

TOPOLOGIE DE LA DROITE REELLE

P. Pansu

16 mai 2005

1 Qu'est-ce que la topologie ?

C'est l'étude des propriétés des objets qui sont conservées par déformation continue.
Belle phrase, mais qui nécessite d'être précisée.

1.1 Rappels

Définition 1 Une partie $U \subset \mathbf{R}$ est dite ouverte si pour tout $x \in U$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$. Une partie $F \subset \mathbf{R}$ est dite fermée si son complémentaire $U = \mathbf{R} \setminus F$ est ouvert.

Exemple 2 Un intervalle ouvert, comme $]a, b[,]a, +\infty[,] - \infty, b[,] - \infty, +\infty[$, est ouvert.
Un intervalle fermé, comme $\{a\}$, $[a, b]$, $[a, +\infty]$, $] - \infty, b]$, $] - \infty, +\infty]$, est fermé.
Exemples extrêmes : \emptyset et \mathbf{R} sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 3 La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts, l'intersection d'un nombre fini d'ouverts, sont ouvertes.

La réunion d'un nombre fini de fermés, l'intersection d'un nombre quelconque de fermés, sont fermés.

Proposition 4 Une partie F de \mathbf{R} est fermée si et seulement si pour toute suite convergente de points $x_n \in F$, la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ appartient à F .

Proposition 5 Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est continue si et seulement si pour tout ouvert U de \mathbf{R} , $f^{-1}(U)$ est ouvert.

On aimerait une caractérisation analogue des fonctions continues sur un intervalle, ou plus généralement sur un sous-ensemble de \mathbf{R} .

1.2 Ouverts et fermés relatifs

Définition 6 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Une partie $A \subset E$ est dite ouverte dans E si pour tout $x \in A$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap E \subset A$. Une partie $B \subset E$ est dite fermée dans E si son complémentaire $A = E \setminus B$ est ouvert dans E .

Exemple 7 Soit $E =]0, 1[$ et $A =]0, 1[$, $B =]0, 1/2[$, $C =]1/2, 1[$, $D =]0, 1/2]$. Alors A et B sont des ouverts de E , et C et D sont des fermés de E .

Exemples extrêmes : E et \emptyset sont à la fois ouverts et fermés dans E .

Remarquer que A est un ouvert de \mathbf{R} et D est un fermé de \mathbf{R} . Ils sont a fortiori ouvert (resp. fermé) dans E . En revanche, B et C ne sont ni ouverts, ni fermés dans \mathbf{R} .

Proposition 8 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} .

Une partie $A \subset E$ est ouverte (resp. fermée) dans E si et seulement si il existe un ouvert U (resp. un fermé F) de \mathbf{R} tel que $A = E \cap U$ (resp. $A = E \cap F$).

Une partie $A \subset E$ est fermée dans E si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A convergeant vers un point x de E , $x \in A$.

Preuve. Si U est un ouvert de \mathbf{R} , $U \cap E$ est un ouvert de E . En effet, si $x \in U \cap E$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$. Alors $]x - \epsilon, x + \epsilon[\cap E \subset U \cap E$.

Réciproquement, soit A un ouvert de E . A chaque $x \in A$ correspond un intervalle ouvert $I_x =]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[$ tel que $I_x \cap E \subset A$. Posons $U = \bigcup_{x \in A} I_x$. C'est une réunion d'ouverts de \mathbf{R} , donc c'est un ouvert de \mathbf{R} . Par construction, $A = U \cap E$.

Le cas des fermés se déduit de celui des ouverts (passer au complémentaire).

Soit A un fermé de E , $A = F \cap E$ où F est fermé dans \mathbf{R} . Si (x_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers un point x de E , alors $x \in F$ (proposition 4), donc $x \in A$.

