Corrigé

1. Considérons l'ensemble $T(\xi) \subset \mathfrak{S}$ associé à une fonction $\xi : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}$.

   - On a bien $() \in T(\xi)$, car la condition à vérifier est vide dans ce cas.
   - Si $I = (i_1, \dots, i_n) \in T(\xi)$, alors $i_j \leq \xi(i_1, \dots, i_{j-1})$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, et en particulier pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$; donc $(i_1, \dots, i_{n-1}) \in T(\xi)$.
   - Si $I = (i_1, \dots, i_n) \in T(\xi)$, alors $I + j \in T(\xi)$ si et seulement $j \leq \xi(i_1, \dots, i_n)$; en effet, les autres conditions pour l'appartenance de $I + j$ à $T(\xi)$ sont celles données par $I \in T(\xi)$. Donc, les $I + j \in T(\xi)$ sont exactement ceux pour lesquels $j \in [\![1, d_I]\!]$ avec $d_I = \xi(i_1, \dots, i_n)$.

   Ainsi, $T(\xi)$ est bien un arbre enraciné.

2. On peut décomposer la programmation de la fonction $u \mapsto Z_u$ en deux parties :

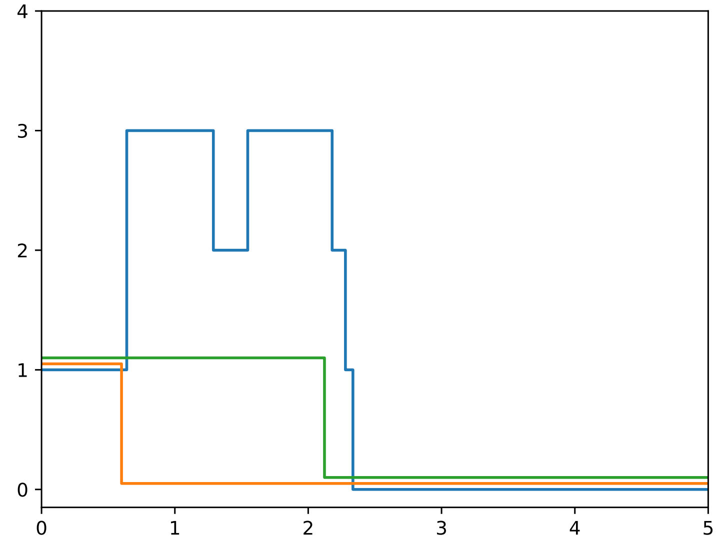
   - les valeurs consécutives prises par cette fonction sont données par la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est juste une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ tuée en 0.
   - les instants de sauts sont conditionnellement aux valeurs prises $(k_0, k_1, \dots, k_n)$ espacées par des variables exponentielles indépendantes de paramètres $(k_0, k_1, \dots, k_n)$.

   Si l'on veut dessiner la fonction jusqu'à un temps t fixé, il faut tout de même calculer tout en même temps, car on ne sait pas à l'avance combien de sauts seront effectués. Il faut aussi prendre en compte la possibilité d'extinction :

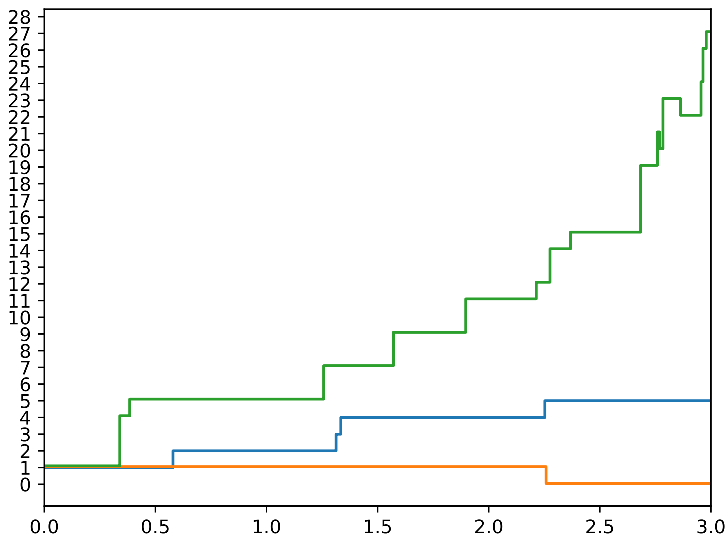
```python
import numpy as np
import scipy.stats as scs
import matplotlib.pyplot as plt


def draw_Z(Xi, t, ax, shift=0):
    Y = [1]
    T = [0]
    while len(T)==len(Y):
        next_time = T[-1] + scs.expon(scale=1/Y[-1]).rvs()
        if next_time > t:
            T.append(t)
        else:
            T.append(next_time)
            next_value = Y[-1] - 1 + Xi.rvs()
            Y.append(next_value)
            if next_value == 0:
                T.append(t)
    Y.append(Y[-1])
    ax.step(T, np.array(Y)+shift, where="post")
    return max(Y)


def Z(Xi, t, n=1):
    fig, ax = plt.subplots()
    maxZ = []
    for k in range(n):
        maxZ.append(draw_Z(Xi, t, ax, 0.05*k))
    ax.set_xlim(0, t)
    ax.set_yticks(np.linspace(0, max(maxZ)+1, max(maxZ)+2))
    plt.show()
```

