SUR LES SUITES RÉCURRENTES

Daniel PERRIN

0. Introduction[1].

Le point de départ de ce texte est une contradiction. Beaucoup de collègues du second degré considèrent en effet le thème des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ comme obsolète, éculé et, pour tout dire, sans intérêt, et la lecture des sujets de Bac ou des exercices des manuels incite à confirmer leur opinion. Pourtant, il se trouve que j'enseigne ce thème depuis de nombreuses années en CAPES, en y trouvant chaque fois de l'intérêt et du plaisir. C'est donc cette contradiction apparente que j'essaie d'analyser ici en montrant d'abord les deux points de vue, puis en discutant de ce qu'on peut faire, ou ne pas faire, sur ce sujet.

1. L'aspect mathématique du sujet.

a) L'intérêt.

L'intérêt du thème vient évidemment de la résolution des équations numériques $g(x) = 0$ que l'on peut ramener à un problème de recherche de point fixe par diverses méthodes : poser $f(x) = x + g(x)$, ou $f(x) = x + \lambda g(x)$ ou encore $f(x) = x + \mu(x)g(x)$, en ajustant le paramètre λ ou la fonction μ. C'est en particulier à cette forme que conduisent les méthodes de Newton, d'interpolation ou d'ajustement linéaire. La recherche du point fixe de f se fait alors par itération en étudiant une suite $u_{n+1} = f(u_n)$. Cette idée de ramener la recherche des solutions d'une équation à un problème de point fixe et de trouver le point fixe par itération est absolument fondamentale en analyse à plusieurs variables et en géométrie puisqu'elle permet de montrer des résultats d'**existence** [2] essentiels comme Cauchy-Lipschitz ou le théorème des fonctions implicites. En cela l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ est une porte ouverte vers les études ultérieures. Par ailleurs, je persiste à penser, et je vais l'expliquer ci-dessous, que c'est un sujet passionnant.

b) Les résultats.

[1] Ce texte a été écrit en 2000 pour les membres de la commission Kahane. Les références aux programmes concernent les programmes de 1998 et elles sont aujourd'hui obsolètes. En particulier, dans les programmes de Terminale S de 2002, il n'y a plus l'inégalité des accroissements finis, mais, en revanche, le théorème de convergence des suites croissantes majorées est revenu au programme.

[2] En revanche, à une variable, l'existence des solutions résulte toujours du théorème des valeurs intermédiaires.

Je rappelle brièvement les contours mathématiques du problème.

On considère une suite donnée par une valeur initiale u_0 et une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose la fonction f au moins de classe C^1 pour être tranquille. L'existence de la suite est assurée dès que l'on dispose d'un intervalle stable[3].

Si la suite (u_n) a une limite l c'est nécessairement un point fixe de f, l'existence d'un tel point fixe (ou de plusieurs) se démontre en étudiant la fonction $f(x) - x$. Je passe sur l'aspect graphique de la suite, important, mais bien connu.

La convergence de la suite (u_n) vers un point fixe l est essentiellement régie par la valeur de la dérivée $f'(l)$. Il y a quatre cas à considérer :
• Si $|f'(l)| > 1$ la suite u_n ne peut converger vers l que si elle est égale à l à partir d'un certain rang (on dit que le point fixe est **répulsif**). Lorsqu'il y a plusieurs points fixes répulsifs il peut y avoir des comportements chaotiques, cf. §7 ci-dessous.

• Si $|f'(l)| = k_0 < 1$, et si on prend k tel que $k_0 < k < 1$, il existe un intervalle $I = [l-\alpha, l+\alpha]$ sur lequel on a $|f'(x)| < k < 1$ (la fonction est dite **contractante**). Cet intervalle est stable et si $u_0 \in I$, la suite converge vers l (point fixe **attractif**). On a alors $|u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$, de sorte que la convergence est **géométrique**.

• Le cas $f'(l) = 0$ est un cas particulier du précédent. La convergence n'est plus seulement géométrique, mais **quadratique** (i.e. en k^{2^n} avec $k < 1$). C'est le cas des méthodes de Newton, cf. §4 ci-dessous.

• si $|f'(l)| = 1$, les choses sont plus compliquées, il peut y avoir ou non convergence, et s'il y a convergence elle est **lente** (i.e. en $\dfrac{1}{n^\alpha}$), cf. §6 ci-dessous.

c) Justifications.

La justification des points précédents sur des cas particuliers est essentiellement du niveau de terminale. La remarque de base est que la condition $|f'(x)| < k$ (ou $> k$) est ouverte, de sorte que si elle est vraie en l elle est vraie au voisinage. Bien entendu, ce point n'est pas du niveau d'un élève de terminale, mais c'est sans importance car il suffit d'étudier la fonction f' et de constater qu'elle vérifie la propriété voulue sur un intervalle contenant le point fixe.
Ensuite, pour le cas répulsif, si on a $f'(x) \geq k > 1$ sur un intervalle I contenant l, on a $f(x) - f(l) \geq k(x - l)$ sur I et la conclusion s'ensuit. (C'est clair par le théorème des accroissements finis, hors programme, mais on peut le montrer en étudiant la fonction $f(x) - f(l) - k(x - l)$, cf. §7 : oui l'étude des variations des fonctions c'est utile !)
Pour le cas attractif, il est clair que l'intervalle symétrique $I = [l-\alpha, l+\alpha]$ est stable (l'inégalité des accroissements finis dit que l'on se rapproche de l sur l'intervalle) et la convergence de la suite est immédiate avec l'inégalité $|u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$.

