DETERMINANTS

P. Pansu

November 14, 2004

1 Motivation

Calcul du terme général d'une suite donnée par une relations de récurrence linéaire.

La récurrence simple $au_{n+1} + bu_n = 0$, $a \neq 0$, donne une suite géométrique $u_n = (-a/b)^n u_0$.

La récurrence double
$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \quad a \neq 0, \tag{1}$$
se ramène à une récurrence simple vectorielle, pour le vecteur $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = AX_n$ où $A = \begin{pmatrix} -b/a & -c/a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Recette. Chercher une solution sous la forme d'une suite géométrique $u_n = r^n$. Si l'*équation caractéristique* $az^2 + bz + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2, on cherche la suite solution de (1) de conditions initiales $u_0 = x_0$ et $u_1 = x_1$ sous la forme
$$u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n.$$
On trouve c_1 et c_2 en résolvant un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

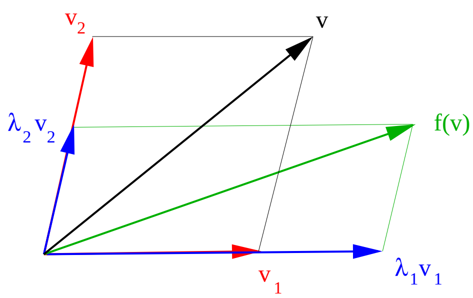
Interprétation. Si r est racine de l'équation caractéristique, la condition initiale $v = \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix}$ donne l'expression simple $X_n = r^n v$ parce que $Av = rv$.

2 Vecteurs propres

2.1 Définition

Définition 1 *Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$. Un vecteur v est un* vecteur propre *de f s'il est non nul et si $f(v)$ est colinéaire à v, $f(v) = \lambda v$. Un nombre λ est une* valeur propre *de f s'il existe un vecteur non nul v tel que $f(v) = \lambda v$. L'*espace propre *associé à λ est $E_\lambda = \ker(\lambda id - f)$.*

Proposition 2 *Construction géométrique de l'image d'un vecteur pour un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ possédant une base de vecteurs propres.*



2.2 Lien avec le polynôme caractéristique

Proposition 3 *λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine de $P_f = \det(\lambda id - f)$.*

Exemple 4 *La matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui n'a aucune valeur propre, et un endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ qui en a 2.*

3 Diagonalisabilité

3.1 Définition

Définition 5 *Un endomorphisme est* diagonalisable *si il admet une base de vecteurs propres. Une matrice $n \times n$ à coefficients réels est* diagonalisable sur $\mathbf{R}$ *(resp. sur $\mathbf{C}$) si l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (resp. de $\mathbf{C}^n$) qu'elle définit est diagonalisable.*

Proposition 6 *Une matrice $n \times n$ à coefficients réels est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ (resp. sur $\mathbf{C}$) si et seulement si il existe une matrice inversible P à coefficients réels (resp. complexes) telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

Les colonnes de P sont alors des vecteurs propres de l'endomorphisme f défini par A. Les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont les valeurs propres correspondantes.

3.2 Conditions nécessaires

3.2.1 Polynômes scindés

Définition 7 *Un polynôme à coefficients réels (resp. complexes) est dit* scindé *s'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1.*

Autrement dit, un polynôme P de degré d dont le coefficient directeur vaut 1 est scindé si et seulement si il s'écrit $P(x) = \prod_{i=1}^{d}(x - z_i)$, où $z_i \in \mathbf{R}$ (resp. $z_i \in \mathbf{C}$).

Exemple 8 *Un polynôme réel du second degré est scindé si et seulement si son discriminant est positif ou nul.*

Théorème 1 (D'Alembert-Gauss) *Tout polynôme à coefficients complexes est scindé.*

Corollaire 9 *Un polynôme réel est scindé si et seulement si toutes ses racines complexes sont en fait réelles.*

Proposition 10 *Si f est diagonalisable, alors P_f est scindé.*

3.2.2 Multiplicités

Définition 11 *Soit P un polynôme, λ une racine de P. La* multiplicité *de λ est le plus grand entier m tel que P soit divisible par $(x - \lambda)^m$.*

Autrement dit, $P(x) = (x - \lambda)^m Q(x)$ où $Q(\lambda) \neq 0$.

Exemple 12 *Cela généralise les racines simples et doubles des polynômes de degré 2.*

Proposition 13 *Un polynôme à coefficients réels de degré d est scindé si et seulement si la somme des multiplicités des racines réelles vaut d.*

Définition 14 *Soit f un endomorphisme, λ une valeur propre de f. La* multiplicité *de λ comme valeur propre de f, c'est sa multiplicité comme racine de P_f.*

Lemme 15 *Soit f un endomorphisme. Alors pour toute valeur propre λ, de multiplicité $m(\lambda)$,*

$$\dim E_\lambda \leq m(\lambda).$$

Proposition 16 *Si f est diagonalisable, alors pour toute valeur propre λ, de multiplicité $m(\lambda)$,*

$$\dim E_\lambda = m(\lambda).$$

3.3 Critère de diagonalisabilité

Théorème 2 *Soit f un endomorphisme. Alors f est diagonalisable si et seulement si*

- *P_f est scindé ;*
- *pour toute valeur propre λ, de multiplicité $m(\lambda)$,*

$$\dim E_\lambda = m(\lambda).$$

Corollaire 17 *Soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$). Si P_f possède n racines réelles (resp. complexes) de multiplicité 1, alors f est diagonalisable.*

Attention, la réciproque est fausse.