On a rajouté un paramètre optionnel `n` à la fonction `Z` pour dessiner plusieurs essais simultanément.

Si `X = scs.poisson(1)`, alors on obtient presque sûrement des arbres finis : $Z_t = 0$ pour t assez grand, car $m \leq 1$.



Si `X = scs.poisson(2)`, alors certaines trajectoires tendent vers 0, et d'autres tendent vers $+\infty$; en effet, il y a une probabilité d'extinction $q < 1$, car $m > 1$.

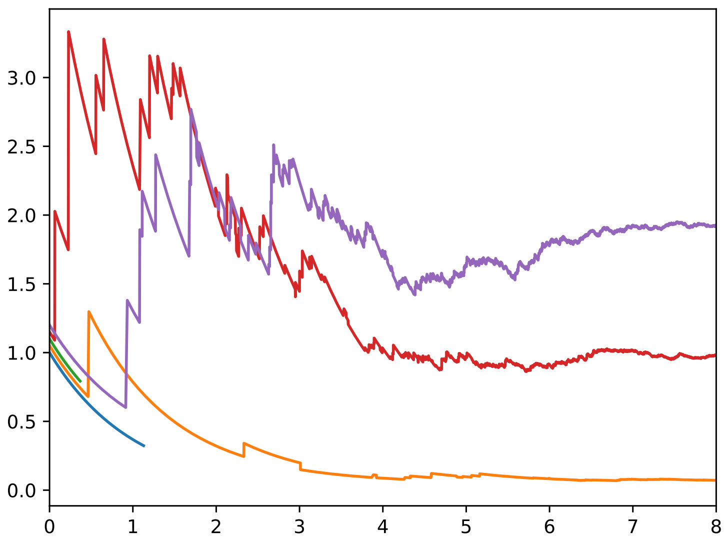


3. Pour dessiner $u \mapsto Z_u \exp(-(m-1)u)$, on reprend le même programme que précédemment et on interpole sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$:

```
def draw_Z_normalised(Xi, t, m, ax, shift=0):
    Y = [1]
```

```
    T = [0]
    while len(T)==len(Y):
        next_time = T[-1] + scs.expon(scale=1/Y[-1]).rvs()
        if next_time > t:
            T.append(t)
        else:
            T.append(next_time)
            next_value = Y[-1] - 1 + Xi.rvs()
            Y.append(next_value)
            if next_value == 0:
                T.append(t)
    Y.append(Y[-1])
    T2 = np.concatenate([np.linspace(T[i], T[i+1], 50, endpoint=False) for i in range(len(T)-1)])
    Y2 = np.concatenate([np.full((50,), Y[i]) for i in range(len(T)-1)])
    Ynorm = Y2/np.exp((m-1)*T2)
    ax.plot(T2, Ynorm + shift)


def Z_normalised(Xi, t, n=1):
    fig, ax = plt.subplots()
    maxZ = []
    for k in range(n):
        draw_Z_normalised(Xi, t, Xi.mean(), ax, 0.05*k)
    ax.set_xlim(0, t)
    plt.show()
```

Voici 5 simulations avec une loi de Poisson de paramètre 2, et jusqu'au temps $t = 8$:



Les courbes bleue et verte s'arrêtent avant le temps $t = 8$: elles correspondent à des arbres continus finis (extinction). Les trois autres courbes convergent bien vers une limite positive aléatoire.