[3] Sur ce point le programme actuel stipule : *Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'existence et l'unicité de cette suite.* Je ne suis pas d'accord. Je conçois qu'on ait mis cette restriction pour éviter des dérives, mais elle incite les professeurs à parachuter un intervalle stable, ce qui enlève beaucoup de sel à l'étude. Je préconiserais au contraire de regarder des exemples comme les suites homographiques, cf. §5 ci-dessous, ou encore $u_{n+1} = \ln u_n$ pour bien faire sentir cette difficulté d'existence de la suite liée à l'absence d'intervalle stable.

Attention, ici, la pratique est plus difficile que la théorie. En effet, la recherche de l'intervalle stable n'est pas si simple, même si on a trouvé un intervalle I sur lequel on a $|f'| \leq k < 1$, car on ne connaît pas, en général, la valeur du point fixe l et on ne peut donc pas prendre explicitement un intervalle symétrique par rapport à l. Si la fonction f est croissante sur l'intervalle considéré, cela ne pose pas de problème. En effet, si on a $0 \leq f' \leq k < 1$ sur un intervalle $[a, b]$ contenant l, on a $0 \leq f(l) - f(a) = l - f(a) \leq k(l - a) < l - a$, de sorte que $f(a) \in [a, l]$ et, de même, $f(b) \in [l, b]$. Dans ce cas, je ne comprends pas pourquoi on ne laisse pas ce travail aux élèves.
Si $f'(l)$ est < 0, les choses sont un peu plus subtiles, cf. §3, mais un petit raisonnement permet de trouver un intervalle stable aussi.

d) Des objectifs pédagogiques en terminale S.

• L'étude des suites récurrentes peut être l'occasion d'une approche expérimentale, à l'aide de la calculette programmable et du graphique. Je préconise de ne pas imposer immédiatement la valeur de départ u_0, (pour avoir une situation suffisamment riche), et de laisser, pendant un temps assez long, à la charge de l'élève le soin d'explorer le problème (en tous cas de ne pas demander trop tôt "monter que u_n a pour limite l") laissant ainsi la situation ouverte.

• L'objectif essentiel me semble être de faire comprendre l'importance des points fixes et de la dérivée en ceux-ci (points attractifs ou répulsifs, il n'est pas interdit de donner le nom, très évocateur). Cela repose, comme c'est le cas actuellement, sur l'inégalité des accroissements finis, mais en laissant à la charge de l'élève, au moins de temps en temps, la sélection de l'intervalle stable sur lequel f est contractante.

• Un autre objectif est de faire sentir aux élèves les différences de rapidité de convergence. La calculatrice est l'outil privilégié pour cela. Il est plus difficile de faire des démonstrations. Toutefois, on peut montrer que la convergence est quadratique sur certains exemples algébriques, par exemple la suite de Héron, cf. §4. De même, le cas de la convergence lente peut aussi être abordé sur des exemples bien choisis, cf. §6.

• Enfin, même s'il est nettement plus difficile, le cas chaotique peut-être abordé, de manière essentiellement expérimentale, cf. §7. J'y vois deux avantages :
1) On rencontre ce type de suites en dynamique des populations lorsqu'on ne se contente pas d'un modèle exponentiel (souvent peu conforme à la réalité). Cela permet de combattre l'idée que les mathématiques, appliquées à la réalité, produisent des résultats aberrants : dans ce cas, ce ne sont pas les mathématiques qui sont en cause, mais le modèle.
2) Évidemment, il est à peu près impossible, au niveau du lycée, de prouver les conjectures que la calculatrice semble fournir, mais on peut signaler aux élèves qu'on peut y parvenir, avec d'autres outils, voir la bibliographie.

Dans ce qui suit, après avoir décrit la situation des problèmes de Bac et des exercices des manuels, je proposerai quelques textes, rédigés à l'aide de l'actuel programme de terminale, mais délibérément plus ambitieux (et sans doute trop). Le but est d'illustrer les points ci-dessus et de montrer que le domaine est beaucoup plus riche que ne le laisse supposer la lecture des manuels.

2. L'état du domaine dans les manuels et au Bac.

a) Au Bac.

Le modèle de problème de Bac sur le sujet est le suivant. On donne une fonction f. On étudie les variations de cette fonction. On demande de vérifier qu'un certain intervalle I est stable, puis que sur cet intervalle on a une inégalité $|f'(x)| \leq k < 1$. On demande de montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution l sur l'intervalle I (on donne le plus souvent l'indication de regarder $f(x)-x$). On étudie alors la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$, avec u_0 donné dans I. On demande de montrer successivement les inégalités $|u_{n+1}-l| \leq k|u_n-l|$ puis $|u_n-l| \leq k^n|u_0-l|$ et d'en déduire la convergence de la suite u_n vers l. On demande une valeur approchée de la limite à 10^{-m} près.