Exemple 18 *Une matrice diagonale est diagonalisable, même s'il admet des valeurs propres multiples.*

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 19 *Soient $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs propres de f. On suppose que tous les vecteurs de cette famille relatifs à une même valeur propre sont linéairements indépendants. Alors $v_1, \ldots, v_k$ sont linéairement indépendants.*

3.4 Pratique de la diagonalisation

Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients réels. Diagonaliser A, c'est décider si A est diagonalisable ou non sur $\mathbf{R}$ (resp. sur $\mathbf{C}$). Si oui, c'est calculer une P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Procédé pratique.

- Calculer et factoriser le polynôme caractéristique P_A. *Si certaines racines sont non réelles, conclure que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbf{R}$ et continuer.*
- Pour chaque valeur propre λ de multiplicité $m(\lambda) \geq 2$, calculer le rang de $\lambda I - A$. En déduire $\dim(E_\lambda)$. *Si $\dim(E_\lambda) < m(\lambda)$, conclure que A n'est pas diagonalisable, ni sur $\mathbf{R}$ ni sur $\mathbf{C}$. Sinon, continuer.*
- Pour chaque valeur propre λ, calculer une base de E_λ. Mettre ces bases ensembles, construire la matrice de passage P dont les colonnes sont les vecteurs de la base obtenue.

Remarque 20 *Lors de la dernière étape, il n'est pas nécessaire*

- *de vérifier que les vecteurs obtenus forment une base ;*
- *de vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale,*

car c'est automatique.

Exemple 21 *Famille à un paramètre de matrices 2×2.*

3.5 Application au calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

4 Polynômes et matrices

4.1 Théorème de Cayley-Hamilton

Définition 22 *Si* $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ *est un polynôme et* M *une matrice carrée,* $P(A) = a_0 I + a_1 M + \cdots + a_d M^d$*. De même, on peut définir* $P(f)$ *lorsque* f *est un endomorphisme.*

Propriété : si $P = QR$ est un produit de polynômes, alors $P(f) = Q(f) \circ R(f) = R(f) \circ Q(f)$.

Proposition 23 *Soit* f *un endomorphisme. Soit* Q *un polynôme tel que* $Q(f) = 0$*. Alors, pour toute valeur propre* λ *de* f*,* $Q(\lambda) = 0$*.*

Exemple 24 *Projecteurs. Si* f *est le projecteur sur* E *parallèlement à* F*, alors* $f \circ f = f$*. Les valeurs propres de* f *sont 0 et 1.*

Exemple 25 *Symétries. Si* f *est la symétrie par rapport à* E *parallèlement à* F*, alors* $f \circ f = id$*. Les valeurs propres de* f *sont* -1 *et 1.*

Théorème 3 (Cayley-Hamilton)*. Soit* f *un endomorphisme. Alors* $P_f(f) = 0$*.*

4.2 Deuxième critère de diagonalisabilité

Théorème 4 *Soit* f *un endomorphisme. Alors* f *est diagonalisable si et seulement si il existe un polynome* Q *scindé et à racines toutes simples tel que* $Q(f) = 0$*.*

Exemple 26 *Soit* f *un endomorphisme de* $\mathbf{R}^n$ *tel que* $f \circ f = f$*. Alors* f *est le projecteur sur* $\mathrm{im} f$ *parallèlement à* $\ker f$*.*

4.3 Endomorphismes qui commutent

Théorème 5 *Soient* f *et* g *deux endomorphismes. On suppose que*

- f *et* g *sont diagonalisables ;*
- f *et* g *commutent, i.e.* $f \circ g = g \circ f$*.*

Alors il existe une base formée de vecteurs propres à la fois pour f *et pour* g*.*

4.4 Formule du binôme

Proposition 27 (Formule du binôme de Newton)*. Soient* A *et* B *deux matrices* $n \times n$ *qui* commutent*, i.e. telles que* $AB = BA$*. Alors pour tout entier* $k \geq 1$*,*

$$(A+B)^k = A^k + kA^{k-1}B + \cdots + \binom{k}{p} A^{k-p}B^p + \cdots + B^k.$$

Corollaire 28 *Soit* A *une matrice* $n \times n$ *dont le polynôme caractéristique est de la forme* $P_A(x) = (x-\lambda)^n$*. Alors pour tout entier* $k \geq 1$*,*

$$A^k = \lambda^k I + k\lambda^{k-1}(A - \lambda I) + \cdots + \binom{k}{p} \lambda^{k-p}(A-\lambda I)^p + \cdots + (A - \lambda I)^k.$$

où la somme comporte au plus n *termes non nuls.*

Exemple 29 *Calcul des puissances d'une matrice* 2×2 *ayant une valeur propre double.*

4.5 Application aux suites définies par une relation de récurrence double

Recette. Si l'équation caractéristique a une racine double λ, on cherche la suite solution de (1) de conditions initiales $u_0 = x_0$ et $u_1 = x_1$ sous la forme $u_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n$. On trouve c_1 et c_2 en résolvant un système linéaire de deux équations à deux inconnues.