4. Compte tenu de la Proposition 6, $(X_n)_{n \leq |T(\xi)|}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{E}$ et tuée en $\emptyset$, de matrice $P(E, E') = \mathbb{P}[F(E, U, \xi) = E']$. En effet, c'est par application du théorème de représentation des chaînes de Markov, car les couples $(U_n, \xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des variables aléatoires i.i.d. Les images possibles $F(E, U, \xi)$ avec $E = (I_1, \ldots, I_k)$ fixé sont les parties E' avec la propriété de non-filiation, et E' obtenue à partir de E en remplaçant l'un des $I_{j \in [\![1,k]\!]}$ par les descendants $I_j+1, I_j+2, \ldots, I_j+d$

pour un certain $d \in \mathbb{N}$. Notons dans ce cas $E' = E(I_j \to I_j + [\![1,d]\!])$. La probabilité de transition de E à $E(I_j \to I_j + [\![1,d]\!])$ est :

$$P(E, E(I_j \to I_j + [\![1,d]\!])) = \mathbb{P}[\lceil kU \rceil = j \text{ et } \xi = d] = \frac{1}{k}\,\mu(d).$$

5. Il faut vérifier que pour toute suite $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathfrak{Y}^{n+1}$, on a

$$\mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_n = y_n] = \mathbb{P}[Y_0 = y_0]\, Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{n-1}, y_n).$$

On va calculer le terme de gauche $\star$ en décomposant selon les valeurs possibles pour X_{n-1} et X_n. On obtient :

$$\begin{aligned}\star &= \sum_{\substack{x_{n-1}\,|\,f(x_{n-1})=y_{n-1}\\ x_n\,|\,f(x_n)=y_n}} \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-2} = y_{n-2}, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n] \\ &= \sum_{\substack{x_{n-1}\,|\,f(x_{n-1})=y_{n-1}\\ x_n\,|\,f(x_n)=y_n}} \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-2} = y_{n-2}, X_{n-1} = x_{n-1}]\, P(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

car l'événement $\{Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-2} = y_{n-2}, X_{n-1} = x_{n-1}\}$ est dans $\mathscr{F}_{n-1} = \sigma(X_0, \dots, X_{n-1})$, et la loi conditionnelle de X_n sachant $\mathscr{F}_{n-1}$ est $P(X_{n-1}, \bullet)$. Par hypothèse, si $f(x_{n-1}) = y_{n-1}$, alors

$$\sum_{x_n\,|\,f(x_n)=y_n} P(x_{n-1}, x_n) = Q(y_{n-1}, y_n) \quad \text{ne dépend que de } (y_{n-1}, y_n),$$

donc

$$\begin{aligned}\star &= \sum_{x_{n-1}\,|\,f(x_{n-1})=y_{n-1}} \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-2} = y_{n-2}, X_{n-1} = x_{n-1}]\, Q(y_{n-1}, y_n) \\ &= \mathbb{P}[Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots, Y_{n-1} = y_{n-1}]\, Q(y_{n-1}, y_n).\end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient bien la forme recherchée pour $\star$. La matrice Q est bien stochastique : si $y \in \mathfrak{Y}$, alors comme f est surjective il existe bien $x \in \mathfrak{X}$ tel que $f(x) = y$, et on a dans ce cas :

$$\sum_{z \in \mathfrak{Y}} Q(y, z) = \sum_{z \in \mathfrak{Y}} \sum_{w\,|\,f(w)=z} P(x, w) = \sum_{w \in \mathfrak{X}} P(x, w) = 1.$$

La loi initiale de Y_0 est bien sûr la mesure image par f de la loi initiale de X_0.

Vérifions maintenant que ceci s'applique à la fonction $f : E \in \mathfrak{E} \mapsto |E| = \mathbb{N}$. D'après la question précédente, si $E = (I_1, \dots, I_k)$ et $f(E) = k$, alors les successeurs possibles de E pour la chaîne de Markov de matrice P sur $\mathfrak{E}$ sont les $E' = E(I_j \mapsto I_j + [\![1,d]\!])$ avec $d \geq 0$. On a alors $f(E') = f(E) + d - 1$. Ainsi, si $l = k + d - 1$ avec $d \geq 0$ est fixé, alors

$$\sum_{E'\,|\,f(E')=l} P(E, E') = \sum_{j=1}^{k} P(E, E(I_j \mapsto I_j + [\![1,d]\!])) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \mu(d) = \mu(l - k + 1).$$

Cette valeur $Q(k, l)$ ne dépend que de k et l, donc f vérifie bien le critère des images de chaînes de Markov, et de plus, la chaîne image $(Y_n)_n$ a pour matrice de transition $Q(k, l) = \mu(l - k + 1)$.

