciser son espace des états $\mathfrak{X}$, et calculer les entrées de sa matrice de transition $P(i,j)$ (on pourra distinguer les trois cas $i<j$, $i=j$ et $i>j$).
2. La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle irréductible ?
3. Montrer que tous les états $k \in \mathfrak{X}$ sont transients pour la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Décrire précisément le comportement de X_n lorsque n tend vers l'infini.
4. Si ν est une mesure invariante et $\nu(0) = \alpha$, calculer de proche en proche $\nu(1)$, $\nu(2)$, $\nu(3)$, etc. Montrer que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet à un coefficient multiplicatif près une unique mesure invariante. Est-elle de masse totale finie ou infinie ?

Exercice II. Chaîne de Markov serpent. Au début de cet exercice, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov arbitraire sur un espace d'états dénombrable $\mathfrak{X}$, avec matrice de transition P et loi initiale π_0. On fixe un entier $L \geq 0$ et on note
$$Y_n = (X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+L})$$
le *serpent* formé par $L+1$ valeurs consécutives de la chaîne. On note également
$$\mathfrak{Y} = \left\{(a_0,\ldots,a_L) \in \mathfrak{X}^{L+1} \mid P(a_0,a_1)\,P(a_1,a_2)\cdots P(a_{L-1},a_L) > 0\right\};$$
c'est l'ensemble des *états-serpents* (de taille L).

1. Trouver l'unique matrice stochastique
$$Q = \left(Q\left((a_0,\ldots,a_L),(b_0,\ldots,b_L)\right)\right)_{(a_0,\ldots,a_L),\,(b_0,\ldots,b_L)}$$
sur l'espace des états-serpents $\mathfrak{Y}$ telle que pour tous états-serpents $A_0,\ldots,A_n$, on ait
$$\mathbb{P}[Y_0 = A_0,\ Y_1 = A_1, \ldots, Y_n = A_n] = \mathbb{P}[Y_0 = A_0]\, Q(A_0,A_1)\cdots Q(A_{n-1},A_n).$$
On pourra utiliser la notation $(a_0,\ldots,a_L) \sim (b_0,\ldots,b_L)$ pour indiquer que
$$a_1 = b_0,\ a_2 = b_1, \ldots, a_L = b_{L-1},$$
et définir une matrice Q telle que $Q(A,B) > 0$ uniquement si $A \sim B$. En déduire que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov, donc on précisera l'espace des états, la matrice de transition et la loi initiale.

2. On suppose dans cette question et dans toutes les questions qui suivent que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{X}$. Montrer que la chaîne-serpent $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors irréductible sur l'espace d'états $\mathfrak{Y}$.
3. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente irréductible sur $\mathfrak{X}$. Montrer que la chaîne-serpent $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors elle aussi récurrente irréductible sur $\mathfrak{Y}$. Indications :
   — Étant fixé un état-serpent $A = (a_0, \ldots, a_L)$ dans $\mathfrak{Y}$, à chaque retour en a_0 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est possible de suivre exactement le serpent A.
   — On pourra alors considérer la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à certains des temps de retour $\tau_{a_0}^{(k)}$ en a_0, choisis de sorte que les serpents $Y_{\tau_{a_0}^{(k)}}$ soient des variables indépendantes.
4. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure de probabilité invariante π sur $\mathfrak{X}$. Montrer que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure de probabilité invariante Π sur $\mathfrak{Y}$, et donner les valeurs de cette mesure.

Dans la suite de l'exercice, $N \geq 4$ est un entier fixé, et on note $\mathfrak{X}$ la grille $[\![0, N]\!] \times [\![0, N]\!]$ formée par les paires d'entiers positifs plus petits que N ; voir ci-dessous pour le cas $N = 4$.



L'ensemble $\mathfrak{X}$ contient donc $(N+1)^2$ éléments, et une matrice stochastique naturelle sur $\mathfrak{X}$ est

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\deg x} & \text{si } x \leftrightarrow y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ici, $x \leftrightarrow y$ veut dire que x et y sont voisins, et $\deg x$ est le nombre de voisins de x ; ce nombre vaut 2, 3 ou 4 selon la position de x sur la grille. Ainsi, P est la matrice de la marche aléatoire aux plus proches voisins $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur la grille $\mathfrak{X}$.

