Arbres de Galton–Watson continus

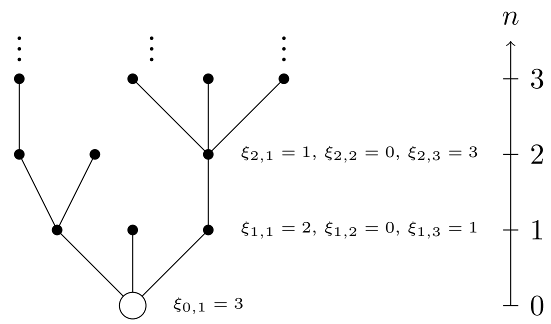
mots-clés : arbres de Galton–Watson, variables exponentielles, chaîne de Markov tuée.

L'objectif de ce texte est de présenter un modèle plus réaliste d'évolution d'une population que celui donné par les arbres de Galton–Watson *discrets*. Rappelons que ces arbres ont en profondeur n un nombre Z_n d'individus, avec la relation de récurrence

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{Z_n} \xi_{n,k}.$$

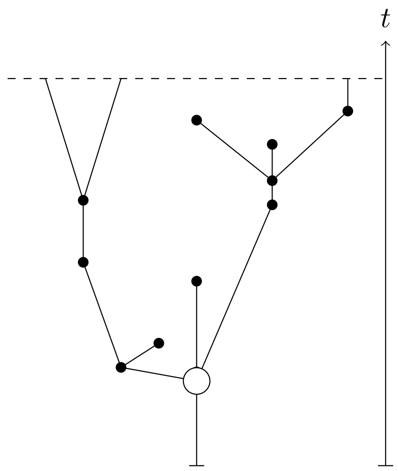
Dans cette formule, $\xi_{n,k}$ désigne le nombre de descendants du k-ième individu de la n-ième génération, et les variables $\xi_{n\geq 0,\, k\geq 1}$ sont supposées indépendantes et toutes de même loi μ (une loi sur les entiers appelée *loi de reproduction*).

arbre discret



On souhaite ajouter à ce modèle des durées de vie pour chaque individu, qui suivront par exemple des lois exponentielles indépendantes $\mathrm{Exp}(1)$. À la fin de sa vie de durée V_I, chaque individu I laisse une descendance ξ_I ; les variables ξ_I et V_I sont toutes indépendantes, et on a $\mathbb{P}[V_I \geq t] = \mathrm{e}^{-t}$ pour tout individu I et tout $t > 0$.

arbre continu



Dans le dessin ci-dessus, chaque noeud est placé à une hauteur représentant la mort de l'individu, et son remplacement par sa descendance. La première section du texte définit proprement ces arbres de Galton–Watson *continus*, et les sections suivantes s'intéressent au nombre Z_t d'individus en vie au temps $t \in \mathbb{R}_+$. La connaissance de la théorie du cas discret n'est pas requise (il y a néanmoins des résultats communs aux deux cas).

1 L'espace des arbres

Pour les arbres continus, on ne peut plus comme dans le cas discret séparer les individus par génération, et on ne peut donc plus indicer les sommets de l'arbre par les paires (n, k) avec $n \geq 0$ et $k \geq 1$. Une solution alternative est d'utiliser l'*étiquetage standard* des sommets d'un arbre enraciné :

— la racine est identifiée par l'étiquette $()$;

— les sommets descendants de la racine sont identifiés par les étiquettes $(1), (2), \ldots, (d_{()})$, avec $d_{()} \geq 0$.

— plus généralement, un sommet de profondeur n est identifié par une étiquette $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, et ses descendants sont identifiés par les étiquettes $I + j = (i_1, i_2, \ldots, i_n, j)$ et $j \in [\![1, d_I]\!]$, avec $d_I \geq 0$.

