THEOREMES D'ANALYSE

P. Pansu

12 avril 2005

1 Valeurs intermédiaires

1.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1 *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Preuve. Posons $A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) \leq 0\}$. Il est non vide est majoré par b, donc il possède une borne supérieure c.

Montrons que $c < b$. Posons $\epsilon = f(b)$. Par continuïté à gauche en b, il existe $\alpha > 0$ tel

$$b - \alpha < x \leq b \Rightarrow |f(x) - f(b)| < \epsilon.$$

Si $x > b - \alpha$, $f(x) > f(b) - \epsilon = 0$, donc $c \leq b - \alpha$.

Montrons que $f(c) \geq 0$. Par définition de A, pour tout $x \in]c,b]$, $f(x) > 0$. En passant à la limite, on trouve que $f(c) \geq 0$. Cela prouve en particulier que $c > a$.

Montrons que $f(c) \leq 0$. Comme c est une borne supérieure, il existe une suite x_n d'éléments de A telle que x_n tend vers c. Par définition de A, $f(x_n) \leq 0$. Par continuïté,

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0.$$

On conclut que $f(c) = 0$. ∎

Remarque 1 *Si f prend, au sens large, des signes opposés aux extrémités, f s'annule quelque part dans $[a,b]$.*

En effet, si f s'annule à l'une des extrémités, il n'y a rien à prouver. Sinon, f ou $-f$ satisfait les hypothèses du théorème.

Exercice 2 *Soit $[a,b] = [0,3]$. On définit une fonction f sur $[a,b]$ comme suit.*

$$\begin{cases} f(x) &= x & \text{pour } x \in [0,1], \\ f(x) &= 1 & \text{pour } x \in [1,2], \\ f(x) &= x-1 & \text{pour } x \in [2,3]. \end{cases}$$

Vérifier que f est continue. Laquelle, parmi les solutions de l'équation $f(x) = 0$, la preuve ci-dessus produit-elle ? Dans la preuve, remplaçons A par $B = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) < 0\}$. Que faut-il changer d'autre dans la preuve ? Laquelle, parmi les solutions de l'équation $f(x) = 0$, la nouvelle preuve produit-elle ?

Solution de l'exercice 2. *Plusieurs racines.*

f est continue sur chacun des intervalles $[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, et les valeurs en 1 et 2 sont compatibles, donc f est continue sur $[0,3]$.

Pour ce choix de f, $A = [0,2]$ et $B = [0,1]$, donc la preuve du théorème donne $c = 2$. La preuve n'a pas besoin d'autre modification que le changement de définition $A \to B$. Elle donne $c = 1$.

1.2 Interprétation géométrique

Voici une formulation équivalente du théorème des valeurs intermédiaires. On rappelle que si E est un ensemble et $f : E \to \mathbf{R}$ une application, son image $f(E) = \{f(t) \,|\, t \in E\}$ est l'ensemble des valeurs prises par $f(t)$ lorsque t décrit E.

Théorème 2 *Soit I un intervalle non vide, $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Preuve. Du théorème 1, il résulte que si $c < d$ appartiennent à $f(I)$, alors $[c, d] \subset f(I)$. Autrement dit, $f(I)$ est convexe. C'est donc un intervalle. ∎

Exercice 3 *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ une fonction continue. On suppose que $\lim_{t\to a+} f(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to b-} f(t) = +\infty$. Montrer que f est surjective.*

Solution de l'exercice 3. *Fonctions définies sur un intervalle ouvert.*

Par définition de la limite, $f(I)$ n'est ni majoré ni minoré. Le seul intervalle qui ait cette propriété, c'est $\mathbf{R}$ entier. Par conséquent, $f(I) = \mathbf{R}$, donc f est surjective.

Fin du cours n^{0}2

Exercice 4 *Construire une fonction non continue $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telle que, pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$, $f(I)$ est un intervalle.*

Solution de l'exercice 4. *Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires.*

La fonction définie sur $]0, 1]$ par $f(x) = \cos(1/x)$, et $f(0) = 0$ n'est pas continue en 0. En effet, il existe deux suites $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tendant vers 0 et telles que les suites $f(x_n) = 1$ et $f(y_n) = -1$ possèdent des limites distinctes.

Pourtant, comme elle est continue sur $]0, 1]$, pour tout intervalle $I \subset]0, 1]$, $f(I)$ est un intervalle. Si $I \subset [0, 1]$ est un intervalle contenant 0, et non réduit à $\{0\}$, alors $f(I) = [-1, 1]$. En effet, I contient x_n et y_n pour n assez grand, donc $f(I)$ contient $f([y_n, x_n]) = [-1, 1]$.

2 Bornes atteintes

2.1 Suites extraites

Définition 5 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. Une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\geq 0}$, où $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une fonction strictement croissante, s'appelle* sous-suite *ou* suite extraite *de (u_n).*

Remarque 6 *Nécessairement, $\phi(n) \geq n$, donc $\lim_{n\to\infty} \phi(n) = +\infty$.*

Exemple 7 *Les suites u_{2n}, u_{2n+1}, u_{n^2} sont extraites de (u_n).*

Proposition 8 *Si la suite (u_n) a une limite finie ℓ (resp. $+\infty$), alors toute sous-suite possède la même limite.*

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par définition, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Si $n \geq N$, $\phi(n) \geq n \geq N$, donc

$$n \geq N \Rightarrow |u_{\phi(n)} - \ell| < \epsilon.$$

Autrement dit, $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. C'est pareil pour la limite infinie. ∎

Remarque 9 *En revanche, il y a des cas où $(u_{\phi(n)})$ converge mais (u_n) ne converge pas.*

Prendre $u_n = (-1)^n$ et $\phi(n) = 2n$.

2.2 Valeurs d'adhérence

Définition 10 *Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit qu'un réel y est une* valeur d'adhérence *de (u_n) si pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier N, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - y| < \epsilon$.*

Exemple 11 *Si une suite (u_n) est convergente, alors elle possède une et une seule valeur d'adhérence, sa limite.*

Si $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, alors pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|u_n - y| < \epsilon$ est satisfaite pour tout n assez grand. En particulier, si on se donne un entier N, elle est vraie pour au moins un $n > N$. Donc la limite est une valeur d'adhérence. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres. En effet, si $y \neq \ell$, posons $\epsilon = |y - \ell|/2$. Soit N un entier tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - y| \geq |\ell - y| - |u_n - \ell| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,$$

ceci montre que y n'est pas valeur d'adhérence.

Exemple 12 *La suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ possède deux valeurs d'adhérence, 1 et -1.*

En effet, étant donné $\epsilon > 0$, l'intervalle $]1 - \epsilon, 1 + \epsilon[$ contient tous les termes d'indice pair et $> \frac{1}{\epsilon}$, donc des termes de la suite d'indices arbitrairement grands. De même, $]-1-\epsilon, -1+\epsilon[$ contient tous les termes d'indice impair $> \frac{1}{\epsilon}$. Donc 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence. Inversement, si $y \neq 1$ et -1, il n'y a aucun terme de la suite au voisinage de y à partir d'un certain temps.