5. On pose $L = 2$, et on s'intéresse dans tout ce qui suit à la chaîne $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des serpents de taille 2 associée à la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice P sur $\mathfrak{X}$. Expliquer pourquoi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne irréductible récurrente positive sur $\mathfrak{X}$. Est-ce aussi le cas de $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathfrak{Y}$?
6. Combien y-a-t'il de sommets de degré 2, respectivement 3, respectivement 4 dans $\mathfrak{X}$? Calculer la somme $\sum_{x\in\mathfrak{X}} \deg x$, et montrer que la mesure de probabilité invariante pour $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit :
$$\pi(x) = \frac{\deg x}{4N(N+1)}.$$
7. En utilisant la formule trouvée à la question 4., donner la valeur de
$$\Pi(a_0, a_1, a_2),$$
où Π est la mesure de probabilité invariante sur $\mathfrak{Y}$, et (a_0, a_1, a_2) est un état-serpent arbitraire. En déduire que $\Pi(a_0, a_1, a_2)$ ne dépend que de a_1.

8. On distingue trois types d'états-serpents de longueur 2 :

   — les états-serpents de type A sont les allers-retours $(a_0, a_1, a_2 = a_0)$: $\underset{a_2}{\overset{a_0}{\bullet}} \rightleftarrows \overset{a_1}{\bullet}$.

   — les états-serpents de type B sont les angles droits (a_0, a_1, a_2) avec $[a_0, a_1]$ et $[a_1, a_2]$ segments perpendiculaires : $\begin{array}{ccc} \overset{a_0}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{a_1}{\bullet} \\ & & \downarrow \\ & & \underset{a_2}{\bullet} \end{array}$.

   — les états-serpents de type C sont les suites $(a_0, a_1, a_2 \neq a_0)$ avec $[a_0, a_1]$ et $[a_1, a_2]$ segments parallèles : $\overset{a_0}{\bullet} \longrightarrow \overset{a_1}{\bullet} \longrightarrow \overset{a_2}{\bullet}$.

   On partitionne $\mathfrak{Y}$ en les trois parties $\mathfrak{Y}_{\mathrm{A}}$, $\mathfrak{Y}_{\mathrm{B}}$ et $\mathfrak{Y}_{\mathrm{C}}$ formées par les états-serpents de type A, B et C. Calculer en fonction de N les mesures $\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{A}})$, $\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{B}})$ et $\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{C}})$. Commenter ce résultat. On fera attention au fait que des états-serpents de même type et de même point de départ n'ont pas forcément la même probabilité sous Π.

I.1 Si $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est la fonction définie par $f(a,b) = \max(a,b)$, alors $X_n = f(X_{n-1}, Z_n)$ pour tout n, donc par le théorème de représentation des chaînes de Markov, comme les variables Z_n sont indépendantes, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'espace d'états $\mathfrak{X} = \mathbb{N}$. Sa matrice de transition est :

$$P(i,j) = \mathbb{P}[f(i,Z) = j] = \mathbb{P}[\max(i,Z) = j],$$

où Z est une variable géométrique de paramètre p. Distinguons trois cas :

- Si $j < i$, alors $\max(i,Z) \neq j$, donc $P(i,j) = 0$.
- Si $j = i$, alors $\max(i,Z) = i$ si et seulement si $Z \leq i$, ce qui arrive avec probabilité $\sum_{j=0}^{i} (1-p)^j\, p = 1 - (1-p)^{i+1}$. Donc, $P(i,i) = 1 - (1-p)^{i+1}$.
- Si $j > i$, alors $\max(i,Z) = j$ si et seulement si $Z = j$, ce qui arrive avec probabilité $(1-p)^j\, p$.

Conclusion : la matrice de transition de la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$P(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < i, \\ 1 - (1-p)^{i+1} & \text{si } j = i, \\ (1-p)^j\, p & \text{si } j > i. \end{cases}$$

I.2 La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement croissante : si $n \leq N$, alors $X_n \leq X_N$ avec probabilité 1, car

$$X_N = \max(X_n, Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots, Z_N) \geq X_n.$$

En particulier, on a $P^{N-n}(1,0) = 0$ pour tout $m = N - n \geq 0$, donc la chaîne n'est pas irréductible.