6. La positivité de la marche arrêtée vient du fait que les pas de la marche aléatoire $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont tous plus grands que -1 (le support de μ est inclus dans $\mathbb{N}$, donc le support de $\tilde{\mu}$ est inclus dans $[\![-1, +\infty]\!]$). Par conséquent, la marche ne peut pas devenir négative sans passer par 0, et la marche arrêtée reste positive.

Comme $(Y_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale positive, elle converge presque sûrement vers une variable intégrable (par le lemme de Fatou), et comme elle est à valeurs entières, elle est presque sûrement stationnaire. Sa limite Y est donc finie presque sûrement (puisqu'elle est intégrable), et entière (limite de valeurs entières). Si la limite Y vaut $k \geq 1$, alors $Y = \lim_{n\to\infty} Y_{n\wedge\tau_0} = \lim_{n\to\infty} Y_n$, donc k est la limite de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$. Or, presque sûrement, la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. En effet, notons R la matrice de transition de cette chaîne sur $\mathbb{Z}$, et supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}[\forall n \geq N,\ Y_n = k] > 0$. Cette probabilité est majorée par :

$$\mathbb{P}[\forall n \in [\![N, M]\!],\ Y_n = k] = \sum_{y_1,\ldots,y_{N-1}\in\mathbb{Z}} R(1, y_1)R(y_1, y_2)\cdots R(y_{N-1}, k)(R(k, k))^{M-N}$$

pour tout $M \geq N$. Pour qu'elle soit positive, il faut donc qu'il y ait un chemin de 1 à k de longueur N, et aussi que $R(k, k) = 1$: sinon, $\mathbb{P}[\forall n \in [\![N, M]\!],\ Y_n = k] = O(R(k, k)^{M-N}) = 0$. Or,

$$R(k, k) = \tilde{\mu}(0) = \mu(1),$$

qui par hypothèse ne vaut pas 1. Donc, les limites $k \geq 1$ sont exclus pour $(Y_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$, et $Y_{n\wedge\tau_0}$ tend presque sûrement vers 0 ; autrement dit, $Y = 0$ presque sûrement.

7. Comme $Y_{n+1} = Y_n + A_{n+1}$ avec A_{n+1} indépendant de $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n)$, on a :

$$\mathbb{E}[q^{Y_{n+1}} \,|\, \mathscr{F}_n] = q^{Y_n}\, \mathbb{E}[q^{A_{n+1}}] = q^{Y_n}\, \frac{G(q)}{q} = q^{Y_n}.$$

En effet, $\mathbb{E}[q^{A_{n+1}}] = \sum_{k=-1}^{\infty} \tilde{\mu}(k)\, q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, q^{k-1} = \frac{G(q)}{q} = 1$, car q est point fixe de G. Par conséquent, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, et la martingale arrêtée $(M_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale positive, donc qui converge presque sûrement vers une variable M. Notons tout de suite que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée, donc la convergence a aussi lieu dans L^1. On a en particulier

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[M_0] = q.$$

Si Y_n tend vers 0, alors $M_n = q^0 = 1$ au bout d'un certain rang, et $M = 1$. Sinon, $\tau_0 = +\infty$ et Y_n tend vers $+\infty$, donc $M = \lim_{n\to\infty} M_{n\wedge\tau_0} = \lim_{n\to\infty} M_n = 0$. La probabilité d'extinction s'obtient alors en remarquant que

$$q = \mathbb{E}[M] = \mathbb{P}[M = 1] = \mathbb{P}[Y_n \to 0].$$

8. Notons $S_n = \sum_{m=0}^{n-1} R_m$, et $M_n = S_n - \mathbb{E}[S_n] = S_n - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{k_m}$. La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, avec

$$\mathbb{E}[(M_n)^2] = \sum_{m=0}^{n-1} \mathrm{var}(R_m) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(k_m)^2} < \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(k_m)^2} = K < +\infty.$$