Inversement, supposons que $A \subset F$ n'est pas fermé. Alors $B = E \setminus A$ n'est pas un ouvert de E . Autrement dit, il existe un point $y \in B$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un point $x \in]y - \epsilon, y + \epsilon[\cap E$ qui n'appartient pas à B . On applique cette propriété pour $\epsilon = 1/n$. On trouve un point $x_n \in E \setminus B = A$ tel que $|x_n - y| < 1/n$. On a donc trouvé une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers un point y de E qui n'appartient pas à A . C'est la contraposée de la propriété de l'énoncé. ■

Définition 9 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Soit $A \subset E$ et $x_0 \in E$. On dit que A est un voisinage de x_0 dans E s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\cap E \subset A$.

Exemple 10 $A \subset E$ est ouvert dans E si et seulement si A est un voisinage de chacun de ses points. Par exemple, si $E = \{0\} \cup [1, 2[$, alors $\{0\}$ est un voisinage de 0 dans E , c'est un ouvert de E .

1.3 Fonctions continues sur un sous-ensemble de \mathbf{R}

Définition 11 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est continue sur E si pour tout $x_0 \in E$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in E, |x - x_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Remarque 12 Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ est continue si et seulement si elle est continue au sens usuel : continue en chaque point intérieur, continue à droite (resp. à gauche) aux bornes lorsqu'elles appartiennent à I .

Exemple 13 Soit $E = [0, 1[$. La fonction f définie sur E par $f(x) = \frac{1}{x-1}$ est continue sur E . La fonction g définie sur E par $g(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$ et $g(0) = 0$ n'est pas continue sur E . En revanche, les restrictions de ces fonctions à $E' = \{0\} \cup [1/2, 1[$ sont continues. Si E est un ensemble fini de points de \mathbf{R} , toute fonction sur E est continue. Si $E = \mathbf{Z}$, toute fonction sur E est continue.

Proposition 14 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Une fonction $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ est continue si et seulement si pour tout ouvert U de E , $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E .

Preuve. Supposons f continue sur E . Soit U un ouvert de \mathbf{R} . Soit $x_0 \in f^{-1}(U)$, autrement dit, $x_0 \in E$ et $y = f(x_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $]y - \epsilon, y + \epsilon[\subset U$. Par continuité de f , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in E, |x - x_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Alors $f(E \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[) \subset U$, donc $E \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset f^{-1}(U)$. Ceci prouve que $f^{-1}(U)$ est ouvert.

Inversement, soit $x_0 \in E$ et $\epsilon > 0$. L'intervalle $]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$ est un ouvert de \mathbf{R} . Alors $f^{-1}(]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[)$ est ouvert. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $E \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset f^{-1}(]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[)$. Si $x \in E$ et $|x - x_0| < \alpha$, alors $f(x) \in]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$, donc $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Ceci prouve que f est continue en x_0 . ■

Exercice 15 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie sur E . Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $x \in E$ et pour toute suite (x_n) de points de E convergant vers x , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Solution de l'exercice 15. *Continuité et suites.*

Sens direct. Supposons f continue sur E . Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge vers $x_0 \in E$. Fixons $\epsilon > 0$. Par continuité de f , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x \in E, |x - x_0| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Comme (x_n) converge vers x_0 , il existe N tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_n - x_0| < \alpha.$$

Comme $x_n \in E$, pour $n \geq N$, $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$. Ceci prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Inversement, supposons que f n'est pas continue sur E . Alors il existe un point $x_0 \in E$ et un $\epsilon > 0$ tels que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in E$ tel que $|x - x_0| < \alpha$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon$. On utilise cet énoncé pour chaque $\alpha = 1/n$. On trouve, pour chaque n , un point $x_n \in E$ tel que $|x_n - x_0| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Alors la suite $f(x_n)$, qui ne s'approche pas de $f(x_0)$, ne converge pas vers $f(x_0)$.