I.3 Montrons que tous les états sont transients. Notons que la loi $\mathbb{P}_k$ sur les trajectoires dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est la loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conditionnellement à l'événement $Z_0 = k$. Alors, comme $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, l'état k est visité une infinité de fois si et seulement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante $(k, k, k, \ldots)$, ce qui est équivalent à demander que

$$\forall n \geq 1,\ \ Z_n \leq k.$$

Or, tous ces événements ont la même probabilité $1-(1-p)^{k+1} < 1$, et ils sont indépendants :

$$\mathbb{P}_k[k \text{ est visité une infinité de fois}] = \mathbb{P}[\forall n \geq 1,\ Z_n \leq k] = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - (1-p)^{k+1}\right) = 0.$$

Donc, k est un état transient pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que presque sûrement, chaque état n'est visité qu'un nombre fini de fois ; ainsi, X_n sort avec probabilité 1 de tout segment initial $[\![0, K]\!]$, et on a donc

$$\mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} X_n = +\infty\right] = 1.$$

I.4 Cherchons les mesures invariantes non nulles pour la matrice de transition P. L'équation d'invariance s'écrit :

$$\nu(k) = (\nu P)(k) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu(j)\, P(j,k) = \nu(k)\ \left(1 - (1-p)^{k+1}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} \nu(j)\, (1-p)^k\, p,$$

ce qui se transforme en :

$$\nu(k)\,(1-p)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \nu(j)\,(1-p)^k\,p.$$

Ainsi, $\nu(k)$ est déterminé par les valeurs précédentes $\nu(0),\ldots,\nu(k-1)$, et si l'on fixe $\nu(0) = \alpha$, alors il y a une seule solution au système triangulaire d'équations ci-dessus. On a :

$$\nu(k) = q \sum_{j=0}^{k-1} \nu(j).$$

Si $\nu(0) = \alpha$, alors $\nu(1) = q\alpha$, $\nu(2) = q(q\alpha + \alpha) = q(q+1)\alpha$, $\nu(3) = q(q(q+1) + q + 1)\alpha = q(q+1)^2\alpha$. On devine que $\nu(k) = q(q+1)^{k-1}\alpha$ pour tout $k \geq 1$. En effet, si le résultat est vrai au rang k, alors au rang $k+1$,

$$\nu(k+1) = q\left(1 + \sum_{j=1}^{k} q(q+1)^{j-1}\right)\alpha = q\left(1 + q\,\frac{1-(q+1)^k}{1-(q+1)}\right)\alpha = q\,(q+1)^k\,\alpha.$$

On conclut que toute mesure invariante s'écrit $\nu(k) = \frac{p}{(1-p)^k}\,\alpha$ pour un certain coefficient $\alpha \geq 0$ (pour $k \geq 1$). Or, en utilisant l'invariance en $k = 0$, on a aussi :

$$\nu(0) = (\nu P)(0) = \nu(0)\,P(0,0) = \nu(0)\,(1-p).$$

Donc, $\nu(0) = \alpha = 0$, et on a en fait $\nu = 0$! Ainsi, l'unique mesure invariante pour P est la mesure nulle (donc de masse finie).

II.1 Par définition, pour toute suite finie $(a_0,\ldots,a_n)$ d'éléments de $\mathfrak{X}$,

$$\mathbb{P}[X_0 = a_0,\ldots,X_n = a_n] = \pi_0(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{n-1},a_n).$$

Si

$$Y_n = (X_n, X_{n+1},\ldots,X_{n+L}) = (a_0,a_1,\ldots,a_L)$$

pour un certain entier n, alors la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a effectué les transitions $a_0 \to a_1, a_1 \to a_2,\ldots,a_{L-1} \to a_L$, donc les probabilités de transition correspondantes sont positives :

$$P(a_0,a_1)\,P(a_1,a_2)\cdots P(a_{L-1},a_L) > 0.$$

Ainsi, presque sûrement, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus à valeurs dans $\mathfrak{Y}$. Notons de plus que par construction, pour tout entier n, $Y_n \sim Y_{n+1}$ avec probabilité 1. Donc, pour déterminer les probabilités trajectorielles de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pourra donc se restreindre aux suites finies $(A_0,\ldots,A_n)$ d'éléments de $\mathfrak{Y}$ telles que $A_0 \sim A_1$, $A_1 \sim A_2$, etc. Fixons donc une telle suite : elle est déterminée par une suite finie $(a_0,\ldots,a_{n+L})$ d'éléments de $\mathfrak{X}$ avec $A_k = (a_k, a_{k+1},\ldots,a_{k+L})$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Y_0 = A_0,\ Y_1 = A_1,\ldots,Y_n = A_n]\\
&= \mathbb{P}[X_0 = a_0,\ X_1 = a_1,\ldots,X_{n+L} = a_{n+L}]\\
&= \pi_0(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{n+L-1},a_n) \quad \text{car } (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une chaîne de Markov de matrice } P\\
&= \big(\pi_0(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L)\big)\,P(a_L,a_{L+1})\,P(a_{L+1},a_{L+2})\cdots P(a_{n+L-1},a_{n+L}).
\end{aligned}$$