Exemple 13 *La suite zéro-virgule. On définit une suite (u_n) comme suit. On écrit n en base 10, on écrit devant $0,$. Autrement dit, pour $n = 1, \ldots, 9$, on pose $u_n = n/10$. Pour $n = 10, \ldots, 99$, on pose $u_n = n/100$. Et ainsi de suite : si n est compris entre 10^{k-1} et $10^k - 1$, on pose $u_n = n.10^{-k}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (u_n) est l'intervalle $[1/10, 1]$.*

Exercice 14 *Montrer qu'une suite qui tend vers $+\infty$ ne possède aucune valeur d'adhérence.*

Solution de l'exercice 14. *Suites sans valeurs d'adhérence.*
Soit $y \in \mathbf{R}$. Posons $\epsilon = |y|$. Par définition de la limite, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow u_n > 2\epsilon.$$

Si $n \geq N$,

$$|u_n - y| \geq |u_n| - |y| > 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,$$

donc y n'est pas valeur d'adhérence de la suite.

Exercice 15 *Soit (u_n) une suite et $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite. Montrer que toute valeur d'adhérence de $(u_{\phi(n)})$ est aussi valeur d'adhérence de (u_n).*

Solution de l'exercice 15. *Valeurs d'adhérence et sous-suites.*
Soit y une valeur d'adhérence de $(u_{\phi(n)})$. Par définition, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout entier N, il existe $m \geq N$ tel que $|u_{\phi(m)} - y| < \epsilon$. Posant $n = \phi(m)$, on constate que $n \geq N$ et que $|u_n - y| < \epsilon$. Par conséquent, y est valeur d'adhérence de (u_n). ∎

Exercice 16 *Soit (u_n) une suite de réels. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. Interpréter les énoncés suivants.*

1. *$\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.*
2. *$\forall \epsilon > 0$, $\forall N$, $\exists n \geq N$ tel que $|u_n - \ell| < \epsilon$.*

3. $\forall\epsilon > 0$, $\forall N$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

4. $\forall\epsilon > 0$, $\exists N$, $\exists n \geq N$ *tels que* $|u_n - \ell| < \epsilon$.

5. $\exists\epsilon > 0$ *tel que* $\forall N$, $\exists n \geq N$ *tel que* $|u_n - \ell| \geq \epsilon$.

6. $\exists\epsilon > 0$ *tel que* $\forall N$, $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \geq \epsilon$.

7. $\exists\epsilon > 0$ *tel que* $\exists N$, $\exists n \geq N$ *tels que* $|u_n - \ell| \geq \epsilon$.

8. $\exists\epsilon > 0$, $\exists N$ *tel que* $\forall n \geq N$, $|u_n - \ell| \geq \epsilon$.

Solution de l'exercice 16. *Jongler avec les quantificateurs.*

1. signifie que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.
2. signifie que ℓ est une valeur d'adhérence de la suite u_n.
3. signifie que $u_n = \ell$ pour tout n.
4. signifie que ℓ est ou bien égale à l'un des u_n, ou bien une valeur d'adhérence de la suite u_n.
5. signifie que ℓ n'est pas valeur d'adhérence de la suite u_n.
6. signifie qu'il existe un voisinage de ℓ qui ne contient aucun point de la suite u_n.
7. signifie que la suite u_n n'est pas constante égale à ℓ.
8. signifie que ℓ n'est pas valeur d'adhérence de la suite u_n.

Proposition 17 *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels. Un réel* y *est valeur d'adhérence de* (u_n) *si et seulement si il existe une sous-suite qui converge vers* y.

Preuve. D'après les exercices 11 et 15, les limites de sous-suites sont des valeurs d'adhérence.

Réciproquement, soit y une valeur d'adhérence de (u_n). Posons $\epsilon_n = \frac{1}{n}$. On construit par récurrence une fonction ϕ strictement croissante et telle que pour tout n,

$$|u_{\phi(n)} - y| < \epsilon_n.$$

Par hypothèse, il existe m_1 tel que $|u_{m_1} - y| < \epsilon_1$. On pose $\phi(1) = m_1$. Supposant $\phi(2), \ldots, \phi(n-1)$ définis, on pose $N = \phi(n-1) + 1$. Par hypothèse, il existe $m_n \geq N$ tel que $|u_{m_n} - y| < \epsilon_n$. On pose $\phi(n) = m_n$. La fonction obtenue est strictement croissante. L'inégalité $|u_{\phi(n)} - y| < \epsilon_n$ montre que $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = y$. ∎

Exemple 18 *Toute suite convergente extraite de la suite* $u_n = (-1)^n$ *est* stationnaire, *i.e. est constante au bout d'un certain temps.*

Fin du cours n^{0}3

2.3 Suites bornées

Définition 19 *On dit qu'une suite* (u_n) *est* bornée *s'il existe* M *tel que pour tout* n, $|u_n| \leq M$.

Exercice 20 *Soit* (u_n) *une suite non bornée de réels. Alors on peut extraire de la suite des valeurs absolues* $(|u_n|)$ *une sous-suite qui tend vers* $+\infty$.

Solution de l'exercice 20. *Suites non bornées.*

Par hypothèse, pour tout M, il existe n tel que $|u_n| \geq M$. Montrons par l'absurde que pour tout M et tout entier N, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n| \geq M$. Sinon, il existe M et N tels que pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M$. Alors pour tout n,

$$|u_n| \leq \max\{M, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|\},$$

donc la suite (u_n) est bornée, contradiction.

On construit par récurrence sur n une fonction strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $|u_{\phi(n)}| \geq n$. Par hypothèse, il existe $m = \phi(1)$ tel que $|u_{\phi(1)}| \geq 1$. Supposant $\phi(n-1)$ construit, on applique la remarque précédente à $M = n$ et $N = \phi(n-1)+1$: il existe un $m \geq \phi(n-1)+1$ tel que $|u_m| \geq n$. On pose donc $\phi(n) = m$. Ceci fournit la suite extraite telle que $|u_{\phi(n)}|$ tend vers $+\infty$.