Commentaire : C'est vrai que dans un tel exercice, l'élève n'a **rien** *à faire d'autre que des vérifications essentiellement triviales et qu'on s'est arrangé pour qu'il n'ait pas à faire preuve de la moindre initiative. Je considère, moi aussi, que, posé comme ça, cet exercice est sans autre intérêt que celui de permettre à de nombreux élèves de réciter une leçon apprise tout au long de l'année et d'être ainsi reçus au Bac.*

b) Dans les manuels.

Voici maintenant un exercice recopié dans le livre de Terracher (qui est loin d'être le pire). Cet exercice est choisi à dessein sur un thème le plus banal possible : le point fixe du cosinus, situation classique s'il en est.

L'objet de cet exercice est d'établir l'existence et l'unicité d'un point fixe de la fonction cosinus et d'approcher ce point fixe à l'aide d'une suite récurrente.

1) On pose pour x réel, $f(x) = \cos x$. En étudiant la fonction $\varphi : x \mapsto x - \cos x$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α vérifiant $0,5 \leq \alpha \leq 1$.

2) On désigne par I l'intervalle $[1/2, 1]$. Établir que $f(I) \subset I$ et que $|f'(x)| \leq 0,9$ pour tout x de I.

3) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \cos u_n$. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \in I$ et que $|u_n - \alpha| \leq 0,9\,|u_{n-1} - \alpha|$.
En déduire que $|u_n - \alpha| \leq 0,9^n|u_0 - \alpha|$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} = \alpha$.

3. Le point fixe du cosinus, version ouverte.

La critique essentielle que je fais à l'énoncé précédent est de ne pas laisser aux élèves le travail intéressant qui est la recherche d'un intervalle stable, à partir de la constatation que la fonction est contractante au voisinage du point fixe. J'ai déjà dit que cette idée de point fixe attractif me semble être l'idée fondamentale à faire passer sur ce sujet.
Voici maintenant un énoncé, toujours conforme à l'actuel[4] programme de Terminale S, élaboré avec mes étudiants de CAPES. Il s'agit plutôt à mon sens d'un

[4] Rappelons qu'il s'agit du programme 1998.

texte de TP. Il suppose qu'on a déjà étudié des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'on a vu notamment quelle est la limite possible, comment visualiser la suite sur un graphe, et comment utiliser l'inégalité des accroissements finis lorsqu'on a un intervalle stable par f sur lequel la dérivée f' est majorée.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos x$.

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α que l'on encadrera entre deux mesures d'angles remarquables.

On définit une suite (u_n) en se donnant $u_0 \in [0, \pi/2]$ et en posant, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2) En utilisant la calculatrice, donner une conjecture sur la limite de (u_n), le lien de cette limite avec α et la monotonie de la suite.

3) Interpréter géométriquement la suite (u_n) en termes de graphe et discuter les conjectures obtenues en 2).

4) Trouver un intervalle $[a, b]$ contenant α sur lequel $|f'|$ est majorée par un réel k avec $0 \leq k < 1$. Quelle conséquence en tire-t'on sur sur $|f(x) - f(\alpha)|$ pour $x \in [a, b]$?
L'intervalle $[a, b]$ trouvé est-il stable par f ? Trouver un intervalle I stable par f, contenu dans $[a, b]$ et contenant α. (On pourra raisonner selon la position des points $a, b, \alpha, f(a), f(b)$.)

5) On prend u_0 dans l'intervalle I, $u_0 > \alpha$. Montrer que la suite (u_n) converge vers α et donner une majoration de l'erreur $|u_n - \alpha|$ en fonction de n. Avec cette majoration, pour quel n est-on sûr que l'erreur est $< 10^{-8}$?

Commentaires.

1) *On attend : $\pi/6 < \alpha < \pi/4$. Je préfère ces valeurs que l'on peut trouver de tête à celles que donnent habituellement les énoncés et qui n'ont aucun sens géométrique, donc requièrent immédiatement l'usage de la calculatrice.*

On notera que comme $[0, \pi/2]$ est stable par f, la suite (u_n) est bien définie.

2) *Les élèves peuvent soit écrire un programme, soit utiliser un programme tout fait, voire une tabulation automatique, soit simplement utiliser une répétition de la touche cosinus (il faut être en mode radians, bien entendu).*

3) *La suite est "en escargot" et semble bien converger vers le point fixe.*

4) *C'est l'originalité de l'exercice. On cherche un intervalle stable par f, sur lequel f est contractante et cet intervalle n'est pas parachuté. On peut utiliser l'intervalle $[a, b] = [\pi/6, \pi/4]$ trouvé en 1) (si on travaille en classe avec les élèves l'intervalle n'a pas à être indiqué dans l'énoncé). Il convient pour f' mais n'est pas stable (c'est très souvent le cas lorsque f est décroissante) : le calcul montre en effet qu'on a $a < f(b) < b < f(a)$, de sorte que $f(a)$ sort de l'intervalle. Cependant, il est facile, avec un petit dessin et l'inégalité des accroissements finis de trouver un intervalle stable. Voilà le raisonnement : comme α est fixe, comme b est $> \alpha$ et comme f est décroissante, on a $f(b) < \alpha$ et, comme f est contractante sur $[a, b]$, $f(b)$ est plus proche de α que b : on a $|f(b) - f(\alpha)| = \alpha - f(b) \leq k(b - \alpha) \leq b - \alpha$. On considère alors $f(f(b))$. Il est plus grand que α et encore plus proche de α que $f(b)$, donc a fortiori que b ce qui montre que l'intervalle $I = [f(b), b]$ est*

stable (le petit dessin est obligatoire !). Là encore, en TP, il n'est pas nécessaire de donner d'emblée l'indication de regarder $a, b, f(a), f(b)$. On notera que, comme on a pris des valeurs "remarquables", il n'y a pas besoin de la calculatrice dans cette question.