Remarquons que le terme entre parenthèses au début de la dernière ligne est $\mathbb{P}[Y_0 = A_0]$, et qu'on a ensuite un produit de n termes. Pour $(a_0, \dots, a_L)$ et $(b_0, \dots, b_L)$ dans $\mathfrak{Y}$, posons

$$Q\left((a_0, \dots, a_L), (b_0, \dots, b_L)\right) = \begin{cases} P(a_L, b_L) & \text{si } (a_0, \dots, a_L) \sim (b_0, \dots, b_L), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, le calcul précédent se réécrit :

$$\mathbb{P}[Y_0 = A_0,\ Y_1 = A_1, \dots, Y_n = A_n] = \mathbb{P}[Y_0 = A_0]\, Q(A_0, A_1) \cdots Q(A_{n-1}, A_n),$$

donc $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{Y}$ avec matrice de transition Q. Cette matrice est bien stochastique : si $A = (a_0, \dots, a_L) \in \mathfrak{Y}$, alors

$$\sum_{B \in \mathfrak{Y}} Q(A, B) = \sum_{B \,|\, B \sim A} Q(A, B) = \sum_{b_L \in \mathfrak{X} \,|\, P(a_L, b_L) > 0} P(a_L, b_L) = 1$$

car une suite $B \in \mathfrak{Y}$ telle que $B \sim A$ est entièrement déterminée par sa dernière valeur b_L. La loi initiale de la chaîne-serpent est

$$\Pi_0\left(a_0, \dots, a_L\right) = \mathbb{P}[Y_0 = (a_0, \dots, a_L)] = \pi_0(a_0)\, P(a_0, a_1) \cdots P(a_{L-1}, a_L).$$

II.2 Supposons la chaîne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irréductible, et fixons deux états-serpents $A = (a_0, \dots, a_L)$ et $B = (b_0, \dots, b_L)$ dans $\mathfrak{Y}$. Par hypothèse, il existe un chemin de longueur $m \geq 1$ reliant a_L à b_0 dans $\mathfrak{X}$, donc des états $x_1, \dots, x_{m-1}$ tels que $P(a_L, x_1) > 0$, $P(x_1, x_2) > 0$, etc. jusqu'à $P(x_{m-1}, b_0) > 0$. Quitte à rajouter des boucles, on peut supposer $m > L + 1$. Notons alors :

$$\begin{aligned}
A &= (a_0, \dots, a_L) \\
C_1 &= (a_1, \dots, a_L, x_1) \\
C_2 &= (a_2, \dots, a_L, x_1, x_2) \\
&\ \vdots \qquad \vdots \\
C_{L+1} &= (x_1, \dots, x_{L+1}) \\
&\ \vdots \qquad \vdots \\
C_{m-1} &= (x_{m-1-L}, \dots, x_{m-1}) \\
C_m &= (x_{m-L}, \dots, x_{m-1}, b_0) \\
&\ \vdots \qquad \vdots \\
C_{m+L-1} &= (x_{m-1}, b_0, \dots, b_{L-1}) \\
B &= (b_0, \dots, b_L).
\end{aligned}$$

Les faits suivants sont immédiats :

— Tous les $(L+1)$-uplets d'états C_i sont dans $\mathfrak{Y}$ (soit parce que A et B sont dans $\mathfrak{Y}$, soit par hypothèse sur les x_j).

— On a $A \sim C_1,\ C_1 \sim C_2, \dots, C_{m+L-1} \sim B$.

— Plus précisément, $Q(A, C_1) = P(a_L, x_1) > 0$, $Q(C_1, C_2) = P(x_1, x_2) > 0$, etc. jusqu'à $Q(C_{m+L-1}, B) = P(b_{L-1}, b_L) > 0$.

Donc, il existe un chemin de longueur $m + L$ reliant A à B dans $\mathfrak{Y}$ par des transitions de la matrice Q, et la chaîne-serpent $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est irréductible.