1.4 Objectif

On voit que les notions comme la continuité, la convergence de suites, les voisinages, les ouverts, les fermés, ont un sens pour un sous-ensemble de \mathbf{R} . Ils constituent le vocabulaire de la topologie. L'objet de la suite de ce chapitre et de se familiariser avec les sous-ensembles de \mathbf{R} , en accumulant des exemples instructifs d'ouverts, de fermés, de suites, de fonctions.

2 Connexité

2.1 Peut-on être ouvert et fermé ?

Exemple 16 Soit $E = \mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Soit $A =]-\infty, 0[$. Alors A est à la fois ouvert et fermé.

En effet, A est ouvert dans \mathbf{R} donc *a fortiori* dans E . Pour la même raison, son complémentaire $B = E \setminus A =]0, +\infty[$ est ouvert dans E , donc A est fermé dans E .

Exercice 17 Soit E un sous-ensemble de \mathbf{R} . On suppose qu'il existe trois réels $a < c < b$ tels que $a \in E$, $b \in E$ mais $c \notin E$. Montrer qu'il existe une partie $A \subseteq E$ qui est à la fois ouverte et fermée, mais qui n'est ni vide ni égale à E .

Solution de l'exercice 17. *Ouverts et fermés à la fois.*

On pose $A = E \cap]-\infty, c[$ et $B = E \cap]c, +\infty[$. Alors A et B sont ouverts dans E et sont complémentaires l'un de l'autre (car $c \notin E$), donc ils sont aussi fermés dans E . Par hypothèse, $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$, donc $A \neq E$.

Définition 18 On dit qu'une partie E de \mathbf{R} est connexe si on ne peut pas la diviser en deux ouverts disjoints et non vides.

Autrement dit, E est non connexe s'il existe A non vide et distinct de E , tel que A soit à la fois ouvert et fermé dans E .

Proposition 19 Un sous-ensemble de \mathbf{R} est connexe si et seulement si c'est un intervalle.

Preuve. D'après l'exercice 17, un sous ensemble connexe E de \mathbf{R} a la propriété suivante : pour tous $a, b \in E$, $]a, b[\subseteq E$. Autrement dit, il est *convexe*. D'après la Proposition 21 du chapitre sur la borne supérieure, c'est un intervalle.

Inversement, soit I un intervalle. Soient A et B des parties non vides de I , disjointes, telles que $A \cup B = I$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Quitte à échanger A et B , on peut supposer que $a < b$. On

considère $c = \sup\{x \in A \mid x < b\}$. Comme $a \leq c \leq b$, $c \in I$. De l'une des caractérisation de la borne supérieure (Proposition 15 du chapitre sur la borne supérieure), il résulte qu'il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers c . D'autre part, ou bien $c = b \in B$, ou bien l'intervalle $]c, b[$ est entièrement contenu dans B . Dans les deux cas, il existe une suite (y_n) de points de B qui converge vers c . Par conséquent, l'un des ensembles A et B n'est pas fermé (Proposition 8). ■

2.2 Connexité et valeurs intermédiaires

Voici une seconde preuve de la connexité des intervalles. Soit I un intervalle. Supposons par l'absurde que $I = A \cup B$ où A et B sont deux ouverts non vides de I . Définissons une fonction f sur I en posant $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$. Alors f est continue sur I . En effet, la continuité en x_0 ne dépend que des valeurs de la fonction au voisinage de x_0 . Si $x_0 \in A$, $f = 0$ au voisinage de x_0 , car A est ouvert, donc c'est un voisinage de x_0 . Si $x_0 \in B$, $f = 1$ au voisinage de x_0 car B est ouvert. Or f ne prend que les valeurs 0 et 1, cela contredit le théorème des valeurs intermédiaires.