Ceci mène à la définition suivante :

Définition 1 (Arbre enraciné)**.** *Un* arbre enraciné *est une partie* $T \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$ *vérifiant les hypothèses suivantes :*

— *Le* 0*-uplet vide* $()$ *est dans* T*.*

— *Si* $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *est dans* T*, alors son ascendant* $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ *est aussi dans* T*.*

— *Si* $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *est dans* T*, alors les éléments* $I + j = (i_1, \ldots, i_n, j)$ *dans* T *dont* I *est l'ascendant sont tous ceux pour lesquels* $j \in [\![1, d_I]\!]$*, où* d_I *est un entier positif ou nul (le nombre de descendants du sommet* I*).*

Par exemple, l'arbre discret enraciné dessiné tout au début correspond à l'ensemble de sommets $T \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$ suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
(1,1,1) & & (3,1,1) & & (3,1,2) & & (3,1,3) \\
| & & & \diagdown & | & \diagup & \\
(1,1) & & (1,2) & & (3,1) & & \\
& \diagdown & \diagup & & | & & \\
& (1) & & (2) & (3) & & \\
& & \diagdown & | & \diagup & & \\
& & & () & & &
\end{array}$$

Dans ce qui suit, on notera $\mathfrak{T}$ l'ensemble des arbres enracinés, et $\mathfrak{S} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} (\mathbb{N}^*)^n$ l'ensemble des indices possibles des sommets d'un arbre enraciné. Si une fonction $\xi : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}$ est fixée, définissons une partie $T(\xi) \subset \mathfrak{S}$:

$$\big(I = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in T(\xi)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(i_j \leq \xi(i_1, \ldots, i_{j-1}) \text{ pour tout } j \in [\![1, n]\!]\big).$$

Proposition 2. *Pour toute fonction* $\xi : \mathfrak{S} \to \mathbb{N}$*, la partie* $T(\xi)$ *est un arbre enraciné dans* $\mathfrak{T}$*.*

Ceci permet de redéfinir l'arbre de Galton–Watson indépendamment d'une numérotation des individus par génération :

Définition 3 (Arbre de Galton–Watson)**.** *Soit* $\mu = (\mu(k))_{k \in \mathbb{N}}$ *une mesure de probabilité sur* $\mathbb{N}$*. L'*arbre de Galton–Watson *de loi de reproduction* μ *est l'arbre enraciné* $T(\xi)$*, avec* $(\xi(I))_{I \in \mathfrak{S}} = (\xi_I)_{I \in \mathfrak{S}}$ *famille de variables aléatoires indépendantes et toutes de loi* μ*.*

Ainsi, l'arbre de Galton–Watson de loi de reproduction μ est encore construit à partir d'une famille dénombrable de variables indépendantes identiquement distribuées ; mais l'indexation de ces variables permet maintenant d'adjoindre facilement des durées de vie aux sommets de l'arbre.

Définition 4 (Arbre de Galton–Watson continu)**.** *Un* arbre enraciné avec durées de vie *est la donnée d'un arbre enraciné* $T \in \mathfrak{T}$*, et d'une fonction* $V : T \to \mathbb{R}_+$*. La durée de vie de l'individu* I *est* $V(I) = V_I$*, et son instant de naissance est :*

$$N_I = V_{()} + V_{(i_1)} + V_{(i_1, i_2)} + \cdots + V_{(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})}$$

si $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$. On définit de même son instant de mort par :

$$M_I = V_{()} + V_{(i_1)} + V_{(i_1,i_2)} + \cdots + V_{(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = N_I + V_I.$$

Soit $(\xi_I)_{I\in\mathfrak{S}}$ une famille de variables i.i.d. entières de loi μ; et $(V_I)_{I\in\mathfrak{S}}$ une famille de variables indépendantes de $(\xi_I)_{I\in\mathfrak{S}}$, indépendantes entre elles et toutes de loi exponentielle $\mathrm{Exp}(1)$. *L'arbre de* Galton–Watson continu *de loi de reproduction μ est l'arbre enraciné $T(\xi)$ avec durées de vie V_I, $I \in T(\xi)$.*