II.3 Supposons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ récurrente irréductible, et fixons $A=(a_0,\ldots,a_L)\in\mathfrak{Y}$. On a donc par hypothèse $P(a_0,a_1)\,P(a_1,a_2)\cdots P(a_{L-1},a_L)>0$. L'idée intuitive est la suivante : à chaque retour en a_0 de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la chaîne a une petite probabilité positive de suivre exactement le serpent A, et comme il y a une infinité de retours avec renouvellement de la chaîne à chaque retour, ce serpent A sera traversé lui aussi une infinité de fois avec probabilité 1. Donnons maintenent une preuve rigoureuse. Comme la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente irréductible, les temps de retour $\tau_{a_0}^{(1)},\tau_{a_0}^{(2)},\ldots$ de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en a_0 sont tous finis avec probabilité 1 :

$$\tau_{a_0}^{(k)}=\inf\left(\{n\geq\tau_{a_0}^{(k-1)}+1\mid X_n=a_0\}\right)<+\infty,$$

avec par convention $\tau_{a_0}^{(0)}=0$. Rappelons alors que les excursions

$$\mathscr{E}^{(k)}=\left(X_{\tau_{a_0}^{(k)}},X_{\tau_{a_0}^{(k)}+1},\ldots,X_{\tau_{a_0}^{(k+1)}-1}\right)$$

sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi (à valeurs dans l'espace des suites finies d'éléments de $\mathfrak{X}$ commençant par a_0). Regroupons ces excursions par blocs de $L+1$ excursions : on pose donc

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_n&=\mathscr{E}^{(n(L+1)+1)}\cdot\mathscr{E}^{(n(L+1)+2)}\cdots\mathscr{E}^{(n(L+1)+L+1)}\\&=\left(X_{\tau_{a_0}^{(n(L+1)+1)}},X_{\tau_{a_0}^{(k)}+1},\ldots,X_{\tau_{a_0}^{(n+1)(L+1)+1}-1}\right).\end{aligned}$$

Par regroupement, ces suites finies sont indépendantes et de même loi pour n parcourant l'ensemble des entiers, et par construction, chaque $\mathscr{F}_n$ est au moins de longueur $L+1$, puisque chaque excursion est au moins de longueur 1. Alors,

$$\mathbb{P}[\mathscr{F}_n\text{ commence par }(a_0,\ldots,a_L)]=P(a_0,a_1)\,P(a_1,a_2)\cdots P(a_{L-1},a_L)>0$$

est la même probabilité pour chaque variable $\mathscr{F}_n$ (ici, on utilise la propriété de Markov forte qui assure qu'au temps $\tau_{a_0}^{(n(L+1)+1)}$, la chaîne X recommence avec loi $\mathbb{P}_{a_0}$). Posons

$$E_n=\{\mathscr{F}_n\text{ commence par }(a_0,\ldots,a_L)\}$$

pour $n\geq 0$. Ces événements correspondent à des expériences de Bernoulli indépendantes et toutes de même probabilité positive. Il y a avec probabilité 1 une infinité de succès, et si E_n se réalise, alors

$$Y_{\tau_{a_0}^{(n(L+1)+1)}}=A.$$

Ainsi, l'état-serpent A est visité une infinité de fois avec probabilité 1, donc la chaîne-serpent est récurrente irréductible.

II.4 Si X_0 est choisi suivant la mesure invariante π, remarquons que la loi du serpent Y_0 est

$$\mathbb{P}[Y_0=(a_0,a_1,\ldots,a_L)]=\pi(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L)$$

pour tout état-serpent $A=(a_0,\ldots,a_L)$. Notons $\Pi(A)$ le terme de droite de cette équation, et vérifions que c'est une mesure de probabilité invariante sur l'espace des états-serpents $\mathfrak{Y}$.

— mesure de probabilité : on a

$$\begin{aligned}\sum_{(a_0,\ldots,a_L)\in\mathfrak{Y}}\Pi(a_0,\ldots,a_L)&=\sum_{(a_0,\ldots,a_L)\in\mathfrak{X}^{L+1}}\pi(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L)\\&=\sum_{a_L\in\mathfrak{X}}(\pi P^L)(a_L)=\sum_{a_L\in\mathfrak{X}}\pi(a_L)=1\end{aligned}$$

car la condition $P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L)>0$ est surperflue pour l'évaluation de la somme (on rajoute des termes nuls).