4. La suite de Héron.

Dans ce paragraphe je donne un exemple, là encore archi-classique, d'une suite qui converge rapidement. Le seul point que je veux mettre en évidence est le fait que, dans certains cas simples, on peut vraiment prouver que la convergence est quadratique.

Voici un énoncé rédigé selon l'actuel programme de Terminale S.

Soient a un nombre réel > 1, f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - a$ et $G(f)$ le graphe de f.

1) Soit $M_x = (x, f(x))$ un point de $G(f)$. Déterminer l'équation de la tangente T_x en M_x à $G(f)$. On suppose $x \neq 0$. Montrer que le point d'intersection de T_x et de l'axe des x a pour abscisse $\dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$.

On considère la fonction g définie pour $x \neq 0$ par $g(x) = \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{a}{x})$ et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par la donnée de sa valeur initiale $u_0 > \sqrt{a}$ et par la formule $u_{n+1} = g(u_n)$ pour $n \geq 0$.

2) Tracer les graphes de f et g et interpréter géométriquement la suite (u_n) sur ces graphes. Montrer que u_n est > 0. Quelle peut être la limite éventuelle de u_n ?

3) Calculer $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.

4) Montrer que l'on a $u_n > \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 0$. En déduire la majoration : $u_{n+1} - \sqrt{a} < \dfrac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5) Soient k un réel > 0 et (v_n) une suite de nombres réels > 0 vérifiant $v_{n+1} \leq k\, v_n^2$. Soient m et n des entiers tels que $0 \leq m \leq n$. Montrer qu'on a :

$$v_n \leq \frac{1}{k}\big(k\, v_m\big)^{2^{n-m}} \quad \text{et, en particulier,} \quad v_n \leq \frac{1}{k}\big(k\, v_0\big)^{2^n}.$$

6) En déduire qu'on a l'inégalité : $u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}\left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$.

7) On supppose qu'on a un premier encadrement de $\sqrt{a}$ entre deux entiers consécutifs : $0 < p \leq \sqrt{a} < p+1$. On pose $u_0 = p+1$. Donner une majoration de la différence $u_n - \sqrt{a}$ en fonction de n et p et en déduire que la suite u_n converge vers $\sqrt{a}$.

8) On suppose $a = 2$ et $u_0 = 2$. Donner un entier n_0 tel que $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-6}$ pour $n \geq n_0$. Même question pour $u_n - \sqrt{2} \leq 10^{-15}$, ou encore $\leq 10^{-100}$. Donner une approximation de $\sqrt{2}$ avec 15 décimales exactes.

Indications et commentaires.

2) C'est la méthode de Newton ou des tangentes. Il est clair que u_n *est* > 0 *par récurrence. La limite éventuelle est un point fixe de* g*, donc* $\sqrt{a}$ *ou* $-\sqrt{a}$*. C'est donc* $\sqrt{a}$ *pour une raison de signe.*
3) C'est un petit calcul algébrique, facile pourvu qu'on pense toujours à faire apparaître la quantité $u_n - \sqrt{a}$*. On trouve :*

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}. \tag{1}$$

Du point de vue pédagogique on peut aussi donner le résultat pour éviter de bloquer les élèves.
C'est ce calcul qui fait tout l'intérêt l'exercice. En effet, on sait qu'on a toujours, pour une méthode de Newton appliquée convenablement à une fonction f *et convergeant vers la racine* α *de* $f(x) = 0$*, une formule du type*

$$u_{n+1} - \alpha = \frac{(u_n - \alpha)^2}{2} \frac{f''(\theta_n)}{f'(u_n)}$$

avec $\theta_n \in [\alpha, u_n]$*. Dans le cas présent, on retrouve exactement la formule précédente. Mais, cette formule requiert, pour être établie dans le cas général, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre* 2 *ce qui est hors de portée d'un élève de terminale. L'intérêt du calcul ci-dessus est d'en donner une preuve directe. C'est l'exemple le plus simple, d'autres sont possibles, notamment lorsque* f *est polynomiale de petit degré.*
4) De la formule (1) *résultent aussitôt le fait que* u_n *est* $> \sqrt{a}$*, la majoration demandée et la décroissance de* (u_n)*.*
5) La formule se montre sans difficulté par récurrence descendante sur m*. Si on donne cet exercice en TP, il ne faut pas donner d'emblée la formule, mais la faire découvrir en partant de l'inégalité* $v_{n+1} \leq k\, v_n^2$*, écrite pour* $n-1, n-2, \cdots$*, en élevant au carré à chaque pas et en multipliant les inégalités obtenues. L'intérêt de la variante avec* v_m *est de permettre d'améliorer les majorations en prenant un point de départ plus loin.*
7) On a $u_n - \sqrt{a} \leq 2\,(p+1) \left(\dfrac{1}{2p}\right)^{2^n}$ *et on en déduit le résultat (car* $1/2p \leq 1/2$*).*
On notera ici qu'on a une convergence quadratique (i.e. avec un exposant en 2^n*). C'est la supériorité de cet exercice sur ceux qu'on trouve habituellement sur la méthode de Newton dans les livres et qui se contentent d'une majoration en* k^n *avec* $0 < k < 1$*.*
8) On a $u_n - \sqrt{2} < 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$*. Il suffit donc de prendre* n_0 *tel que* $2^{n_0} \ln(2) > \ln(4) + 6\ln(10)$*. On voit que* $n_0 = 4$ *convient et il marche aussi pour avoir 15 décimales. Pour avoir* 100 *décimales il suffit de prendre* $n_0 = 8$*. On voit ici l'extraordinaire efficacité de la méthode de Newton. Pour la question des 15 décimales exactes, où le but du jeu est de faire mieux que la calculatrice, il suffit de calculer une expression rationnelle de* u_4*, on trouve* $u_4 = \dfrac{665857}{470832}$ *et on en déduit*