L'arbre de Galton–Watson continu dessiné précédemment était un exemple obtenu avec $\mu = \mathrm{Poisson}(1)$. Si $(T(\xi), V)$ est un arbre de Galton–Watson continu, son nombre d'individus au temps t est le nombre de sommets I tel que $N_I \leq t < M_I$:

$$Z_t = \left|\{I \in T(\xi) \,|\, N_I \leq t < M_I\}\right|. \tag{1}$$

À ce stade, on ne sait pas encore si $Z_t < +\infty$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ (mais c'est bien le cas pour t assez petit, par exemple $t < V_{()}$). Notons aussi que pour $t > 0$, on pourrait avoir $Z_t = 0$ pour deux raisons différentes :

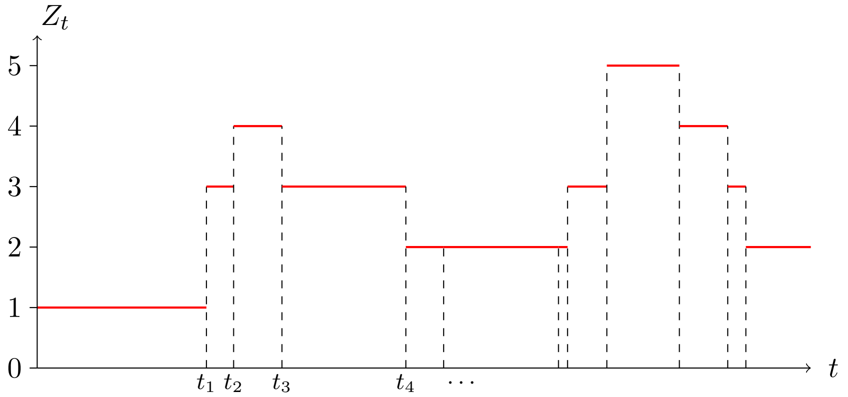
— *extinction* : l'arbre de Galton–Watson $T(\xi)$ est fini, donc $(M_I)_{I\in T(\xi)}$ est un ensemble fini de réels positifs, majoré par un certain temps $t_{\text{extinction}}$; et $Z_t = 0$ pour tout $t \geq t_{\text{extinction}}$.

— *explosion* : l'arbre de Galton–Watson $T(\xi)$ est un arbre infini, mais avec des instants de mort de plus en plus rapprochés, de sorte que $(M_I)_{I\in T(\xi)}$ est une partie majorée par un certain temps $t_{\text{explosion}}$; et $Z_t = 0$ pour tout $t \geq t_{\text{explosion}}$.

Les parties suivantes vont montrer que sous une hypothèse très raisonnable sur μ, il peut y avoir ou non extinction, mais qu'il ne peut pas y avoir explosion, et que $\mathbb{P}[\forall t > 0,\ Z_t < +\infty] = 1$.

2 Les chaînes de Markov induites

On fixe une loi de reproduction μ d'espérance finie : $m = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mu(k) < +\infty$. Comme dans le cas discret, on exclut le cas où $\mu = \delta_1$, qui donne un arbre trivial. Soit $(T(\xi), V)$ un arbre de Galton–Watson continu avec loi de reproduction μ. La fonction $t \mapsto Z_t$ est constante par morceaux, et chaque changement de valeur de Z_t correspond à la mort d'un individu I et la naissance de ξ_I nouveaux individus (attention, si $\xi_I = 1$, alors il n'y a pas à proprement parler de changement de valeur au temps $t = M_I$: $Z_{t_-} = Z_{t_+}$ dans ce cas).