— invariance par la matrice Q :

$$\begin{aligned}
(\Pi Q)(a_0,\ldots,a_L) &= \sum_{a_{-1}\,|\,P(a_{-1},a_0)>0} \Pi(a_{-1},\ldots,a_{L-1})\,P(a_{L-1},a_L)\\
&= \sum_{a_{-1}} \pi(a_{-1})\,P(a_{-1},a_0)\cdots P(a_{L-1},a_L)\\
&= (\pi P)(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L)\\
&= \pi(a_0)\,P(a_0,a_1)\cdots P(a_{L-1},a_L) = \Pi(a_0,\ldots,a_L)
\end{aligned}$$

car $\pi P = \pi$.

II.5 Comme la grille est un graphe connexe, on peut bien rejoindre toute paire de sommets par des transitions de la matrice P, donc $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne irréductible. Comme l'espace des états est fini, la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est automatiquement récurrente positive, avec une unique mesure de probabilité invariante π. D'après la question 2., $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une chaîne irréductible sur l'ensemble des états-serpents $\mathfrak{Y}$, et d'après la question 4., elle admet une mesure de probabilité invariante Π, donc elle est récurrente positive (on pourrait aussi remarquer que l'ensemble $\mathfrak{Y}$ des états-serpents est fini, ce qui impose de nouveau la récurrence positive).

II.6 Les 4 coins de la grille sont de degré 2 ; les $4(N-1)$ points au bord de la grille (mais pas dans les coins) sont de degré 3 ; et les $(N-1)^2$ points qui ne sont pas au bord sont de degré 4. Par conséquent, la somme de tous les degrés est :

$$\sum_{x\in\mathfrak{X}} \deg x = 4\times 2 + 4(N-1)\times 3 + (N-1)^2\times 4 = 4(2+3N-3+N^2-2N+1) = 4(N^2+N).$$

Vérifions alors que $\mu(x) = \deg x$ est une mesure invariante pour P ; par renormalisation, $\pi(x) = \frac{\deg x}{4N(N+1)}$ sera alors l'unique probabilité invariante. On calcule :

$$(\mu P)(x) = \sum_{y\,|\,y\leftrightarrow x} \mu(y)\,P(y,x) = \sum_{y\,|\,y\leftrightarrow x} \frac{\deg y}{\deg y} = \sum_{y\,|\,y\leftrightarrow x} 1 = \deg x = \mu(x).$$

II.7 Pour tout état-serpent (a_0,a_1,a_2), on a :

$$\begin{aligned}
\Pi(a_0,a_1,a_2) &= \frac{\deg a_0}{4N(N+1)}\,P(a_0,a_1)\,P(a_1,a_2) = \frac{\deg a_0}{4N(N+1)}\,\frac{1}{\deg a_0}\,\frac{1}{\deg a_1}\\
&= \frac{1}{4N(N+1)}\,\frac{1}{\deg a_1}.
\end{aligned}$$

La mesure d'un état-serpent de longueur 2 ne dépend donc que du degré de son point milieu a_1.

II.8 Sous-partitionnons les ensembles d'états-serpents de type A, B et C en fonction du degré du point milieu a_1. Le tableau suivant donne les cardinaux de chaque type d'état-serpent :

	A	B	C
$\deg a_1 = 2$	8	8	0
$\deg a_1 = 3$	$12(N-1)$	$16(N-1)$	$8(N-1)$
$\deg a_1 = 4$	$4(N-1)^2$	$8(N-1)^2$	$4(N-1)^2$

En sommant les contributions, on obtient :

$$\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{A}}) = \frac{4 + 4(N-1) + (N-1)^2}{4N(N+1)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4N};$$
$$\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{B}}) = \frac{4 + \frac{16}{3}(N-1) + 2(N-1)^2}{4N(N+1)} = \frac{1}{2} - \frac{N-1}{6N(N+1)};$$
$$\Pi(\mathfrak{Y}_{\mathrm{C}}) = \frac{\frac{8}{3}(N-1) + (N-1)^2}{4N(N+1)} = \frac{1}{4} - \frac{N+5}{12N(N+1)}.$$

Lorsque N tend vers l'infini, les probabilités des trois types tendent vers $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. En effet, s'il n'y avait pas de bord à la grille ($N = +\infty$), étant donnée la première partie (a_0, a_1) d'un serpent de taille 2, il y aurait toujours une chance sur 4 de revenir sur ses pas pour choisir a_2 (type A), une chance sur 4 de poursuivre dans la même direction (type C), et une chance sur 2 de bifurquer à angle droit (type B). Les bords de la grille empêchent de choisir les types B et C dans certains configurations, ce qui mène à une probabilité légèrement inférieure pour ces types, et légèrement supérieure pour le type A.