3 Description des ouverts

3.1 Des exemples

Toute réunion d'intervalles ouverts est un ouvert. On peut par exemple prendre une réunion finie d'intervalles ouverts disjoints, comme

$$U_1 = \{x \in \mathbf{R} \mid x(x^2 - 1)(x^2 - 4) > 0\} =]-2, -1[\cup]0, 1[\cup]2, +\infty[,$$

où une réunion infinie comme

$$U_2 = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos(2\pi x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}[.$$

On peut prendre des intervalles de plus en plus petits, comme

$$U_3 = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]k - 3^{-|k|-1}, k + 3^{-|k|-1}[.$$

Bien qu'il y ait une infinité d'intervalles, la longueur totale de U_3 vaut

$$2 \sum_{k \in \mathbf{Z}} 3^{-|k|-1} = \frac{2}{3} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k-1} = 1.$$

Pour obtenir une famille d'intervalles ouverts disjoints qui contient tous les demi-entiers, il suffit d'adjoindre à U_3 l'ensemble

$$V_3 = \bigcup_{k \in \mathbf{N}}]k + \frac{1}{2} - 3^{-|k|-2}, k + \frac{1}{2} + 3^{-|k|-2}[$$

et son symétrique par rapport à l'origine. Leur longueur totale n'excède pas $\frac{2}{9}$.

Pour couvrir tous les rationnels dont le dénominateur est 4, il faut encore ajouter

$$V_4 = \bigcup_{k \geq 1}]\frac{k}{2} + \frac{1}{4} - 3^{-|k|-3}, \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + 3^{-|k|-3}[$$

et son symétrique par rapport à l'origine. Leur longueur totale n'excède pas $\frac{2}{27}$. A l'étape suivante, il faut se méfier, car $1/8$ et $3/8$ sont déjà couverts par un intervalle de U_3 .

Ca se complique vite, mais on conçoit qu'on puisse fabriquer une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints qui contiennent tous les nombres rationnels dont le dénominateur est une

puissance de 2, mais dont la longueur totale reste finie. Pourtant, le complémentaire de la réunion de ces intervalles ne contient aucun intervalle !

Question. Peut-on construire une réunion d'intervalles disjoints qui contient tous les rationnels, mais dont la longueur totale reste finie ?

3.2 Composantes

L'ouvert U_1 est formé de 3 morceaux, et chacun est un intervalle. Comment, dans un ouvert quelconque, reconnaître les morceaux ?

Définition 20 Soit U un ouvert de \mathbf{R} , et $x \in U$. On appelle composante de x dans U la réunion de tous les intervalles ouverts contenant x et contenus dans U .

Exemple 21 Dans l'ouvert U_1 , la composante de $1/2$ est $]0, 1[$.

Proposition 22 Soit U un ouvert de \mathbf{R} . Alors U est la réunion d'une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$, en nombre fini ou infini.

Preuve. Etant donné, $x \in U$, notons C_x la composante de x dans U . C'est un intervalle ouvert. En effet, si y et z sont des points de C_x , avec $y < z$, alors $[y, z] \subset C_x$. En effet, la réunion de deux intervalles contenant x est un intervalle contenant x . Or il existe des intervalles I contenant x et y et J contenant x et z qui sont contenus dans U . Alors $I \cup J$ est un intervalle contenant x et contenu dans U , donc contenu dans C_x . Comme il contient y et z , il contient $[y, z]$. Autrement dit, C_x est convexe, c'est donc un intervalle. D'autre part, C_x est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. Autrement dit, C_x est le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans U .

Si $x \in U$ et $y \in C_x$, alors $x \in C_y$. En effet,

$$y \in C_x \Leftrightarrow \text{il existe un intervalle } I \text{ contenant } x \text{ et } y \text{ et contenu dans } U \Leftrightarrow x \in C_y,$$

par symétrie. Comme C_x est le plus grand intervalle ouvert contenant x et contenu dans U , et comme C_y est un intervalle ouvert contenant x et contenu dans U , $C_y \subset C_x$. Par symétrie, $C_x = C_y$.

Si $x, y \in U$ et si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, alors $C_x = C_y$. En effet, si $z \in C_x \cap C_y$, alors $C_z = C_x$ et $C_z = C_y$.