Notons $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$ les instants de mort des premiers individus de l'arbre, et $Y_n = Z_{t_n}$ les valeurs correspondantes (avec par convention $Y_0 = 1$). Le dessin ci-dessus présente la fonction $t \mapsto Z_t$ correspondant à l'exemple du début du texte. Notons que si l'arbre de Galton–Watson continu est fini, alors les suites $(t_n)_n$ et $(Y_n)_n$ sont bien définies seulement pour $n \leq |T(\xi)|$. Si $\mathfrak{X}$ est un ensemble dénombrable, P une matrice stochastique sur $\mathfrak{X}$ et $x_0 \in \mathfrak{X}$ est un état absorbant avec $P(x_0, x_0) = 1$, on appelle *chaîne de Markov tuée en x_0 et de matrice P* une suite aléatoire d'états finie ou infinie $(X_n)_{n\leq\tau_{x_0}}$, où $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice P, et où

$$\tau_{x_0} = \inf(\{n \in \mathbb{N} \,|\, X_n = x_0\})$$

est le temps d'atteinte de x_0 (par convention, $\tau_{x_0} = +\infty$ si x_0 n'est jamais atteint).

Théorème 5 (Chaîne induite par un arbre continu)**.** *La suite* $(Y_n)_{n\leq|T(\xi)|}$ *est une chaîne de Markov tuée en* 0 *de matrice*

$$Q(k,l) = \begin{cases} \mu(l-k+1) & \text{si } l \geq k-1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sur $\mathbb{N}$*, et de loi initiale* δ_1*.*

Pour démontrer ce résultat, on peut coupler $(Y_n)_{n\leq|T(\xi)|}$ avec une chaîne de Markov tuée plus directement connectée à l'arbre de Galton–Watson continu $(T(\xi), V)$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, posons

$$E_t = \{I \in T(\xi) \,|\, N_I \leq t < M_I\};$$

c'est l'ensemble des individus en vie au temps t, et son cardinal est Z_t par l'équation (1). Pour t assez petit, E_t est un ensemble fini inclus dans $\mathfrak{S}$, avec la *propriété de non-filiation* : si $I \in E_t$, alors aucun ascendant ou descendant de I n'est dans E_t. En effet, E_t évolue lorsqu'un individu $I \in T(\xi)$ meurt, et il est alors remplacé par ses descendants. Notons $\mathfrak{E}$ l'ensemble des parties finies de $\mathfrak{S}$ avec la propriété de non-filiation. On munit $\mathfrak{S}$ de l'ordre lexicographique $\prec$, et on convient que si l'on indice les éléments de $E_t = \{I_1, I_2, \ldots, I_{Z_t}\}$ par les entiers de $[\![1, Z_t]\!]$, alors $I_1 \prec I_2 \prec \cdots \prec I_{Z_t}$. Ceci permet d'écrire de manière unique un élément de $\mathfrak{E}$ comme un n-uplet au lieu d'un ensemble.

Notons $X_0 = E_0 = (())$, et $X_n = E_{t_n}$ le Y_n-uplet des individus en vie juste après le n-ième temps de mort d'un individu de l'arbre. Si $X_n = (I_1, \ldots, I_{Y_n})$, alors ces $Y_n = |X_n|$ individus ont chacun au temps t_n une durée de vie *restante* donnée par une loi exponentielle standard. On utilise ici la propriété d'absence de mémoire des lois exponentielles :

$$\mathbb{P}[M_{I_j} \geq t_n + t \,|\, M_{I_j} \geq t_n] = \mathbb{P}[V_{I_j} \geq t] = \mathrm{e}^{-t}.$$

Ces durées de vie restantes sont indépendantes puisque les variables V_I le sont, donc

$$\mathbb{P}[t_{n+1} - t_n \geq t \,|\, X_0, X_1, \ldots, X_n] = \mathrm{e}^{-Y_n t};$$
$$\mathbb{P}[t_{n+1} = M_{I_j} \,|\, X_0, X_1, \ldots, X_n] = \frac{1}{Y_n}.$$