$$\sqrt{2} \simeq 1,4142135625079009\cdots$$

(encore faut-il savoir se servir intelligemment de sa calculatrice !).

Remarques supplémentaires.

1) La méthode de calcul de $\sqrt{a}$ proposée ici est attribuée à Héron d'Alexandrie (vers l'an 0). Elle est très naturelle si on pense au problème géométrique qui consiste à trouver un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle donné, de côtés l et L avec $l < L$. Si on pose $a = lL$ il s'agit de calculer $\sqrt{a}$. On a une première approximation de $\sqrt{a}$: $l < \sqrt{a} < L$. L'idée consiste à remplacer alors $u_0 = L$ par la moyenne de l et L (c'est u_1). On a alors $a/u_1 < \sqrt{a} < u_1$ et on recommence.

2) Comme la suite (u_n) est monotone, la méthode de Newton ne donne pas d'elle même un encadrement de $\sqrt{a}$ (d'où l'importance de la majoration de $u_n - \sqrt{a}$). Si on veut avoir une suite croissante qui approche $\sqrt{a}$ on peut appliquer la méthode des sécantes à partir d'un $u_0 < \sqrt{a}$.

3) La méthode de Héron est liée au développement de $\sqrt{2}$ en fractions continues. Précisément, si (v_n) est la suite des réduites de ce développement définies par

$$v_n = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{2}}}},$$

on a $u_n = v_{2^n-1}$ ce qui explique la rapidité de convergence, puisque dans la suite v_n, qui converge déjà géométriquement vers $\sqrt{2}$, on prend seulement un terme tous les 2^n.

5. Les suites homographiques.

Il s'agit des suites de la forme $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ avec $ad - bc \neq 0$ et, dans un premier temps, $c \neq 0$ (pour éviter le cas affine). Bien entendu on peut les étudier de la manière générale comme on l'a fait au §3). Il y a cependant deux autres aspects intéressants que j'analyse ici :
1) l'étude des valeurs exceptionnelles pour lesquelles la suite n'est pas définie,
2) l'aspect géométrique, que l'on peut rapprocher de l'étude des homographies à coefficients complexes : la fameuse géométrie anallagmatique.

a) Généralités.

On pose $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}\cdot$ La courbe représentative est une hyperbole d'asymptotes $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}\cdot$ Les points fixes de f sont donnés par l'équation du second degré $cx^2 + (d - a)x - b = 0$. Il y a trois cas : deux points fixes réels, un point fixe (double), pas de point fixe réel. Le cas le plus intéressant est le cas de deux points fixes distincts p et q. On montre (cf. *c)* ci-dessous) que les dérivées de f en p et q sont inverses l'une de l'autre, de sorte que si l'un de ces points, disons p, est attractif, l'autre est répulsif. Si (u_n) est bien définie elle converge vers p, sauf si $u_0 = q$. Bien entendu, sur un exemple concret on peut mener l'étude directement comme au §3) ci-dessus.

b) Les valeurs exceptionnelles.

Je propose une rédaction du type suivant (à adapter à un exemple explicite). Je suppose qu'on est dans le cas de deux points fixes p (attractif) et q (répulsif) et qu'on a déjà étudié la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ pour certaines valeurs initiales. On veut préciser les valeurs interdites pour lesquelles la suite n'est pas définie. Il s'agit du pôle de f et de ses antécédents.

1) Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbf{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbf{R} - \{\frac{a}{c}\}$. Calculer l'application réciproque $g = f^{-1}$ (on résoudra en x l'équation $y = \frac{ax+b}{cx+d}$).

2) On considère la suite définie par récurrence par $v_0 = -\frac{d}{c}$ et $v_{n+1} = g(v_n)$. On considère la suite récurrente (u_n) associée à f et de premier terme $u_0 = v_k$. Montrer que u_n n'est pas définie pour $n \geq k$. Montrer, plus précisément, que les seules valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) n'est pas définie sont celles de la suite (v_n).

3) Montrer que la suite (v_n) converge vers q.

Commentaire.
La fonction g, réciproque de f, admet les mêmes points fixes p, q, mais comme la dérivée de g est l'inverse de celle de f, le point attractif est cette fois q, d'où la convergence de (v_n) vers q.