En effet, rappelons que pour une martingale dans L^2, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_n)^2] &= \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] + \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2] + 2\,\mathbb{E}[M_{n-1}(M_n - M_{n-1})] \\
&= \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] + \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2] + 2\,\mathbb{E}[M_{n-1}(\mathbb{E}[M_n \,|\, \mathscr{F}_{n-1}] - M_{n-1})] \\
&= \mathbb{E}[(M_{n-1})^2] + \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2],
\end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}[(M_n)^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(M_k - M_{k-1})$ si $M_0 = 0$. Par ailleurs, la variance d'une loi exponentielle de paramètre k est $\frac{1}{k^2}$. On a donc une martingale bornée dans L^2, qui converge presque sûrement vers une variable de carré intégrable. La suite $\sum_{m=0}^{n-1} R_m - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{k_m}$ reste donc presque sûrement bornée, et comme $\sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{k_m}$ tend par hypothèse vers $+\infty$, il en va de même pour S_n.

9. Si $s \leq t$, posons $F_s(x) = 1_{x \leq s}\, x$. Alors, $F_s : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction mesurable, et on a pour tout indice $I \in \mathfrak{S}$ et tous temps $s \leq t$:

$$M_I\, 1_{(M_I \leq s,\, I \in T(\xi))} = F_s\left(M_I\, 1_{(M_I \leq t,\, I \in T(\xi))}\right).$$

Ceci implique que les variables qui engendrent la tribu $\mathscr{F}_s$ sont toutes $\mathscr{F}_t$-mesurables ; par conséquent, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$. La famille $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ est donc un analogue à temps continu d'une filtration ; il faut comprendre la sous-tribu $\mathscr{F}_t$ comme l'ensemble des informations contenues dans l'arbre de Galton–Watson observé jusqu'au temps t.

On peut écrire

$$Z_t = \sum_{I \in \mathfrak{S}} 1_{I \in T(\xi)}\, 1_{N_I \leq t < M_I} = \sum_{I \in \mathfrak{S}} 1_{(M_{I\_} \leq t,\ I\_ \in T(\xi))} - 1_{(M_I \leq t,\ I \in T(\xi))},$$

avec $I\_ = (i_1, \ldots, i_{n-1})$ si $I = (i_1, \ldots, i_n)$. Chaque terme est l'image par la fonction mesurable $G(x) = 1_{x>0}$ d'une variable $\mathscr{F}_t$-mesurable ; donc, Z_t est $\mathscr{F}_t$-mesurable.

Remarquons que les variables engendrant la tribu $\mathscr{F}_t$ déterminent entièrement l'ensemble E_t des individus en vie au temps t. Pour calculer la loi de $\tau_+(t) - t$ sachant $\mathscr{F}_t$, on peut donc décomposer en fonction de la valeur de E_t. On écrit alors, pour E ensemble avec la propriété de non-filiation :

$$\begin{aligned}
1_{(E_t = E)}\, \mathbb{E}[1_{(\tau_+(t) \geq t+u)} \,|\, \mathscr{F}_t] &= \mathbb{E}[1_{(E_t = E, \tau_+(t) \geq t+u)} \,|\, \mathscr{F}_t] \\
&= \mathbb{E}\left[1_{(E_t = E)} \left(\prod_{I \in E} 1_{(t+u \leq N_I + V_I)}\right) \,|\, \mathscr{F}_t\right] \\
&= 1_{(E_t = E)}\, \mathbb{E}\left[\left(\prod_{I \in E} 1_{(t+u \leq N_I + V_I)}\right) \,|\, \mathscr{F}_t\right] \\
&= 1_{(E_t = E)} \prod_{I \in E} \mathrm{e}^{-u} = 1_{(E_t = E)}\, \mathrm{e}^{-u Z_t}.
\end{aligned}$$

À la dernière ligne, on a utilisé le fait que les variables V_I sont des variables exponentielles (indépendantes), et ont donc la propriété d'absence de mémoire : conditionnellement au fait que V_I soit plus grand que $t - N_I$, V_I est plus grand que $t + u - N_I$ avec probabilité e^{-u} pour tout I dans E. En reconstituant la probabilité conditionnelle, on obtient bien :

$$\mathbb{E}[1_{(\tau_+(t) \geq t+u)} \,|\, \mathscr{F}_t] = \sum_{E \in \mathfrak{E}} 1_{(E_t = E)}\, \mathbb{E}[1_{(\tau_+(t) \geq t+u)} \,|\, \mathscr{F}_t] = \sum_{E \in \mathfrak{E}} 1_{(E_t = E)}\, \mathrm{e}^{-u Z_t} = \mathrm{e}^{-u Z_t}.$$