Théorème 3 (Bolzano-Weierstrass). *Une suite bornée de réels possède au moins une valeur d'adhérence. Autrement dit, elle possède au moins une sous-suite convergente.*

Preuve. On suppose que pour tout n, $|u_n| \leq M$. Soit A l'ensemble des réels x qui sont dépassés par une infinité de termes de la suite, i.e.

$$x \in A \Leftrightarrow \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } u_n \geq x.$$

L'ensemble A contient $-M$, il est non vide. Il est majoré par M. Montrons que $y = \sup A$ est une valeur d'adhérence de la suite. Fixons $\epsilon > 0$ et N entier. Comme $y + \epsilon \notin A$, il existe un N' tel que

$$n \geq N' \Rightarrow u_n < y + \epsilon.$$

On peut supposer que $N' \geq N$. En revanche, il existe un élément x de A tel que $x > y - \epsilon$. Par définition de A, il existe $n \geq N'$ tel que $u_n \geq x$. On a donc $n \geq N$ et $y - \epsilon < x \leq u_n < y + \epsilon$, donc $|u_n - y| < \epsilon$. Ceci montre que y est valeur d'adhérence. ∎

Corollaire 21 *Soit (u_n) une suite bornée de réels qui ne possède qu'une valeur d'adhérence ℓ (autrement dit, pour toute suite convergente $(u_{\phi(n)})$ extraite de (u_n), la limite est ℓ). Alors* $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Preuve. Par l'absurde. Supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout entier N, il existe $m \geq N$ tel que $|u_m - y| \geq \epsilon$.

En appliquant de façon répétée cette propriété, on va construire par récurrence une fonction strictement croissante $\phi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout n, $|u_{\phi(n)} - y| \geq \epsilon$. On pose d'abord $N = 1$, ce qui donne un entier m_1 et on pose $\phi(1) = m_1$. Supposant $\phi(2), \ldots, \phi(n-1)$ définis, on pose $N = \phi(n-1)+1$. Par hypothèse, il existe $m_n \geq N$ tel que $|u_{m_n} - y| \geq \epsilon$. On pose alors $\phi(n) = m_n$.

Comme $(u_{\phi(n)})$ est bornée, elle admet au moins une valeur d'adhérence (théorème 3), qui est aussi une valeur d'adhérence de (u_n) (exercice 15), donc c'est ℓ, par hypothèse. Mais c'est impossible, car $u_{\phi(n)}$ ne s'approche jamais de ℓ. Contradiction.

On conclut que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. ∎

Exercice 22 *On considère la suite de fonctions $f_n(x) = x - e^{-nx}\cos(nx)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $u_n \in]0,1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Montrer que $u_{\phi(n)}$ une sous-suite convergente. Montrer que* $\lim_{n\to\infty} u_{\phi(n)} = 0$. *En déduire que* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Solution de l'exercice 22. *Convergence des racines.*

Comme f_n est continue, $f_n(0) = -\frac{1}{n} < 0$, $f_n(1) \geq 1 - e^{-1} > 0$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède au moins une solution $u_n \in]0,1[$.

Comme (u_n) est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass garantit que (u_n) possède des sous-suites convergentes.

Soit $u_{\phi(n)}$ une sous-suite convergeant vers ℓ. Montrons par l'absurde que $\ell = 0$. On écrit

$$f_{\phi(n)}(u_{\phi(n)}) = u_{\phi(n)} - v_n \quad \text{où} \quad v_n = e^{-\phi(n)u_{\phi(n)}}\cos(\phi(n)\,u_{\phi(n)}).$$

Si $\ell > 0$, $\phi(n)u_{\phi(n)}$ tend vers $+\infty$, donc $e^{-\phi(n)u_{\phi(n)}}$ tend vers 0, et il en est de même de v_n. Par suite, $0 = f_{\phi(n)}(u_{\phi(n)})$ converge vers ℓ, donc $\ell = 0$, contradiction. On a donc prouvé que $\ell = 0$.

On a montré que la seule valeur d'adhérence de la suite (u_n) est 0. D'après la proposition 21, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

2.4 Théorème de la borne atteinte

Définition 23 *Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction majorée. On note* $\sup_E f = \sup f(E) = \sup\{f(x) \,|\, x \in E\}$.

Théorème 4 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors*

- *f est bornée : il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq M$;*
- *f atteint ses bornes : il existe c_1, $c_2 \in I$ tel que $f(c_1) = \min\{f(x) \,|\, x \in I\}$, $f(c_2) = \max\{f(x) \,|\, x \in I\}$.*

Preuve. Par l'absurde. Supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout entier n, il existe $x_n \in I$ tel que $f(x_n) \geq n$. En particulier $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = +\infty$. Comme I est borné, on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers ℓ. Comme I est fermé, $\ell \in I$. Par continuïté, $\lim_{n\to\infty} f(x_{\phi(n)}) = f(\ell)$, contradiction. On conclut que f est majorée. Pour la même raison, f est minorée, donc bornée.

Soit $A = \{f(x) \,|\, x \in I\}$ et $M = \sup A$. On sait qu'il existe une suite (éventuellement stationnaire) $y_n \in A$ qui converge vers M. Par construction, il existe $x_n \in I$ tel que $f(x_n) = y_n$. De nouveau, on extrait une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $\ell \in I$. Par continuïté, $f(\ell) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Pour la même raison, la borne inférieure est atteinte. ∎

Corollaire 24 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle fermé borné.*

Preuve. D'après le théorème 2, $f(I)$ est un intervalle. On sait désormais que cet intervalle est borné et contient ses bornes, il est de la forme $[m, M]$ où $m = \min_I f$, $M = \max_I f$. ∎

Exercice 25 *Soient I et J des intervalles non vides de $\mathbf{R}$. Dans quels cas existe-t'il une fonction continue sur I dont l'image est J ? En donner un exemple, dans chaque cas.*

Solution de l'exercice 25. *Images d'intervalles.*

On remarque que tout intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ (resp. semi-ouvert ou fermé semi-borné, resp. fermé borné et non réduit à un point, resp. réduit à un point) est l'image de $\mathbf{R}$ (resp. de $\mathbf{R}_+$, resp. de $[0, 1]$, resp. de $\{0, 0\}$) par une bijection h continue dont la réciproque est continue. En effet,

- si $I =]a, b[$, poser $h(x) = \frac{a+be^x}{1+e^x}$,
- si $I =]-\infty, b[$, poser $h(x) = b - e^x$,
- si $I =]a, +\infty[$, poser $h(x) = a + e^x$,
- si $I = [a, b[$, poser $h(x) = \frac{a+bx}{1+x}$,
- si $I =]a, b]$, poser $h(x) = \frac{b+ax}{1+x}$,
- si $I =]-\infty, b]$, poser $h(x) = b - x$,
- si $I = [a, +\infty[$, poser $h(x) = a + x$,
- si $I = [a, b]$, poser $h(x) = a(1 - x) + bx$.

Cela permet de limiter le tableau à double entrée (I, J) à 4 intervalles.

$I \setminus J$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}_+$	$[0, 1]$	$\{0\}$
$\mathbf{R}$	x	x^2	$\sin^2 x$	0
$\mathbf{R}_+$	$x \sin x$	x	$\sin^2 x$	0
$[0, 1]$			x	0
$\{0\}$				x

Les cases vides du tableau correpondent aux couples (I, J) pour lesquels il n'existe pas de fonction continue sur I d'image J.