On conclut que les composantes des éléments de U forment une famille d'intervalles deux à deux disjoints, et dont la réunion est U , ce sont les composantes de U . Dans chaque composante, on peut choisir un nombre rationnel. On peut donc numéroter les composantes par un sous-ensemble A de \mathbf{Q} . Comme \mathbf{Q} est dénombrable, A l'est aussi. Ou bien A est fini, ou bien il peut être numéroté par les entiers. ■

Corollaire 23 Soit $\epsilon > 0$. Il existe une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints U_k , $k = 1, 2, \dots$ telle que

- Tout nombre rationnel est contenu dans l'un des U_k .
- La longueur totale $\sum_{k=1}^{\infty} \text{long}(U_k) < \epsilon$.

Preuve. Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Etant donnés deux entiers $p \in \mathbf{Z}$ et $q \geq 1$, soit $I_{p,q} =]\frac{p}{q} - u_{|p|}u_q, \frac{p}{q} + u_{|p|}u_q[$. Alors $I_{p,q}$ est un intervalle ouvert de longueur $2u_{|p|}u_q$. Soit $U = \bigcup_{p \in \mathbf{Z}, q \geq 1} I_{p,q}$. Alors U est un ouvert de \mathbf{R} qui contient tous les rationnels. La somme des longueurs des intervalles $I_{p,q}$ vaut

$$\sum_{p \in \mathbf{Z}, q \geq 1} 2u_{|p|}u_q \leq 4 \sum_{p \geq 0, q \geq 0} u_p u_q = 4 \left(\sum_{p \in \mathbf{N}} u_p \right)^2.$$

D'après la proposition 22, U est la réunion d'une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints U_k . Montrons que la somme des longueurs des U_k vaut au plus $4(\sum_{p \in \mathbf{N}} u_p)^2$. Pour chaque k , notons $J_k = \{(p, q) \mid I_{p,q} \subset U_k\}$. Alors chaque couple (p, q) avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \geq 1$ appartient à un et

un seul des J_k . En effet, comme $I_{p,q}$ est un intervalle ouvert contenu dans U , il rencontre une et une seule composante, dans laquelle il est entièrement contenu. Remarquons que $U_k = \bigcup_{(p,q) \in J_k} I_{p,q}$, donc

$$\text{long}(U_k) \leq \sum_{(p,q) \in J_k} 2u_{|p|}u_q,$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \text{long}(U_k) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{(p,q) \in J_k} 2u_{|p|}u_q \\ &= \sum_{p \in \mathbf{Z}, q \geq 1} 2u_{|p|}u_q \\ &\leq 4 \left(\sum_{p \in \mathbf{N}} u_p \right)^2. \end{aligned}$$

On choisit $u_n = \epsilon^{1/2} 2^{-n-2}$, de sorte que $\sum_{p \in \mathbf{N}} u_p = \frac{1}{2} \epsilon^{1/2}$. ■

3.3 Homéomorphismes

Définition 24 Soient E et E' deux sous-ensembles de \mathbf{R} . Un homéomorphisme de E sur E' est une fonction bijective $f : E \rightarrow E'$ telle que f et f^{-1} soient continues. S'il existe un homéomorphisme de E sur E' , on dit que E et E' sont homéomorphes.

Exemple 25 La fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = 1/x$ est un homéomorphisme de $]0, 1[$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice 26 Montrer que deux intervalles ouverts sont toujours homéomorphes. Montrer que deux intervalles fermés bornés de longueurs non nulles sont toujours homéomorphes.

Solution de l'exercice 26. Intervalles homéomorphes.

Soit $I =]a, b[$ (resp. $] - \infty, b[$, resp. $]a, +\infty[$) un intervalle ouvert. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{ae^{-x} + be^x}{e^{-x} + e^x}$ (resp. $b - e^x$, resp. $a + e^x$). Alors f est un homéomorphisme de \mathbf{R} sur I . En effet, f est continue et f^{-1} , donnée par la formule

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{y-a}{b-y}\right), \quad \text{resp. } f^{-1}(y) = -\ln(b-y), \quad \text{resp. } f^{-1}(y) = \ln(y-a),$$

est continue.

Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = a(1-x) + bx$. Alors f est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur I . En effet, f est continue et f^{-1} , donnée par la formule $f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$, est continue.

Exercice 27 Montrer que si un sous-ensemble E de \mathbf{R} est homéomorphe à un intervalle ouvert, alors E est lui-même un intervalle ouvert.

Solution de l'exercice 27. Ensembles homéomorphes à un intervalle ouvert.

Soit $f :]0, 1[\rightarrow E$ un homéomorphisme. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $E = f(]0, 1[)$ est un intervalle. Supposons que E est un intervalle fermé borné. D'après le théorème de la borne atteinte appliqué à f^{-1} , $]0, 1[= f^{-1}(E)$ est fermé borné, contradiction. Supposons que E est semi-fermé, de la forme $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$. Alors $]0, 1[\setminus \{f^{-1}(a)\}$ est homéomorphe à l'intérieur de E donc est connexe, cela contredit l'exercice 17. On conclut que E est un intervalle ouvert.

Théorème 1 Deux ouverts de \mathbf{R} sont homéomorphes si et seulement si ils ont le même nombre (fini ou infini) de composantes.

Preuve. Soient U et V des ouverts de \mathbf{R} . Soit $f : U \rightarrow V$ un homéomorphisme. Alors f envoie chaque composante de U sur une composante de V . En effet, d'après l'exercice 27, si C_x est une composante de U , $f(C_x)$ est un intervalle ouvert contenu dans V , donc $f(C_x) \subset C_{f(x)}$. De même, $f^{-1}(C_{f(x)}) \subset C_x$, donc $f(C_x) = C_{f(x)}$. Comme f est bijective, si U a n composantes, V en a n aussi. Si U a une infinité de composantes, V en a aussi une infinité.

Réciproquement, soient U et V des ouverts ayant le même nombre n de composantes. Numérotions les composantes de U et de V : on obtient des intervalles ouverts $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$. D'après l'exercice 26, il existe un homéomorphisme $f_i : U_i \rightarrow V_i$. La fonction obtenue en juxtaposant les f_i est un homéomorphisme de U sur V .

Soient U et V des ouverts ayant chacun une infinité de composantes. On peut numéroter les composantes de U par des entiers, $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$, et de même pour les composantes de V , $V_1, V_2, \dots, V_k, \dots$. De nouveau, on juxtapose des homéomorphismes $f_i : U_i \rightarrow V_i$. L'application f obtenue est un homéomorphisme de U sur V . En effet, la continuité de f en un point x de $\bigcup U_i$ ne dépend que des valeurs de f au voisinage de x . Or la composante $U_i = C_x$ est un tel voisinage, sur lequel $f = f_i$, donc f est continue. Le même argument s'applique à la réciproque f^{-1} . ■

4 Un exemple de compact : l'ensemble de Cantor

Soit F un fermé de \mathbf{R} . Son complémentaire est la réunion d'une famille dénombrable d'intervalles $]a_n, b_n[$ deux à deux disjoints. Supposons que F ne contienne aucun intervalle ouvert. On a l'impression que $F = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ est dénombrable. Il n'en est rien. L'objet de cette section est de présenter un contre-exemple.

4.1 Définition

On part de l'intervalle $C_0 = [0, 1]$. On lui retire son tiers du milieu. On obtient $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. On recommence : on retire à chacun des deux intervalles constituant C_1 son tiers du milieu. On obtient $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Et on recommence...

On peut définir les ensembles C_n , réunions de 2^n intervalles fermés de même longueur, par récurrence sur n : C_{n+1} s'obtient en retirant son tiers du milieu à chacun des intervalles constituant C_n .