En effet, le minimum de $k = Y_n$ variables indépendantes de loi $\mathrm{Exp}(1)$ suit une loi $\mathrm{Exp}(k)$, et l'indice qui donne la variable minimale suit une loi uniforme sur $[\![1, k]\!]$. Posons

$$F : \mathfrak{E} \setminus \{\emptyset\} \times (0,1] \times \mathbb{N} \to \mathfrak{E}$$
$$((I_1, I_2, \ldots, I_k), u, \xi) \mapsto (I_1, \ldots, I_{j-1}, I_j 1, \ldots, I_j \xi, I_{j+1}, \ldots, I_k) \quad \text{avec } j = \lceil ku \rceil.$$

Autrement dit, $F(E, u, \xi)$ est l'ensemble avec la propriété de non-filiation obtenu à partir de E en remplaçant le $j = \lceil ku \rceil$-ième individu de E par ξ descendants (au niveau de l'indexation, on conserve bien l'ordre lexicographique).

Proposition 6. *Soit* $(T(\xi), V)$ *un arbre de Galton–Watson continu de loi de reproduction* μ*, et* $(X_n)_{n\leq|T(\xi)|}$ *les ensembles d'individus en vie correspondants; si* $|T(\xi)| < +\infty$*, alors* $X_{T(\xi)} = \emptyset$ *est l'ensemble vide. La loi de* $(X_n)_{n\leq|T(\xi)|}$ *est la loi d'une chaîne de Markov sur* $\mathfrak{E}$ *tuée en l'ensemble vide, et définie par la relation de récurrence :*

$$X_{n+1} = F(X_n, U_n, \xi_n) \quad \text{si } X_n \neq \emptyset,$$

où les U_n *sont des variables uniformes sur* $(0,1]$*, les* ξ_n *sont des variables de loi* μ*, et les* U_n *et les* ξ_n *sont toutes indépendantes.*

Le Théorème 5 se déduit de la Proposition 6 par un résultat général classique sur les images de chaînes de Markov. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de matrice P sur un ensemble $\mathfrak{X}$ et $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est une fonction surjective, alors en général $(Y_n = f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une chaîne de Markov, mais c'est le cas si f a la propriété suivante : pour tous $x_1, x_1' \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x_1) = f(x_1') = y_1$, et tout $y_2 \in \mathfrak{Y}$,

$$\sum_{x_2 \,|\, f(x_2)=y_2} P(x_1, x_2) = \sum_{x_2 \,|\, f(x_2)=y_2} P(x_1', x_2). \tag{2}$$

Cette valeur $Q(y_1, y_2)$ ne dépend alors que de y_1 et y_2, et Q est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie aisément que la condition (2) est satisfaite par la fonction $f : E \in \mathfrak{E} \mapsto |E| \in \mathbb{N}$.

3 Évolution du nombre d'individus

Remarquons que la matrice de transition Q du Théorème 5 est celle d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ dont les pas ont pour loi $\widetilde{\mu}(k) = \mu(k+1)$ pour $k \geq -1$. Autrement dit, $(Y_n)_{n \leq |T(\xi)|}$ suit la loi de

$$(1 + A_1 + \cdots + A_n)_n,$$

où les pas A_k sont des variables i.i.d. de loi $\widetilde{\mu}$, et où la marche est arrêtée lorsqu'elle atteint le niveau 0. On en déduit immédiatement :

Proposition 7. *Si $m \leq 1$, alors il y a extinction presque sûre pour l'arbre de Galton–Watson continu :*