Corollaire 26 *Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction continue, à valeurs strictement positives. Alors il existe $m > 0$ tel que $f \geq m$.*

Preuve. Posons $m = \inf_I f$, de sorte que pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$. D'après le théorème 4, il existe $c \in I$ tel que $m = f(c)$. Par conséquent, $m > 0$. ∎

Exercice 27 *Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs strictement positives, telle que* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Montrer qu'il existe $m > 0$ telle que $f \geq m$.*

Fin du cours n^{0}4

Solution de l'exercice 27. *Fonction tendant vers l'infini aux bornes.*

Par définition des limites en $-\infty$ et en $+\infty$, il existe $S < T$ tel que

$$x < S \Rightarrow f(x) > 1, \quad x > T \Rightarrow f(x) > 1.$$

D'après le corollaire 26, il existe $m_0 > 0$ tel que pour tout $x \in [S, T]$, $f(x) \geq m_0$. Posons $m = \min\{1, m_0\}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq m$.

Exercice 28 *Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, qui tend vers 0 en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer que f atteint l'une de ses bornes.*

Solution de l'exercice 28. *Fonction tendant vers 0 à l'infini.*

Par définition des limites en $-\infty$ et en $+\infty$, il existe $S < T$ tel que

$$x < S \Rightarrow |f(x)| < 1, \quad x > T \Rightarrow |f(x)| < 1.$$

D'après le théorème 4, f est bornée sur $[S, T]$, donc il existe C tel que pour tout $x \in [S, T]$, $|f(x)| \leq C$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leq C + 1$.

Notons $M = \sup_{\mathbf{R}} f$ et $m = \inf_{\mathbf{R}} f$. Si $M > 0$, alors M est atteint. En effet, il existe $S' < T'$ tels que

$$x < S' \Rightarrow |f(x)| < M/2, \quad x > T' \Rightarrow |f(x)| < M/2.$$

Notons $M' = \sup_{[S',T']} f$. D'après le théorème 4, il existe $c \in [S', T']$ tel que $f(c) = M'$. Alors $M = \max\{M', M/2\}$, ce qui entraîne $M = M' = f(c)$, donc M est atteint.

Pour la même raison, si $m < 0$, m est atteint. Le seul cas restant est $m = M = 0$. Dans ce cas, $f \equiv 0$, donc m et M sont atteints.

2.5 Accroissements finis

Théorème 5 (Rolle). *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. Soit c un point tel que $f(c) = \sup_{[a,b]} f$. Supposons $f(c) > f(a)$. Alors $c \in]a, b[$. Pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) - f(c) \leq 0$, donc le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ pour $x \in]c, b[$, et ≥ 0 pour $x \in]a, c[$. Par conséquent

$$0 \leq \lim_{x\to c-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \lim_{x\to c+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

ce qui entraîne que $f(c) = 0$.

Pour la même raison, si $\inf_{[a,b]} f < f(a)$, on trouve un point $c' \in]a, b[$ tel que $f(c') = 0$.

Enfin, si $\inf_{[a,b]} f = f(a) = \sup_{[a,b]} f$, alors f est constante, et $c = \frac{a+b}{2}$ convient. ∎

Corollaire 29 (Théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

Preuve. Appliquer le théorème 5 à la fonction g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. ■

Exercice 30 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $\lim_{x\to a+} f'(x) = \ell$. Montrer que f admet une dérivée à droite en a.*

Solution de l'exercice 30. *Limite de la dérivée.*

On montre que $\lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Fixons $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a < x < a+\alpha \Rightarrow |f'(x) - \ell| < \epsilon.$$

Soit $x \in]a, a+\alpha[$. D'après le théorème 29, il existe $c \in]a,x[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme $c \in]a, a+\alpha[$, $|f'(c) - \ell| < \epsilon$, donc $|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell| < \epsilon$. Cela prouve que $\lim_{x\to a+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, donc f est dérivable à droite en a, de dérivée ℓ.

3 Suites de Cauchy

3.1 Définition

Définition 31 *Une suite de Cauchy est une suite u_n telle que*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \quad \textit{tel que} \quad \forall m \geq N, \quad \forall n \geq N, \quad |u_m - u_n| < \epsilon.$$

Autrement dit, lorsque m et n tendent vers l'infini, $u_m - u_n$ tend vers 0.

Exemple 32 *Si une suite converge, elle est de Cauchy.*

En effet, soit ℓ la limite. Par définition, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Si $m \geq N$ et $n \geq N$, alors

$$|u_m - u_n| \leq |\ell - u_m| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Exemple 33 *La suite $u_n = \ell nn$ satisfait $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. On a même, pour tout k fixé,* $\lim_{n\to\infty} u_{n+k} - u_n = 0$*. Pourtant, (u_n) n'est pas une suite de Cauchy.*

En effet, $u_{2n} - u_n = \ell n2$ ne tend pas vers 0.

Remarque 34 *Une suite de Cauchy est bornée.*

En effet, prendre $\epsilon = 1$. Alors pour tout $m \geq N$, $|u_m - u_N| < 1$, donc, pour tout n, $|u_n| \leq |u_N| + 1 + \max\{|u_k| \,|\, 1 \leq k \leq N-1\}$.

Théorème 6 *Toute suite de Cauchy dans* **R** *est convergente.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy. D'après 34, elle est bornée. D'après le théorème 3, (u_n) possède une valeur d'adhérence ℓ. Fixons $\epsilon > 0$. Par définiton d'une suite de Cauchy, il existe N tel que

$$m, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_m - u_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Par définition d'une valeur d'adhérence, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - \ell| < \epsilon/2$. Par conséquent, pour tout $m \geq N$,

$$|u_m - \ell| < |u_m - u_n| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. ■

Remarque 35 *Le théorème 6 n'est pas vrai dans* **Q**.

En effet, une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$ (prendre les approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$) est une suite de Cauchy de **R**, donc aussi une suite de Cauchy de **Q**. Cependant, sa limite n'étant pas un rationnel, la suite n'a pas de limite dans **Q**.

3.2 Séries absolument convergentes

Il est parfois plus facile de vérifier le critère de Cauchy que de prouver la convergence d'une suite. En effet, on n'a pas besoin de connaître la limite.

Définition 36 *On dit qu'une série de nombre réels* $\sum u_n$ *est* absolument convergente *si la série de terme général* $|u_n|$ *est convergente.*

Corollaire 37 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. On s'intéresse à la suite $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Si $m > n \geq N$, alors

$$|S_m - S_n| \leq |u_{n+1}| + \cdots + |u_m| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |u_k|,$$

qui tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. Par conséquent, (S_n) est une suite de Cauchy. D'après le théorème 6, (S_n) converge, donc la série $\sum u_n$ est convergente. ∎

Remarque 38 *La réciproque est fausse.*

Par exemple, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle est n'est pas absolument convergente.