Bien entendu si on consent à travailler sur la droite projective $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ avec un unique point à l'infini et les conventions usuelles : $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$, il n'y a pas de valeurs exceptionnelles, la suite (u_n), si elle passe par le pôle, va à l'infini, en ressort en $\frac{a}{c}$, et continue son petit bonhomme de chemin vers p.

c) L'aspect géométrique.

Pour traiter de la géométrie des homographies il faut travailler en projectif, donc sur $\widehat{\mathbf{R}}$. On ajoute donc un unique point à l'infini noté ∞, avec la justification que les limites de f en $\pm\infty$ sont toutes deux égales à $\frac{a}{c}$. On introduit les conventions évoquées ci-dessus. On ne suppose plus nécessairement $c \neq 0$, ce qui donne droit de cité aux transformations affines qui fixent ∞.
L'exercice suivant est une approche du principe de conjugaison. Il permet de démontrer les faits évoqués en *a)* : l'un des points fixes est attractif, l'autre répulsif, etc.

1) Montrer que la composée de deux homographies en est une autre et que la réciproque d'une homographie est une homographie.

2) Montrer que les homographies qui laissent fixes les points 0 et ∞ sont exactement les homothéties $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$.

3) Soient p et q deux points distincts de $\widehat{\mathbf{R}}$. Montrer qu'il existe une homographie h telle que $h(p) = 0$, $h(q) = \infty$. *(On trouve $h(x) = \frac{x-p}{x-q}$.)*

4) Soit f une homographie admettant p et q comme points fixes. Montrer que $g = hfh^{-1}$ est une homographie qui admet 0 et ∞ comme points fixes [5]. En

[5] Il s'agit là d'un des aspects du principe de conjugaison, que je considère, pour ma part, comme un

déduire que g est une homothétie de rapport λ. Montrer qu'on a, pour tout $x \in \widehat{\mathbf{R}}$:

$$\frac{f(x)-p}{f(x)-q} = \lambda \frac{x-p}{x-q}$$

(on écrira $hf = gh$).

5) En dérivant la relation précédente, montrer qu'on a $\lambda = f'(p)$ et $\dfrac{1}{\lambda} = f'(q)$. En déduire que si l'un des points fixes est attractif, l'autre est répulsif.

d) Compléments.

On peut aussi étudier le cas d'un point fixe unique (f est alors conjuguée d'une translation) celui de deux points fixes imaginaires : il y a des cas périodiques et des cas où la suite (u_n) est dense dans $\mathbf{R}$, etc.

6. Une suite à convergence lente.

Dans ce paragraphe je donne un exemple d'étude du cas difficile $|f'(l)| = 1$. Comme dans le cas de la convergence quadratique l'objectif est de mesurer les différences de rapidité de convergence, et de parvenir, sur un cas particulier à donner une preuve. La difficulté vient du fait qu'on ne dispose plus du théorème des suites croissantes majorées en terminale.

a) Un problème pour les élèves de terminale.

1) Étudier la fonction définie par $f(x) = x - x^2$ et tracer son graphe. Montrer que f admet 0 pour unique point fixe et déterminer $f'(0)$.
2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombre réels définie par une valeur initiale $u_0 \in \mathbf{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
Montrer que la suite (u_n) est toujours décroissante. Est-elle toujours strictement décroissante ?
3) On suppose $u_0 < 0$. Montrer par récurrence sur n qu'on a $u_n \leq -nu_0^2$. En déduire que (u_n) tend vers $-\infty$.
On prend $u_0 = -2$. Montrer par récurrence sur n qu'on a $u_n \leq -2^{2^n}$. À partir de quel entier n a-t'on $u_n < -10^{100}$?
4) On suppose $u_0 > 1$. Étudier (u_n) (on pourra regarder u_1 et utiliser 3)).
5) On suppose $0 < u_0 < 1$.

a) Montrer qu'on a $0 < u_n < 1$. On pose $v_n = 1/u_n$. Montrer que (v_n) vérifie la relation de récurrence

$$v_{n+1} = v_n + \frac{v_n}{v_n - 1} = v_n + 1 + \frac{1}{v_n - 1}.$$

En déduire qu'on a $v_n > n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $0 < u_n < 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Conclusion sur la convergence de la suite (u_n) ?

b) Montrer qu'on a, pour $n \geq 2$, $v_{n+1} - v_n \leq 1 + \dfrac{1}{n-1} \leq 2$. En déduire qu'on a

$$v_n \leq v_2 + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-2} \leq n + v_2 + \ln(n-2)$$

fait géométrique essentiel. Le principe dit que le conjugué d'une transformation géométrique f par h, hfh^{-1}, est une transformation de même nature que f et dont les éléments géométriques, par exemple les points fixes, sont transportés par h.

pour $n \geq 3$, puis qu'on a $v_n \leq 2n$ pour n assez grand et donc $u_n \geq \dfrac{1}{2n}\cdot$ Combien de termes faut-il prendre pour que la différence entre u_n et sa limite soit $< 10^{-6}$?

b) Commentaires.