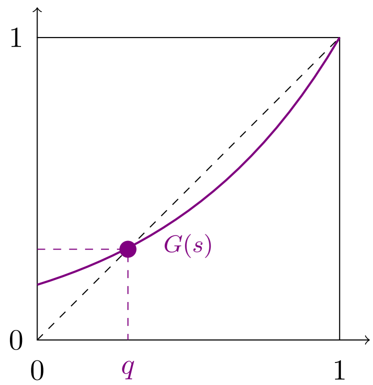
$$\mathbb{P}[|T(\xi)| < +\infty] = 1.$$

Démonstration. Notons $Y_n = 1 + A_1 + \cdots + A_n$ (y compris pour $n > |T(\xi)|$, c'est-à-dire qu'on n'arrête pas la marche aléatoire). Remarquons que les pas A_k ont pour espérance $\mathbb{E}[A_k] = m - 1$. Par conséquent, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale, donc $(Y_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale positive, qui converge presque sûrement vers une variable aléatoire Y. Cette limite Y est finie presque sûrement et à valeurs entières. Comme $\mu \neq \delta_1$, les valeurs $k \neq 0$ ne peuvent pas être des limites de la chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci implique que $Y_{n\wedge\tau_0} \to_{n\to\infty} 0$, et donc que τ_0 est fini presque sûrement. □

Supposons maintenant $m > 1$. Par la loi des grands nombres, $Y_n \to_{n\to\infty} +\infty$, donc $Y_{n\wedge\tau_0}$ tend presque sûrement soit vers 0 (extinction), soit vers $+\infty$ (arbre infini) :

$$\mathbb{P}[\tau_0 < +\infty] + \mathbb{P}[\tau_0 = +\infty \text{ et } Y_n \to +\infty] = 1.$$

Notons $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(k)\, s^k$ la fonction génératrice de la loi μ, bien définie pour $s \in [0,1]$. C'est une fonction croissante convexe sur $[0,1]$, avec $G(0) \geq 0$, $G(1) = 1$ et $G'(1) = m > 1$. Elle admet donc un unique autre point fixe $q \in [0,1)$, tel que $G(q) = q$.



On rappelle que dans le cas des arbres de Galton–Watson discrets surcritiques, q est la probabilité d'extinction. C'est encore le cas pour les arbres de Galton–Watson continus surcritiques :

Proposition 8. *Si $m > 1$, alors la probabilité d'extinction de $(T(\xi), V)$ est l'unique réel $q \in [0,1)$ tel que $G(q) = q$.*

Démonstration. Si $M_n = q^{Y_n}$, alors la proposition se déduit du fait que $(M_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale qui converge presque sûrement vers une variable M qui vaut 1 si Y_n tend vers 0, et qui vaut 0 si Y_n tend vers $+\infty$. □

Pour finir, revenons au processus $(Z_t)_{t\geq 0}$. Si l'arbre s'éteint, alors $Z_t = 0$ pour $t \geq t_{|T(\xi)|}$, et on a donc $Z_t < +\infty$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$. Supposons maintenant $m > 1$ et $|T(\xi)| = +\infty$ (non-extinction).

Théorème 9 (Non-explosion)**.** *Sur l'événement $|T(\xi)| = +\infty$, la suite des instants de mort $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend presque sûrement vers $+\infty$, et on a donc $Z_t < +\infty$ pour tout temps $t \in \mathbb{R}_+$. Il n'y a donc pas explosion (en revanche, $\lim_{t\to\infty} Z_t = +\infty$).*

Lemme 10. *Soit $(R_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $R_m \sim \mathrm{Exp}(k_m)$ pour une suite de paramètres strictement positifs $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$. On suppose que $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k_m} = +\infty$ et que $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(k_m)^2} < +\infty$. Alors,*

$$\sum_{m=0}^{n-1} R_m \to_{n\to\infty} +\infty \quad \textit{presque sûrement.}$$

Preuve du Théorème 9. On se place donc dans le cas où $m > 1$ et où Y_n n'atteint jamais 0 et tend donc vers $+\infty$. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $M > 0$, il existe $n(\varepsilon, M)$ tel que

$$\mathbb{P}[\tau_0 = +\infty \text{ et } t_{n(\varepsilon,M)} \geq M] \geq 1 - q - \varepsilon.$$