Exercice 39 *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Soit* $y \in$ **R**. *Montrer qu'en changeant l'ordre des termes, on peut obtenir une nouvelle série* $\sum v_n$ *qui est convergente, et dont la somme vaut* y.

Solution de l'exercice 39. *Resommation d'une série convergente non absolument convergente.*
On sépare les termes de la série en deux paquets, suivant leurs signes. Autrement dit, on note $\pi_n = \max\{u_n, 0\}$ les termes positifs de la suite, et $\nu_n = \min\{u_n, 0\}$ les termes négatifs, de sorte que $u_n = \pi_n + \nu_n$ et $|u_n| = \pi_n - \nu_n$. Par hypothèse $\sum u_n$ est convergente, mais $\sum |u_n|$ ne l'est pas. Par conséquent, les séries de termes généraux $\pi_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$ et $\nu_n = \frac{1}{2}(u_n - |u_n|)$ ne sont pas convergentes. En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k = -\infty.$$

On constitue la suite (v_n) en piochant alternativement dans le paquet positif et dans le paquet négatif, suivant les besoins.

Supposons par exemple $y > 0$. On commence par piocher dans le paquet positif, i.e. on pose $v_1 = p_1$, $v_2 = p_2$,... jusqu'à ce que la somme dépasse y. Cela se produira certainement, puisque la série des π_k diverge. On a donc construit $v_1, \ldots, v_m$ de sorte que $\sum_{k=1}^{m} v_k > y$ mais $\sum_{k=1}^{m-1} v_k < y$. Noter que $|y - \sum_{k=1}^{m} v_k| < \pi_m$. Ensuite, on pioche dans le paquet négatif jusqu'à ce que la somme repasse en-dessous de y, i.e. on pose $v_{m+1} = \nu_1$, $v_{m+2} = \nu_2$,...,$v_p = \nu_{p-m}$, de sorte que $\sum_{k=1}^{p} v_k < y$ mais $\sum_{k=1}^{p-1} v_k > y$. Noter que pour tout $q = m, \ldots, p$, $|y - \sum_{k=1}^{q} v_k| < \max\{|\pi_m|, |\nu_p|\}$. On construit ainsi une série $\sum v_n$ dont les termes sont ou bien ceux de (u_n), ou bien nuls, et dont les sommes partielles oscillent autour de y, de plus en plus près car $|\pi_n|$ et $|\nu_n|$ tendent vers 0. La série $\sum v_n$ est donc convergente, de somme y. Tous les termes de la série $\sum u_n$ sont bien utilisés. En supprimant les termes nuls, on obtient une série dont les termes sont ceux de u_n pris dans un autre ordre.

4 Continuité uniforme

4.1 Continuité et suites

On rappelle la caractérisation de la continuité d'une fonction en termes de suites : une fonction est continue sur un intervalle si et seulement si elle préserve les suites convergentes.

Proposition 40 *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbf{R}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite x_n tendant vers a, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Preuve. Soit x_n une suite qui tend vers a. Si f est continue en x, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x - a| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Il existe N tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |x_n - a| < \alpha.$$

Par conséquent, si $n \geq N$, $f(x_n) - f(a)| < \epsilon$. Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Si f n'est pas continue en a, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$. On applique cette propriété pour chaque α de la forme $1/n$. On trouve à chaque fois un $x_n \in]a - 1/n, a + 1/n[$ tel que $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$. La suite w_n tend vers a mais $f(x_n)$ ne tend pas vers a puisqu'elle n'entre pas dans l'intervalle $]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$. On a donc prouvé la contraposée de la réciproque. ■

Exemple 41 *Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = 1/x$. Posons $u_n = 1/n$. Alors f est continue sur I, u_n est une suite de Cauchy dans I. En revanche la suite $f(u_n) = n$ n'est pas une suite de Cauchy.*

Autrement dit, la continuité ne suffit pas pour préserver les suites de Cauchy. Cela conduit à introduire une nouvelle notion.

Fin du cours n^{0}5

4.2 Continuité uniforme

Définition 42 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles sur E. On dit que f est* uniformément continue *sur E si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x, x' \in E, \quad |x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Remarque 43 *Une fonction uniformément continue sur un intervalle est continue sur cet intervalle.*

La réciproque n'est pas vraie.

Exemple 44 *La fonction carré, définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto x^2$, n'est pas uniformément continue.*

En effet, posons $\epsilon = 1$. Alors on trouve des paires de points arbitrairement proches, comme n et $n + \frac{1}{n}$, tels que $(n + \frac{1}{n})^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$.

La définition qui suit donne le procédé le plus simple pour montrer qu'une fonction est uniformément continue.

Définition 45 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles sur E. On dit que f est* lipschitzienne*, de constante de Lipschitz L, si pour tous x, $x' \in E$, $|f(x) - f(x')| \leq L|x' - x|$.*

Exemple 46 *Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

En effet, étant donné $\epsilon > 0$, on pose $\alpha = \epsilon/L$. Par définition,

$$|x' - x| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| \leq L|x' - x| < L\alpha = \epsilon.$$

Exemple 47 *Soit I un intervalle, soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable. On suppose que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq L$. Alors f est uniformément continue sur I.*

En effet, du théorème des accroissements finis, il résulte que f est lipschitzienne, de constante de Lipschitz L.

Exemple 48 *La fonction racine carrée, définie sur $\mathbf{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{x}$, est uniformément continue. Pourtant, elle n'est pas lipschitzienne.*

En effet, étant donnés x et $x' \geq 0$, distincts, on peut supposer que $x' > x \geq 0$, et alors

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x}| = \frac{x' - x}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \leq \frac{x' - x}{\sqrt{x' - x}} \frac{\sqrt{x' - x}}{\sqrt{x'} + \sqrt{x}} \leq \sqrt{x' - x},$$

car $\sqrt{x' - x} \leq \sqrt{x'} \leq \sqrt{x'} + \sqrt{x}$. Etant donné $\epsilon > 0$, on pose $\alpha = \epsilon^2$. Pour tous $x' > x \geq 0$,

$$|x - x'| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{x' - x} < \sqrt{\alpha} = \epsilon.$$

D'autre part, le rapport $f(x)/x$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0, donc f n'est pas lipschitzienne.

Remarque 49 *Se rappeler la suite d'implications*

dérivable à dérivée bornée $\Rightarrow$ lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue.

4.3 Continuité uniforme et suites

Proposition 50 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$. Soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles sur E. f est uniformément continue si et seulement si pour tout choix de suites u_n et $v_n \in E$ telles que $\lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$, on a aussi $\lim_{n\to\infty} |f(u_n) - f(v_n)| = 0$.*

Preuve. Soient u_n et $v_n \in E$ deux suites telles que $\lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$. Si f est uniformément continue, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x'| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Il existe N tel que

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_n - v_n| < \alpha.$$

Si $n \geq N$, alors $|f(u_n) - f(v_n)| < \epsilon$. Cela prouve que $\lim_{n\to\infty} |f(u_n) - f(v_n)| = 0$.