Définition 28 On appelle ensemble de Cantor l'ensemble

$$C = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} C_n.$$

4.2 Lien avec le développement en base 3

Le lemme suivant rappelle des propriétés du développement en base 3.

Lemme 29 Tout réel positif ou nul x peut s'écrire sous la forme

$$x = 3^m b_m + 3^{m-1} b_{m-1} + \dots + b_0 + 3^{-1} a_1 + 3^{-2} a_2 + \dots,$$

où les b_i et les a_j prennent les valeurs 0, 1 ou 2. Cette écriture est unique sauf pour l'ensemble (dénombrable) des rationnels dont le dénominateur est une puissance de 3. Un tel nombre possède exactement deux développements en base 3, l'un (qu'on baptise premier développement de x) pour lequel $a_n \neq 2$, $2 = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$, l'autre qui ne diffère du premier qu'à partir du n -ème chiffre après la virgule, avec a_n remplacé par $a_n + 1$ et $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$.

Preuve. Exactement comme pour la base 10. ■

On peut décrire directement les ensembles C_n , grâce au développement en base 3 : C_n s'obtient en gardant certains intervalles de la subdivision de $[0, 1]$ en 3^n intervalles égaux. Si x est l'origine d'un intervalle de C_{n+1} , alors

- ou bien $x = y + 0.3^{-n-1}$ est déjà l'origine d'un intervalle de C_{n+1} ,
- ou bien $x = y + 2.3^{-n-1}$ où y est l'origine d'un intervalle de C_{n+1} .

Par conséquent, un réel x est l'origine d'un intervalle de C_n si et seulement si il est de la forme $m3^{-n}$ où m est un entier qui s'écrit en base 3 sous la forme $m = b_0 + 3b_1 + 3^2b_2 + \dots + 3^{n-1}b_{n-1}$, et les b_i valent 0 ou 2 mais jamais 1. Autrement dit, x s'écrit $x = 0.b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$ en base 3, avec $b_i \neq 1$ et $b_0 = 2$.

Lemme 30 C_n est l'ensemble des réels $x \in [0, 1]$ tels que dans au moins un des développements de x en base 3, les n premiers chiffres après la virgule sont différents de 1.

C est l'ensemble des réels compris entre 0 et 1 dont au moins un développement en base 3 ne comporte pas de 1, seulement des 0 et des 2.

Exemple 31 Par exemple, $1 = 0.222\dots$, $1/3 = 0.1000\dots = 0.0222\dots$ et $2/3 = 0.1222\dots = 0.2000\dots$ sont des éléments de A , mais pas $4/9 = 0.10222\dots = 0.11000\dots$

Preuve. Un réel x appartient à C_n si et seulement si il est compris entre un réel de la forme $y = 0.b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$ et $y + 3^{-n}$, avec $b_i \neq 1$ et $b_0 = 2$. Autrement dit, si $x \neq y + 3^{-n}$, le second développement en base 3 de x commence par $0.b_{n-1}b_{n-2}\dots b_0$, avec $b_i \neq 1$. Si $x = y + 3^{-n}$, alors le premier développement en base 3 de x est $0.b_{n-1}b_{n-2}\dots b_02222\dots$, avec $b_i \neq 1$.

Soit $x \in [0, 1]$ un nombre qui n'est pas un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 3. Soit $x = 0.a_1a_2\dots$ son unique développement en base 3. Alors $x \in C_n$ si et seulement si les n premiers chiffres a_1, \dots, a_n sont différents de 1. $x \in C$ si et seulement si ceci est vrai pour tout n , i.e. tous les chiffres a_i sont différents de 1.