Par la loi des grands nombres, $\frac{Y_j}{j}$ tend presque sûrement vers $2\delta = m - 1 > 0$, donc pour j_ε assez grand,

$$\mathbb{P}\left[\tau_0 = +\infty \text{ et } j\delta \leq Y_j \leq 3j\delta \text{ pour tout } j \geq j_\varepsilon\right] \geq \frac{1-q-\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

car la valeur à droite est strictement plus petite que $1 - q = \mathbb{P}[\tau_0 = +\infty]$. La loi de t_n conditionnellement à la valeur du vecteur $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}) \in (\mathbb{N}^*)^n$ est celle d'une somme de n variables exponentielles indépendantes de paramètres $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1} \geq 1$. Rappelons que pour réaliser une variable exponentielle $R \sim \mathrm{Exp}(k)$, on peut prendre $-\frac{\log U}{k}$, où U est une variable uniforme sur $[0, 1]$. Donc, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, indépendantes entre elles et indépendantes des variables $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[t_n \geq M \,|\, (Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, \ldots, k_{n-1})] &= \mathbb{P}\left[-\frac{\log U_0}{k_0} - \frac{\log U_1}{k_1} \cdots - \frac{\log U_{n-1}}{k_{n-1}} \geq M\right] \\ &\geq \mathbb{P}\left[-\frac{\log U_{j_\varepsilon}}{3j_\varepsilon\delta} - \cdots - \frac{\log U_{n-1}}{3(n-1)\,\delta} \geq M\right]\end{aligned}$$

si $j\delta \leq k_j \leq 3j\delta$ pour tout $j \geq j_\varepsilon$. Par le Lemme 10, si $R_m = -\frac{\log U_m}{3m\delta}$, alors la somme des R_m tend presque sûrement vers l'infini, donc pour $n = n(\varepsilon, M)$ assez grand et toute suite $(k_0, \ldots, k_{n-1})$ telle que $j\delta \leq k_j \leq 3j\delta$ pour $j \geq j_\varepsilon$,

$$\mathbb{P}[t_{n(\varepsilon,M)} \geq M \,|\, (Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, \ldots, k_{n-1})] \geq 1 - \varepsilon.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[\tau_0 = +\infty \text{ et } t_{n(\varepsilon,M)} \geq M] \\ &\geq \sum_{\substack{k_0,\ldots,k_{n(\varepsilon,M)-1}\geq 1 \\ \forall j \geq j_\varepsilon,\; j\delta \leq k_j \leq 3j\delta}} \mathbb{P}[(Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, \ldots, k_{n-1})]\, \mathbb{P}[t_{n(\varepsilon,M)} \geq M \,|\, (Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, \ldots, k_{n-1})] \\ &\geq \frac{1-q-\varepsilon}{1-\varepsilon}(1-\varepsilon) = 1 - q - \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite des instants de mort tend presque sûrement vers $+\infty$ lorsque Y_n tend vers $+\infty$. Dans ce contexte, $Z_t = Y_n$ pour $t_n \leq t < t_{n+1}$, donc Z_t est tout le temps fini, et $\lim_{t\to\infty} Z_t = \lim_{n\to\infty} Y_n = +\infty$. □

Questions

1. Démontrer la Proposition 2.

2. Soit `Xi` une variable aléatoire entière définie dans `Python/SciPy` ; par exemple, une variable de Poisson `Xi = scipy.stats.poisson(L)`, dont on peut obtenir des réalisations avec la commande `Xi.rvs()`. Écrire un programme `Z(Xi, t)` qui dessine la fonction $u \mapsto Z_u$ pour $u \in [0, t]$ et pour divers exemples de variables aléatoires `Xi` (par exemple, des lois de Poisson avec divers paramètres). Commenter ces simulations.