1) et 2) On a $f'(0) = 1$, donc un point ni attractif, ni répulsif. On notera que (u_n) est décroissante quel que soit u_0 ce qui n'arrive jamais dans les autres cas. La décroissance est stricte sauf si $u_0 = 0$ (suite constante) ou $u_0 = 1$ (suite constante pour $n \geq 1$).
3) La suite tend très vite vers $-\infty$ (dans le cas $u_0 = -2$ on est à -10^{100} en 9 coups). On peut le comprendre aussi en regardant v_n qui, pour $v_0 < 0$ tend vers le point 0 qui est super-attractif (dérivée nulle). Pour montrer que la suite tend vers $-\infty$ il suffit évidemment d'évoquer le théorème des suites décroissantes minorées, mais ce théorème n'est plus au programme de TS.
4) Là encore, le théorème des suites décroissantes minorées donne aussitôt la convergence vers 0. Pour éviter le recours à ce résultat, l'exercice montre que u_n est compris entre $1/n$ et $1/2n$, donc est un $O(1/n)$. En fait, au niveau DEUG on montre assez facilement que u_n est équivalent à $1/n$ (considérer v_n, on voit que $v_{n+1} - v_n$ converge vers 1 et on en déduit que v_n est équivalent à n par Césaro).

7. Le cas chaotique.

Dans ce dernier exemple j'aborde un cas nettement plus compliqué. L'objectif est de montrer une méthode quasiment expérimentale en mathématiques, avec la calculatrice, en essayant de produire des conjectures. Pour les démonstrations, c'est une autre histoire[6]*, voir la bibliographie !*

On se propose d'étudier le comportement d'une suite (u_n) définie par la valeur initiale $u_0 \in \mathbf{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n^2 - 2u_n$.

1) En programmant la calculatrice, calculer une trentaine de valeurs de u_n lorsque u_0 vaut $\frac{1}{2}$, 2, -1. Quelles conjectures pouvez-vous faire sur le comportement des suites obtenues ?

2) Étudier la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x$, tracer son graphe, déterminer ses points fixes et calculer les dérivées de f aux points fixes. Quelles sont les limites (finies) possibles de la suite (u_n) ? Construire graphiquement les premiers termes de la suite dans les cas précédents. Pouvez-vous confirmer, infirmer, préciser les conjectures faites en 1) ? Quelles sont les différentes zones dans lesquelles étudier les valeurs de u_0 ?

3) On suppose $u_0 > 1$. Montrer qu'on a, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - 1 \geq 2(u_n - 1)$. En déduire qu'on a $u_n - 1 \geq 2^n\,(u_0 - 1)$ pour $n \geq 0$. Conclure.

4) On suppose $u_0 < -\frac{1}{3}$. Que peut-on dire de u_1 ? Conclure.

5) On suppose $-\dfrac{1}{3} \leq u_0 \leq 1$.

a) Montrer qu'on a aussi $-\dfrac{1}{3} \leq u_n \leq 1$ pour tout n.

[6] Pour des preuves de certains points, voir le corrigé de l'épreuve sur dossier qui porte sur ce sujet.

b) Montrer que si on a $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ on a $f'(x) \geq 2$. En déduire qu'on a $1 - f(x) \geq 2(1-x)$ pour $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ (on étudiera la fonction $1 - f(x) - 2(1-x)$).

c) On suppose que la suite (u_n) a pour limite 1. En particulier on a $\frac{2}{3} \leq u_n \leq 1$ pour n assez grand, disons $n \geq n_0$. On va montrer par l'absurde que u_{n_0} est égal à 1. On suppose $u_{n_0} \neq 1$. Montrer qu'on a, pour $n \geq n_0$, $1 - u_{n+1} \geq 2(1 - u_n)$, en déduire qu'on a $1 - u_n \geq 2^{n-n_0}(1 - u_{n_0})$ et montrer qu'on aboutit à une contradiction.
Conclure que la suite (u_n) n'admet la limite 1 que si elle est constante et égale à 1 à partir d'un certain rang.

d) Montrer de même que la suite (u_n) n'a pas la limite 0 sauf si elle est constante et égale à 0 à partir d'un certain rang.

e) On dit qu'une valeur de u_0 est exceptionnelle si la suite correspondante converge vers 0 ou 1. Donner des exemples de valeurs exceptionnelles pour lesquels u_n est égal à 1 (ou 0) à partir du rang $0, 1, 2, 3, ...$
On considère les deux fonctions suivantes :

$$g_1(y) = \frac{1 + \sqrt{1+3y}}{3} \qquad \text{et} \qquad g_2(y) = \frac{1 - \sqrt{1+3y}}{3}.$$

Préciser le domaine de définition de ces fonctions. Calculer $f(g_1(y))$ et $f(g_2(y))$. Montrer que les suites définies par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = g_1(v_n)$, $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = g_2(w_n)$, $s_0 = 0$ et $s_{n+1} = g_1(s_n)$, $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = g_2(t_n)$ sont toutes formées de valeurs exceptionnelles. Comment fabriquer encore beaucoup d'autres valeurs exceptionnelles ?
En programmant la calculatrice déterminer une cinquantaine de valeurs exceptionnelles. Formulez une conjecture sur la répartition des valeurs exceptionnelles dans $[-\frac{1}{3}, 1]$.

f) On s'intéresse maintenant aux valeurs de u_0 qui sont telles que la suite soit périodique de période 2, c'est-à-dire telle que l'on ait $u_{2n} = u_0$ et $u_{2n+1} = u_1$ pour tout n et $u_1 \neq u_0$. Montrez que ces valeurs sont les points fixes de la fonction $x \mapsto f(f(x))$ qui ne sont pas les points fixes de x et les déterminer. Un tel point sera dit périodique (de période 2). *On trouve* $\frac{\tau}{3}$ *et* $\frac{1-\tau}{3}$ *où* τ *est le nombre d'or* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Montrer qu'il y a des points u_0 non périodiques qui sont tels que u_1 soit périodique (on parle de points pseudo-périodiques), *par exemple* $\frac{1+\tau}{3}$.