Enfin, soit $x \in [0, 1]$ un rationnel dont le dénominateur est une puissance de 3. Si son premier développement $x = a_1a_2\dots a_m22222\dots$ ne comporte pas de 1, alors x est l'extrémité (droite) d'un intervalle de C_n pour tout $n > m$, donc $x \in C$. Si son second développement $x = a_1a_2\dots a_m00000\dots$ ne comporte pas de 1, alors x est l'origine d'un intervalle de C_n pour tout $n > m$, donc $x \in C$. Réciproquement, si aucun des deux développements de x n'est sans 1, alors le second développement de x comporte un 1 à la n -ème place qui n'est pas suivi d'une infinité de 0, et x est contenu dans un tiers du milieu d'intervalle retiré de C_{n-1} pour obtenir C_n , donc $x \notin C$. ■

4.3 Propriétés immédiates

1. C est fermé (car c'est une intersection de fermés).
2. C est borné (il est contenu dans $[0, 1]$).
3. C est compact (résulte des deux propriétés précédentes).
4. C est non dénombrable.

Le dernier point résulte du lemme 30, voir la preuve du théorème de Cantor sur la non dénombrabilité de \mathbf{R} .

4.4 Intérieur

Définition 32 Soit $A \subset \mathbf{R}$. L'intérieur de A est l'ensemble des points $x \in A$ tels que A soit un voisinage de x . Autrement dit, x est un point intérieur de A s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset A$.

Exemple 33 Un ensemble A est ouvert si et seulement si l'intérieur de A , c'est A tout entier. L'intérieur de $[0, 1]$ est $]0, 1[$.

Lemme 34 L'ensemble de Cantor C est d'intérieur vide.

Preuve. Par l'absurde. Soit $x = 0.a_1a_2\dots$ un point intérieur de C . Soit n tel que $]x, x + 3^{-n}[\subset A$. Alors $y = 0.a_1a_2\dots a_n11111\dots < x + 3^{-n}$, donc $y \in A$. Or y possède un seul développement, qui comporte des 1, contradiction. ■

4.5 Longueur

Lemme 35 Soit $U = [0, 1] \setminus C$. Alors la longueur de U (longueur cumulée des intervalles disjoints composant U) vaut 1.

Preuve. Soit ℓ_n la longueur de $U_n = [0, 1] \setminus C_n$. Comme C_n comporte 2^n intervalles de longueur 3^{-n} , $\ell_n = 1 - (\frac{2}{3})^n$ tend vers 1. L'ouvert U_n est composé de $2^n - 1$ intervalles. U_{n+1} s'obtient en ajoutant à U_n des intervalles disjoints entre eux et disjoints de U_n . Or U est la réunion croissante des U_n , donc l'ensemble de ses composantes et la réunion des ensembles de composantes des U_n . Par conséquent, sa longueur totale est $\lim \ell_n = 1$. ■

4.6 Points isolés, points d'accumulation

Définition 36 Soit $A \subset \mathbf{R}$. Un point a de A est dit isolé s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]a - \epsilon, a + \epsilon[\cap A = \{a\}$. Un point qui n'est pas isolé est appelé point d'accumulation de A .

Exemple 37 Si A est un ensemble fini, alors tout point de A est isolé. Soit $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$. Alors tout point de B est isolé. En revanche, dans $A = \{0\} \cup B$, les points de B sont isolés mais 0 ne l'est pas.

Lemme 38 Tout point de C est un point d'accumulation.

Preuve. Soit x un point de A , soit $x = 0.a_1a_2\dots$ un développement en base 3 de x qui ne comporte pas de 1. Si les a_i ne valent pas tous 0 à partir d'un certain rang. Par conséquent, la suite a_i prend une infinité de fois la valeur 2, en des places notées $\phi(n)$, $n \in \mathbf{N}$. Soit x_n le nombre obtenu en remplaçant $a_{\phi(n)}$ par 0. Si tous les a_i sont différents de 1, alors $x_n \in A$, les x_n sont tous distincts et convergent vers x , donc x n'est pas isolé dans A . Sinon, les a_i ne valent pas tous 2 à partir d'un certain rang, on peut donc approcher x par des points de A obtenus en changeant un 0 en 2 de plus en plus loin dans le développement. ■