Réciproquement, supposons que f n'est pas uniformément continue. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha > 0$, il existe x et $x' \in E$ tels que $|x - x'| < \alpha$ mais $|f(x) - f(x')| \geq \epsilon$. On applique cette propriété pour chaque α de la forme $1/n$. On trouve des éléments x_n, $x'_n \in E$ tels que $|x_n - x'_n| < 1/n$ mais $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon$. En particulier, $\lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$, mais $f(u_n) - f(v_n)$ ne tend pas vers 0. ∎

Exercice 51 *Montrer sans calcul que si $w_n = \sqrt{\ell nn}$, alors $w_{n+1} - w_n$ tend vers 0.*

Solution de l'exercice 51. *Différence de suites.*

On pose $u_n = \ell n(n+1)$, $v_n = \ell nn$. Alors $u_n - v_n = \ell n\frac{n+1}{n}$ tend vers 0. Comme la fonction racine carrée est uniformément continue, $w_{n+1} - w_n = \sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}$ tend vers 0.

Proposition 52 *Soit I un intervalle de* $\mathbf{R}$ *et* $f : I \to \mathbf{R}$ *une fonction uniformément continue. Pour tout suite de Cauchy* (u_n)*,* $f(u_n)$ *est à nouveau une suite de Cauchy.*

Preuve. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans I. Supposons f uniformément continue. Fixons $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$|x - x'| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Comme (u_n) est une suite de Cauchy, il existe N tel que

$$m,\, n \geq N \quad \Rightarrow \quad |u_m - u_n| < \alpha.$$

Si n et $m \geq N$, alors $|f(u_m) - f(u_n)| < \epsilon$. On a donc montré que $f(u_n)$ est une suite de Cauchy. ∎

Exercice 53 *Voici une preuve erronée de la proposition précédente. Trouver l'erreur.* "D'après le théorème 6, comme (u_n) est de Cauchy, elle converge. Comme f est continue, $(f(u_n))$ converge, donc c'est une suite de Cauchy."

Solution de l'exercice 53. *Comment se tromper avec les suites de Cauchy.*

La première phrase est correcte. Soit $c = \lim u_n$. Si $c \in I$, la suite de la preuve est correcte. Si $\ell \notin I$, on ne peut pas continuer, car f n'est pas définie en c. Par exemple, si $I =]0, +\infty[$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $f(x) = \frac{1}{x}$, alors $c = 0$ et la continuïté de f sur I ne permet (heureusement) pas de conclure que $f(u_n) = n$ converge.

Corollaire 54 *Soit* $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ *une fonction uniformément continue. Alors f se prolonge en une fonction continue sur* $[a, b]$*.*

Preuve. Par l'absurde. Si f ne se prolonge pas par continuïté à droite en a, il existe une suite $(u_n) \in]a, b[$ tendant vers a telle que $(f(u_n))$ n'ait pas de limite. Or (u_n) est une suite de Cauchy. D'après la proposition 52, $(f(u_n))$ est une suite de Cauchy. D'après le théorème 6, elle converge, contradiction. ∎

4.4 Théorème de Heine

Théorème 7 (Heine). *Soit* $I = [a, b]$ *un intervalle fermé et borné. Toute fonction continue sur I est uniformément continue.*

Preuve. Soient u_n et $v_n \in I$ deux suites telles que $|u_n - v_n|$ tend vers 0. Comme f est bornée sur I (théorème 4), la suite $w_n = |f(u_n) - f(v_n)|$ est bornée. D'après le corollaire 21, pour montrer que w_n tend vers 0, il suffit de montrer que 0 est sa seule valeur d'adhérence. Soit donc $w_{\phi(n)}$ une sous-suite qui converge vers ℓ.

D'après le théorème 3, on peut extraire une sous-suite $u_{\phi(\psi(n))}$ qui converge vers $c \in [a, b]$. Comme $|u_n - v_n|$ tend vers 0, la sous-suite $v_{\phi(\psi(n))}$ converge aussi vers c. D'après la proposition 40, $f(u_{\phi(\psi(n))})$ et $f(v_{\phi(\psi(n))})$ ont la même limite $f(c)$, donc $w_{\phi(\psi(n))} = |f(u_{\phi(\psi(n))}) - f(v_{\phi(\psi(n))})|$ tend vers 0. Autrement dit, $\ell = 0$. Cela montre que $\lim_{n\to\infty} |f(u_n) - f(v_n)| = 0$. On conclut que f est uniformément continue sur I. ∎

Remarque 55 *Autrement dit, des fonctions non uniformément continues, on n'en rencontre que sur des intervalles ouverts (par exemple* $x \mapsto 1/x$ *sur* $]0, +\infty[$*) ou sur des intervales non bornés (par exemple,* $x \mapsto x^2$ *sur* $\mathbf{R}$*).*

Exercice 56 *Voici une preuve erronée du théorème de Heine. Trouver l'erreur.* "Par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue. D'après la proposition 50, il existe deux suites u_n et $v_n \in I$ telles que $u_n - v_n$ tend vers 0 mais $f(u_n) - f(v_n)$ ne tend pas vers 0. D'après le théorème 3, on peut extraire une sous-suite $u_{\phi(n)}$ qui converge vers c. Comme $u_n - v_n$ tend vers 0, $v_{\phi(n)}$ converge aussi vers c. Par continuïté (proposition 40), $f(u_n)$ et $f(v_n)$ convergent vers $f(c)$. Cela entraîne que $f(u_n) - f(v_n)$ tend vers 0, contradiction. On conclut que f est uniformément continue."

Solution de l'exercice 56. *Comment s'emmêler les pinceaux avec des suites extraites.*

On n'a pas été soigneux avec les notations. L'argument montre seulement qu'une suite extraite de $|f(u_n) - f(v_n)|$ tend vers 0, ce qui ne contredit pas le fait que la suite elle-même ne tend pas vers 0.

Fin du cours n^{0}6

Exercice 57 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. Montrer que f est uniformément continue.*

Solution de l'exercice 57. *Continuité uniforme et limites à l'infini.*

Première solution. Fixons $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $S < T$ tels que

$$x < S \quad \text{ou} \quad x > T \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On remarque que l'inégalité $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ en résulte du moment que x et $x' < S$, ou x et $x' > T$.

On applique le théorème 7 dans l'intervalle $[S-1, T+1]$. Il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$x,\, x' \in [S-1, T+1] \quad , |x - x'| < \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \epsilon.$$

Posons $\alpha = \min\{1, \alpha\}$. Si $|x - x'| < \alpha$, alors
- ou bien x et $x' < S$;
- ou bien x et $x' > T$;
- ou bien l'un des deux appartient à $[S, T]$.

