

Exercice 1 Soit V un espace vectoriel réel de dimension 2, et $\{X, Y\}$ une base de V .

1. Montrer que toute application bilinéaire anticommutative sur V définit un crochet de Lie. On appelle $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, l'algèbre de Lie $(V, [\cdot, \cdot])$ où $[X, Y] = Y$.
2. Montrer que toute algèbre de Lie de dimension 2 réelle est soit abélienne, soit isomorphe à $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$.
3. Vérifier que chacune de ces algèbres est isomorphe à l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie. Ce groupe de Lie peut-il être choisi compact ?

Exercice 2 Pour toute algèbre de Lie \mathfrak{g} ,

on définit sa série centrale (C_n) par $C_0 = \mathfrak{g}$ et pour $n \geq 0$, $C_{n+1} = [C_n, \mathfrak{g}]$,

et on dit que \mathfrak{g} est nilpotente s'il existe un $n \geq 0$ tel que $C_n = 0$;

on définit sa série dérivée (D_n) par $D_0 = \mathfrak{g}$ et pour $n \geq 0$, $D_{n+1} = [D_n, D_n]$,

et on dit que \mathfrak{g} est résoluble s'il existe un $n \geq 0$ tel que $D_n = 0$.

Montrer que les groupes suivants sont des groupes de Lie, puis décrire leurs algèbres de Lie respectives (on donnera à chaque fois une base pour laquelle on calculera les crochets de Lie entre éléments de la base). Préciser si celles-ci sont abéliennes, nilpotentes, résolubles.

1. $SL_2(\mathbb{R}) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det x = 1\}$
2. $SU(2) = \{x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{x} x = I_2 \text{ \& } \det x = 1\}$
3. $\text{Heis}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
4. $\text{Sol}(3) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, muni de la structure de variété produit, où $t \in \mathbb{R}$ agit sur \mathbb{R}^2 via la matrice $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$. (On réalisera $\text{Sol}(3)$ comme un sous-groupe plongé de $SL_3(\mathbb{R})$.)

Groupes de Lie classiques

Soient n, p et q des entiers non nuls. On définit, en notant $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité,

$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, et $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, les groupes suivants :

$SL_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}) : \det x = 1\}$	$U(n) = \{x \in GL_n(\mathbb{C}) : {}^t \bar{x} x = I_n\}$
$SL_n(\mathbb{C}) = \{x \in GL_n(\mathbb{C}) : \det x = 1\}$	$SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$
$SL(n, \mathbb{H}) = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : \det x = 1\}$	$SU^*(2n) = \{x \in SL_{2n}(\mathbb{C}) : J_n x = \bar{x} J_n\}$
$O(n) = \{x \in GL_n(\mathbb{R}) : {}^t x x = I_n\}$	$U(p, q) = \{x \in GL_{p+q}(\mathbb{C}) : {}^t \bar{x} I_{p,q} x = I_{p,q}\}$
$SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$	$SU(p, q) = U(p, q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{C})$
$SO^*(2n) = \{x \in SO_{2n}(\mathbb{C}) : {}^t \bar{x} J_n x = J_n\}$	$Sp_n(\mathbb{R}) = \{x \in GL_{2n}(\mathbb{R}) : {}^t x J_n x = J_n\}$
$O(p, q) = \{x \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) : {}^t x I_{p,q} x = I_{p,q}\}$	$Sp_n(\mathbb{C}) = \{x \in GL_{2n}(\mathbb{C}) : {}^t x J_n x = J_n\}$
$SO(p, q) = O(p, q) \cap SL_{p+q}(\mathbb{R})$	$Sp(p, q) = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : {}^t \bar{x} I_{p,q} x = I_{p,q}\}$
$O_n(\mathbb{C}) = \{x \in GL_n(\mathbb{C}) : {}^t x x = I_n\}$	$Sp(n) = \{x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{H}) : {}^t \bar{x} x = I_n\}$
$SO_n(\mathbb{C}) = O_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$	$Sp_*(n) = Sp_n(\mathbb{C}) \cap U(2n)$
$SO(n, \mathbb{H}) = \{x \in SL(n, \mathbb{H}) : \tau_2({}^t x) x = I_n\}$	

On les appelle groupes de Lie classiques et ils sont utiles dans l'exercice suivant.

Exercice 3 *Isomorphismes* $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathfrak{so}(1, 2)$.

Les définitions des groupes de Lie classiques sont rappelées plus haut.

- Vérifier que $SU(2)$ est constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.
En déduire que $SU(2)$ est difféomorphe à une variété de dimension 3 bien connue.
- Montrer que $E_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de son algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$.
Expliciter les relations de crochet entre E_1 , E_2 et E_3 .

Sur $\mathfrak{su}(2)$, on considère la forme quadratique $Q(M) = \det(M)$.

- Soit $\varphi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnant les coordonnées de $U \in \mathfrak{su}(2)$ dans la base $\{2E_1, 2E_2, 2E_3\}$.
À quelle forme quadratique sur \mathbb{R}^3 correspond Q via φ ?
- En déduire que la représentation adjointe définit naturellement un morphisme $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$.
- Montrer que ρ est une submersion, puis que c'est un morphisme surjectif.
Quel est son noyau?
- Déduire de ce qui précède que $SO(3)$ est difféomorphe à une variété de dimension 3 bien connue et que $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{so}(3)$ sont isomorphes.

On pose $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que H , E et F forment une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
Expliciter les relations de crochet entre H , E , F .

Étant donnée une algèbre de Lie réelle \mathfrak{g} de dimension finie, sa forme de Killing est la forme bilinéaire symétrique $B_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $B_{\mathfrak{g}}(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$.

- Montrer qu'un isomorphisme d'algèbres de Lie envoie forme de Killing sur forme de Killing.
- On note B la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.
Déterminer la matrice de B dans la base E, H, F .
Quelle est sa signature?
- Déterminer la signature de la forme de Killing de $\mathfrak{su}(2)$.
En déduire que les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.
- Adapter ce qui a été fait ci-dessus et montrer que les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{so}(1, 2)$ sont isomorphes.