3. Dans le cas discret, lorsque μ admet un moment d'ordre 2 et $m = \sum_{k=0}^{\infty} k\,\mu(k) > 1$, la martingale $(\frac{Z_n}{\mathbb{E}[Z_n]})_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{Z_n}{m^n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable Z, qui est strictement positive exactement sur l'événement de non-extinction. Pour les arbres continus, des calculs plus avancés que ceux donnés dans le texte permettent de montrer que
$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathrm{e}^{(m-1)t},$$
et que si $m > 1$, alors $(\frac{Z_t}{\mathbb{E}[Z_t]})_{t\in\mathbb{R}_+}$ converge presque sûrement lorsque t tend vers l'infini vers une variable aléatoire Z. Écrire un programme qui illustre cette convergence (on pourra par exemple prendre une loi de reproduction Poisson(2), et dessiner le nombre d'individus renormalisé jusqu'au temps $t = 8$).

4. En utilisant la Proposition 6, donner la valeur de la matrice de transition P de la chaîne de Markov tuée $(X_n)_{n\leq|T(\xi)|}$ associée à un arbre de Galton–Watson continu $(T(\xi), V)$. En admettant pour le moment le critère sur les images de chaînes de Markov (voir la question suivante), en déduire que la matrice Q donnée dans le Théorème 5 a bien pour valeurs $Q(k,l) = \mu(l-k+1)$.

5. Démontrer le critère sur les images de chaînes de Markov donnée à la fin de la Section 2 : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{X}$ de matrice P et $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est une fonction surjective vérifiant l'équation (2) pour tous $x_1, x_1' \in \mathfrak{X}$ tels que $f(x_1) = f(x_1') = y_1$ et pour tout $y_2 \in \mathfrak{Y}$, alors $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov sur $\mathfrak{Y}$. Comment s'exprime la loi initiale de $Y_n = f(X_n)$ en fonction de celle de X_n ? Vérifier aussi que la fonction $f : E \in \mathfrak{E} \mapsto |E| \in \mathbb{N}$ a bien cette propriété.

6. Dans la preuve de la Proposition 7, pourquoi $Y_{n\wedge\tau_0}$ est-elle toujours positive (sachant que la marche non arrêtée $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas a priori) ? Expliquer pourquoi la limite Y de la surmartingale $(Y_{n\wedge\tau_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est finie presque sûrement et à valeurs entières. Montrer ensuite que Y vaut 0 presque sûrement.

7. Démontrer entièrement la Proposition 8. Pour les arguments de martingales, on pourra utiliser la filtration engendrée par la marche aléatoire $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. Démontrer le Lemme 10 ; on pourra par exemple utiliser le théorème de convergence des martingales bornées dans L^2.

9. Étant donné un arbre de Galton–Watson continu de loi de reproduction μ, on pose pour $t > 0$:
$$\mathscr{F}_t = \sigma(\{M_I\, 1_{(M_I\leq t,\ I\in T(\xi))} \mid I \in \mathfrak{S}\});$$
c'est une sous-tribu de la tribu $\mathscr{F}$ de l'espace de probabilité sur lequel sont définies les variables ξ_I et V_I.
   - Montrer que si $s \leq t$, alors $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$.
   - Montrer que Z_t est une variable $\mathscr{F}_t$-mesurable.
   - Pour tout temps $t > 0$, on note
   $$\tau_+(t) = \inf(\{M_I \mid I \in T(\xi) \text{ et } M_I > t\});$$
   c'est le premier temps d'un décès après t. Autrement dit, si $Z_t = Y_{n-1}$, alors $\tau_+(t) = t_n$. En décomposant en fonction de la valeur de E_t, montrer que la loi conditionnelle de $\tau_+(t) - t$ sachant $\mathscr{F}_t$ est Exp(Z_t) :
   $$\mathbb{E}[1_{(\tau_+(t)\geq t+u)} \mid \mathscr{F}_t] = \mathrm{e}^{-Z_t u} \quad \text{pour tout } u > 0.$$

   Ceci explique en grande partie pourquoi dans la preuve du Théorème 9, on peut affirmer que la loi de t_n sachant $(Y_0, \ldots, Y_{n-1}) = (k_0, \ldots, k_{n-1})$ est celle d'une somme de variables exponentielles indépendantes de paramètres $k_0, \ldots, k_{n-1}$.