Dans le troisième cas, les deux appartiennent à $[S-1, T+1]$, et on conclut à nouveau que $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. On a donc montré que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

Seconde solution. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $|u_n - v_n|$ tende vers 0. D'après l'exercice 28, f est bornée sur $\mathbf{R}$, donc la suite $w_n = |f(u_n) - f(v_n)|$ est bornée. D'après la proposition 21, il suffit de montrer que 0 est la seule valeur d'adhérence de (w_n). Soit donc $w_{\phi(n)}$ une sous-suite qui converge vers ℓ. On discute suivant que $u_{\phi(n)}$ est bornée ou non.

Supposons que $u_{\phi(n)}$ n'est pas bornée. D'après l'exercice 20, il existe une suite extraite telle que $|u_{\phi(\psi(n))}|$ tende vers $+\infty$. Mais alors $|v_{\phi(\psi(n))}|$ tend aussi vers $+\infty$, donc $f(u_{\phi(\psi(n))})$ et $f(v_{\phi(\psi(n))})$ tendent vers 0. En particulier, $w_{\phi(\psi(n))}$ tend vers 0, donc $\ell = 0$.

Supposons que $u_{\phi(n)}$ est bornée. Il en est de même de $v_{\phi(n)}$. A ce point, ou bien on applique le théorème de Heine, ou bien on en reproduit la démonstration, et on arrive à la même contradiction : une suite extraite de $w_{\phi(n)}$ tend vers 0. On conclut à nouveau que $\ell = 0$. Cela montre que $\lim_{n\to\infty} |f(u_n) - f(v_n)| = 0$. On conclut que f est uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

5 Intégrale de Riemann

5.1 Motivation

Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}_+$ une fonction positive. Il s'agit de définir l'aire du domaine D_f limité par le segment $[a, b]$ de l'axe Ox, la bande $\{(x, y) \,|\, a \leq x \leq b\}$ et la courbe représentative de f, dans l'optique de calculer cette aire. On souhaite que l'aire ait les propriétés suivantes.
- *Positivité* : l'aire est positive ou nulle;
- *Additivité* : si un domaine plan D est la réunion de deux sous-domaines disjoints $D = D_1 \cup D_2$, alors $aire(D) = aire(D_1) + aire(D_2)$.
- *Négligeabilité* : une partie du plan contenue dans une droite a une aire nulle.
- *Normalisation* : l'aire d'un rectangle de côtés x et y vaut xy.

5.2 Intégrale des fonctions en escalier

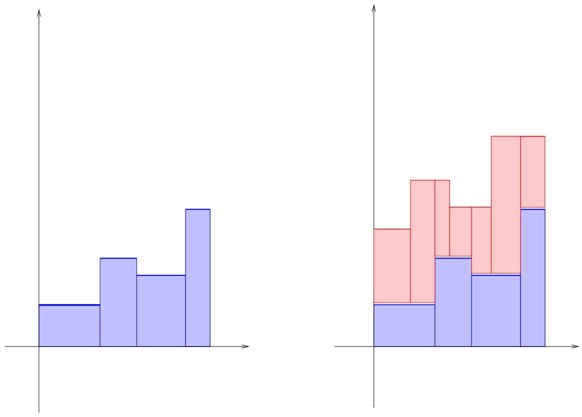
Définition 58 *Une fonction* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *est* en escalier *s'il existe une subdivision* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ *telle que* f *soit constante sur chacun des intervalles* $]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, \ldots, k$.

Pour une fonction en escalier positive f, D_f est une réunion de rectangles (voir figure). Les intersections étant contenues dans des droites, elles ne comptent pas, donc l'aire vaut

$$\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})f_i,$$

où f_i est la valeur de f sur $]t_{i-1}, t_i[$.

Définition 59 *Soit* f *une fonction en escalier (de signe quelconque). On appelle* intégrale *de* f *sur* $[a,b]$, *et on note* $\int_a^b f(t)\,dt$ *la somme* $\sum_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})f_i$.



Lemme 60 *Soient* f *et* g *deux fonctions en escalier sur* $[a,b]$. *Si on suppose que* $f \leq g$, *alors* $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$. *Si on suppose que* $|f - g| \leq \epsilon$, *alors* $|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt| \leq \epsilon(b-a)$.

Preuve. Si $f \leq g$, $\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt$ s'interprète comme l'aire d'une réunion de rectangles (voir figure), donc elle est positive ou nulle. Si $|f - g| \leq \epsilon$, alors $f \leq g + \epsilon$ et $g \leq f + \epsilon$, donc

$$\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b (g(t) + \epsilon)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt + \epsilon(b-a),$$

et

$$\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b (f(t) + \epsilon)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \epsilon(b-a),$$

ce qui signifie que $|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt| \leq \epsilon(b-a)$. ∎

Lemme 61 *Soit* f *une fonction en escalier sur* $[a,b]$. *Soit* $c \in]a,b[$. *Alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

5.3 Continuité uniforme et intégrale

Pour une fonction qui n'est pas en escalier, l'intégrale est définie par un passage à la limite.

Définition 62 *On appelle* finesse *d'une subdivision* $\sigma = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ *le nombre* $|\sigma| = \max\{t_i - t_{i-1} \,|\, i = 1, \ldots, k\}$. *Etant donnée une fonction* f *sur* $[a, b]$, *on note* $g_{f,\sigma}$ *la fonction en escalier qui vaut* $f(a)$ *en* a *et qui vaut* $f(t_i)$ *sur l'intervalle* $]t_{i-1}, t_i]$.

On montre que, si f est continue, les valeurs des intégrales $\int_a^b g_{\sigma,f}(t)\, dt$ sont groupées lorsque la finesse $|\sigma|$ est petite.

Lemme 63 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* σ *et* σ' *sont des subdivisions de finesse inférieure à* α, *alors*

$$|\int_a^b g_{\sigma,f}(t)\, dt - \int_a^b g_{\sigma',f}(t)\, dt| < \epsilon.$$

Preuve. Fixons $\epsilon > 0$. D'après le théorème 7, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tous x, $x' \in [a, b]$,

$$|x - x'| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

Soient σ, σ' deux subdivisions de finesse inférieure à $\alpha/2$. Si $x \in [a, b]$, x appartient à un intervalle $]t_{i-1}, t_i]$ (resp. $]t'_{j-1}, t'_j]$) de chaque subdivision. Alors

$$|t_i - t'_j| \leq |\sigma| + |\sigma'| < \alpha$$

donc

$$|g_{\sigma,f}(x) - g_{\sigma',f}(x)| = |f(t_i) - f(t'_j)| < \frac{\epsilon}{b - a}.$$

D'après le lemme 60,

$$|\int_a^b g_{\sigma,f}(t)\, dt - \int_a^b g_{\sigma',f}(t)\, dt| \leq \epsilon. \blacksquare$$

5.4 Sommes de Riemann

Définition 64 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. On appelle* sommes de Riemann *associées à* f *sur l'intervalle* $[a, b]$ *les nombres*

$$S_n = \frac{b - a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(a + i\frac{b - a}{n}).$$

Il s'agit des intégrales correspondant aux subdivisions de $[a, b]$ en intervalles d'égale longueur. Du lemme 63, il résulte que les sommes de Riemann associées à une fonction continue forment une suite de Cauchy. D'après le théorème 6, elles convergent.