f) On suppose que u_0 n'est pas une valeur exceptionnelle ni un point pseudo-périodique (par exemple $u_0 = \frac{1}{2}$). En demandant une cinquantaine de valeurs à la calculatrice, donnez une conjecture sur le comportement de (u_n) et notamment la répartition des u_n dans l'intervalle $[-\frac{1}{3}, 1]$. Comparer le comportement des suites correspondant à $u_0 = 0,5$ et $u_0 = 0,50000001$.

Commentaires.

Cet exercice est sans doute difficile pour un élève de terminale, mais il pourrait faire un beau sujet de TPE car ce genre de suite modélise des évolutions de populations qui suivent le modèle logistique. Il s'agit des cas où l'accroissement de population est "proportionnel" à la fois à la population, mais aussi à la place restante : $u_{n+1} - u_n = k\, u_n(M - u_n)$, *soit encore* $u_{n+1} = -ku_n^2 + (M+1)u_n$.

Mathématiquement la difficulté est concentrée dans l'intervalle $[-\frac{1}{3}, 1]$*, avec plusieurs centres d'intérêt :*
1) les valeurs qui finissent par tomber sur les points fixes et qui forment un ensemble dénombrable, mais dense dans l'intervalle,
2) les points périodiques (de période quelconque) qui sont eux aussi denses dans l'intervalle, cf. [L] p.215,
3) le comportement de la suite (u_n) *lorsque la valeur initiale n'est ni exceptionnelle, ni pseudo-périodique : on peut montrer qu'elle est dense dans l'intervalle, cf. [D]. Bien entendu ce mot n'est pas au programme de TS, mais la calculatrice montre bien ce dont il est question : des points* u_n *y en a partout !*
4) la sensibilité de (u_n) *aux petites variations de la valeur initiale, cf. 5 f).*

Les conditions 2,3,4 caractérisent ce qu'on appelle un comportement chaotique, cf. [D] p. 50.

Le lecteur qui désirerait en savoir plus sur ce type de suites se reportera au livre de Thierry Lambre [L] ou à celui de Robert Devaney [D]. Ces auteurs étudient les suites associées aux fonctions $f(x) = \mu x(1-x)$*. Le cas étudié ici est de même nature. Précisément, la fonction* $f(x) = 3x^2 - 2x$ *est conjuguée de* $g(x) = 4x(1-x)$ *: on a* $f = hgh^{-1}$ *avec* $h(x) = -\frac{4}{3}x + 1$*, ce qui assure que les suites correspondantes ont le même comportement.*

Références

[D] DEVANEY Robert L., An introduction to chaotic dynamical systems, Benjamin, 1986.

[L] LAMBRE Thierry, L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES, Analyse, Ellipses, 1998.

Voir aussi la bibliographie de [L].

8. Conclusion.

a) Le diagnostic.

On aura compris que le but de ce qui précède est de convaincre le lecteur que les suites récurrentes sont un sujet riche, profond, divers et passionnant. Pourtant, ce qu'en fait notre système scolaire est bien triste et en dégoûterait n'importe qui et il y a là un problème difficile à résoudre et qui relativise l'importance des choix de programmes.

Je pense que la responsabilité du Bac dans cette histoire est essentielle. On se reportera au papier de Gérard Kuntz [K] pour une analyse du rôle du Bac en la matière. Il est d'ailleurs tout à fait probable que si certaines des suggestions que je fais ici étaient retenues elles deviendraient très vite sujets de bachotage comme le reste (par exemple la détermination d'un intervalle stable que je trouve si importante et si intelligente). Qui plus est, dans notre système où l'évaluation pilote tout à tous les niveaux, les mêmes phénomènes se produisent partout : nous souhaitons tous (et moi le premier) la réussite de nos élèves et cela entre souvent en contradiction avec leurs apprentissages. Soumises à un découpage en rondelles presque toutes les questions, si intéressantes soient-elles, deviennent un travail stupide et routinier pour les élèves O.S. que nous formons.

Je dis presque car je suis persuadé que la géométrie (élémentaire : ni vectorielle, ni analytique) échappe largement à ce travers ; il n'est pas si facile de concocter des sujets avec une réussite statistiquement assurée, même après un entraînement spécifique.

b) Le traitement.

On aura compris que je suis très attaché au thème des suites récurrentes et que je souhaite qu'elles restent dans les programmes des lyceés, mais s'il n'est pas possible d'en faire autre chose que ce qu'on en fait actuellement, je vais finir par me rallier à la propositions de certains : il faut les faire disparaître des programmes, comme des objets trop usés par le système, indépendamment de leur intérêt mathématique. Ainsi on pourra peut-être retrouver, chez les élèves et surtout chez les professeurs, avec des sujets plus neufs, un peu de fraîcheur. Toutefois, une façon de ne pas oublier totalement les suites récurrentes est de les garder, avec des problèmes consistants, du côté des TPE (cf. l'exemple des suites chaotiques).