Définition 65 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *une fonction continue. On appelle* intégrale *de* f *sur* $[a, b]$, *et on note* $\int_a^b f(t)\, dt$, *la limite des sommes de Riemann* S_n.

Exercice 66 *Etudier les suites*

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{2n!}{n!n^n}} \quad et \quad v_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Solution de l'exercice 66. *Sommes de Riemann.*

On constate que

$$\ell n(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n(1+\frac{k}{n})$$

est une somme de Riemann associée à la fonction continue définie sur $[1,2]$ par $f(x) = \ell n(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ell n(u_n) &= \int_1^2 \ell n(t)\,dt \\
&= [t\ell n(t)]_1^2 - \int_1^2 dt \\
&= 2\ell n(2) - 1,
\end{aligned}$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n = 4/e$.

Fin du cours $\mathrm{n}^0 7$

De même,

$$\ell n(v_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell n(\frac{k}{n})$$

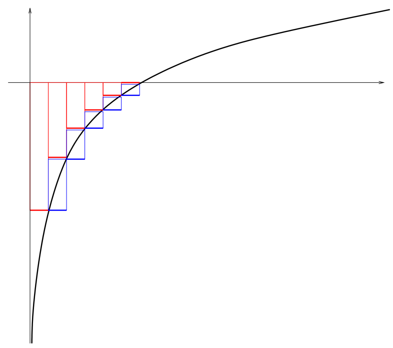
ressemble à une somme de Riemann associée à la fonction ℓn sur $]0,1]$. Toutefois, ℓn n'est pas continue sur cet intervalle, donc on ne peut pas utiliser directement le théorème de convergence des sommes de Riemann. En revanche, comme ℓn est croissante, on peut tout de même comparer directement la somme de Riemann à l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\ell n(v_n) &\geq \int_0^1 \ell n(t)\,dt \\
&= [t\ell n(t)]_0^1 - \int_0^1 dt \\
&= -1.
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction en escalier qui vaut $\ell n(k/n)$ sur l'intervalle $]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$ est inférieure à la fonction logarithme (voir figure), donc

$$\begin{aligned}
\ell n(v_n) &\leq \int_{1/n}^1 \ell n(t)\,dt \\
&= [t\ell n(t)]_{1/n}^1 - \int_{1/n}^1 dt \\
&= -\frac{1}{n}\ell n(\frac{1}{n}) - 1 + \frac{1}{n} \to -1.
\end{aligned}$$

On conclut que $\lim_{n\to\infty} \ell n(v_n) = -1$, d'où $\lim_{n\to\infty} v_n = 1/e$.



5.5 Propriétés élémentaires

Les propriétés suivantes, pour les fonctions continues, résultent, par passage à la limite, des propriétés correspondantes pour les fonctions en escalier.

Proposition 67 *1.* Linéarité *:* $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$

2. Inégalités *: $f \geq 0$ entraîne $\int_a^b f(t)\,dt \geq 0$, avec égalité seulement si $f \equiv 0$.*

3. Chasles *: $a < b < c$ entraîne $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.*

De 1 et 2, il résulte d'autres inégalités comme

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt,$$

$$|\int_a^b f(t)\,dt| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

$$|f| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad |\int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)\epsilon.$$

Théorème 8 *Si une suite (f_n) de fonctions continues sur $[a,b]$ converge uniformément vers f, alors $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.*

Preuve.

$$|\int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)\sup_{[a,b]} |f_n - f|,$$

et le sup tend vers 0 quand n tend vers l'infini, par hypothèse. ∎

Exercice 68 *Soit $a \in]0,1[$. Etudier les suites d'intégrales*

$$u_n = \int_a^1 (1-t^3)^n\,dt \quad \textit{et} \quad v_n = \int_0^1 (1-t^3)^n\,dt.$$

Solution de l'exercice 68. *Intégrale et convergence uniforme.*

Posons, pour $t \in [a,1]$, $f_n(t) = (1-t^3)^n$. Comme $t \geq a$, $1-t^3 \leq 1-a^3$, d'où $f_n(t) \leq (1-a^3)^n$, quantité indépendante de t qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, les fonctions f_n convergent uniformément vers 0 sur $[a,1]$. Le théorème 8 entraîne donc que u_n tend vers 0.

Comme $f_n(0) = 1$ pour tout n, les f_n convergent vers la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs. Cette fonction n'étant pas continue, la convergence n'est pas uniforme. Néanmoins, on peut conclure. Fixons $\epsilon > 0$. Posons $a = \epsilon/2$. Comme $f_n(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,1]$, $\int_0^1 f_n(t)\,dt \leq a \leq \frac{\epsilon}{2}$. Comme u_n tend vers 0, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow \int_a^1 f_n(t)\,dt < \frac{\epsilon}{2}.$$

En ajoutant, on trouve que $0 \leq v_n < \epsilon$. On conclut que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

5.6 Intégrale et primitive

Théorème 9 *Si $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est continue, la fonction définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable et sa dérivée est f.*

Preuve. Soit $x \in [a,b[$ et $h > 0$ petit. Alors

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &= |\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt| \\ &\leq h \sup_{[x,x+h]} |f(t) - f(x)|, \end{aligned}$$

et le sup tend vers 0 quand h tend vers 0, par continuité de f. Par conséquent F a une dérivée à droite en x, qui vaut $f(x)$. De façon similaire, on montre que F a une dérivée à gauche en x, qui vaut $f(x)$. On conclut que F est dérivable, de dérivée f. ∎

Exercice 69 *Quelle est la dérivée de la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ell nt}{t}\,dt$?*

Solution de l'exercice 69. *Intégrale comme fonction de ses bornes.*

Posons $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ell nt}{t}\,dt$. Alors $f(x) = F(x^2) - F(x)$, d'où

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\frac{\ell n(x^2)}{x^2} - \frac{\ell nx}{x} = 3\frac{\ell n(x)}{x}.$$

En fait, F se calcule, puisque $\frac{\ell nt}{t} = u(t)u'(t)$ où $u(t) = \ell n(t)$. Il vient $F(x) = \dfrac{1}{2}\ell n(x)^2$, puis

$$f(x) = F(x^2) - F(x) = \frac{1}{2}\ell n(x^2)^2 - \frac{1}{2}\ell n(x)^2 = \frac{3}{2}\ell n(x)^2,$$

ce qui permet de vérifier que

$$f'(x) = 3\frac{\ell n(x)}{x}.$$