BORNE SUPERIEURE

P. Pansu

15 février 2005

1 Motivation

Grandeur et misère de $\mathbf{Q}$.

1.1 Propriétés de l'ordre dans Q

- L'ordre est compatible avec les opérations d'addition et de multiplication (par exemple, $x \leq y$ et $a \geq 0$ entraîne $ax \leq ay$).
- $\mathbf{Q}$ est *archimédien* : pour tous $x > 0$ et $y > 0$, il existe $n \geq 1$ entier tel que $nx > y$.
- $\mathbf{Q}$ est *dense en soi* : si $a < b$, il existe $c \in \mathbf{Q}$ tel que $a < c < b$.

1.2 Des équations sans solutions dans Q

Théorème 1 (Hippias). *L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbf{Q}$.*

Interprétation géométrique : la diagonale d'un carré de côté rationnel n'est pas rationnelle.
Interprétation graphique : la parabole d'équation $y = x^2 - 2$ ne coupe pas l'axe Ox.
Interprétation analytique : la propriété des valeurs intermédiaires n'est pas vraie dans $\mathbf{Q}$, les raisonnements par continuïté, nécessaires à la géométrie d'Euclide, sont impossibles.
Interprétation en terme d'ordre. L'ensemble $\{x \in \mathbf{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$ n'est pas un intervalle de $\mathbf{Q}$. Il ne possède pas de plus grand élément.

1.3 Objectif

$\mathbf{R}$ compense les faiblesses de $\mathbf{Q}$. On va déduire toutes les propriétés remarquables de $\mathbf{R}$, et les théorèmes fondamentaux de l'analyse, d'une seule propriété, l'existence de la borne supérieure.

2 Relation d'ordre

Le vocabulaire familier pour $\mathbf{Q}$ peut être utilisé dans des situations plus générales.

2.1 Définition

Définition 1 *Une* relation d'ordre $\mathcal{R}$ *sur un ensemble E, c'est une relation, notée $x \,\mathcal{R}\, y$, qui est*
- *Réflexive : pour tout $x \in E$, $x \,\mathcal{R}\, x$.*
- *Antisymétrique : $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, x$ entraîne $x = y$.*
- *Transitive : $x \,\mathcal{R}\, y$ et $y \,\mathcal{R}\, z$ entraîne $x \,\mathcal{R}\, z$.*

Exemple 2 *$E = \mathbf{Q}$ avec l'ordre usuel.*
$E =$ l'ensemble des parties d'un ensemble, avec l'inclusion.
$E =$ un dictionnaire, avec l'ordre alphabétique.

2.2 Ordre total

Définition 3 *Un ensemble muni d'une relation d'ordre est dit* totalement ordonné *si deux éléments sont toujours comparables, i.e. ou bien* $x \mathcal{R} y$, *ou bien* $y \mathcal{R} x$.

Exemple 4 $\mathbf{Q}$, *le dictionnaire, sont totalement ordonnés. L'ensemble des parties d'un ensemble ne l'est pas.*

3 Majorant, borne supérieure

3.1 Majorant, plus grand élément

Définition 5 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation d'ordre notée* $\leq$. *Soit* $A \subset E$. *Un élément* $y \in E$ *est un* majorant *de* A *si pour tout* $x \in A$, $x \leq y$. y *est un* minorant *de* A *si pour tout* $x \in A$, $y \leq x$.

Exemple 6 *Soit, dans* $\mathbf{Q}$, $A = \{x \in \mathbf{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$. *Alors* 2 *est un majorant de* A, -2 *un minorant de* A. $3/2$ *est aussi un majorant de* A.

Soit, dans $\mathbf{Q}$, B *l'ensemble des rationnels positifs dont la partie entière est un nombre à deux chiffres. Alors* 100 *est un majorant de* B.

Soit, dans $\mathbf{Q}$, C *l'ensemble des rationnels dont le dénominateur n'a que des chiffres* 9. *Alors* C *n'a pas de majorant.*

Définition 7 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation d'ordre notée* $\leq$. *Soit* $A \subset E$. *Un élément* $y \in A$ *est* le plus grand élément *de* A *si, pour tout* $x \in A$, $x \leq y$. *Lorsqu'il existe, on note le plus grand élément* $y = \max A$.

De même, $y \in A$ *est* le plus petit élément *de* A *si, pour tout* $x \in A$, $x \leq y$. *Lorsqu'il existe, on note le plus petit élément* $y = \min A$.

Exemple 8 *Dans la liste de l'exemple 6,* A, B *et* C *n'ont pas de plus grand élément.*

C'est clair pour C qui ne possède aucun majorant. Pour B, on remarque que si $x \in B$, alors $x < 100$. Il existe un rationnel y tel que $x < y < 100$. Alors $y \in B$, donc x n'est pas le plus grand élément de B. Pour A, on raisonne par l'absurde. Supposons que A possède un plus grand élément y. Par définition, $y^2 < 2$. Il existe un entier n tel que $2 - y^2 > 10^{-n}$. On pose $z = y + 10^{-n-1}$. Comme $y < 2$,

$$\begin{aligned} z^2 &= y^2 + 2y.10^{-n-1} + 10^{-2n-2} \\ &< y^2 + 2y.10^{-n-1} + 10^{-n-1} < y^2 + 5.10^{-n-1} < y^2 + 10^{-n} < 2. \end{aligned}$$

Donc $z \in B$ et $y < z$, contradiction. On conclut que A n'a pas de plus grand élément.

Remarque 9 *Si* A *possède un plus grand élément* y, *alors* y *est un majorant de* A, *et c'est évidemment le plus petit possible.*

3.2 Borne supérieure

Définition 10 *Soit* E *un ensemble muni d'une relation d'ordre notée* $\leq$. *Soit* $A \subset E$. *Un élément* $y \in E$ *est appelé* borne supérieure *de* A, *noté* $y = \sup A$, *si*

- y *est un majorant de* A.
- y *est le plus petit des majorants de* A.

De même, on dit que $y \in E$ *est la* borne inférieure *de* A, *noté* $y = \inf A$, *si*

- y *est un majorant de* A.
- y *est le plus petit des majorants de* A.

Clairement, si la borne supérieure de A existe, elle est unique.

Exemple 11 *Dans la liste de l'exemple 6, B possède une borne supérieure, c'est* 100*. Ce n'est pas le plus grand élément de B.*

En effet, tout rationnel positif dont la partie entière a deux chiffres est < 100, donc 100 est un majorant, et 100 n'est pas un élément de B. Soit y un rationnel positif, $y < 100$. Alors il existe un rationnel z tel que $y < z < 100$. Ce z appartient à B, donc y n'est pas un majorant de B. On conclut que tout majorant de B est ≥ 100, donc 100, le plus petit des majorants, est la borne supérieure de B.$\blacksquare$

Remarque 12 *Si $A \subset E$ possède une borne supérieure y et $y \in A$, alors y est le plus grand élément de A. Dans ce cas, on dit que la borne supérieure est* atteinte.

Ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple de l'ensemble B.

Exemple 13 *Dans la liste de l'exemple 6, A ne possède pas de borne supérieure.*

Par l'absurde. Supposons que A possède une borne supérieure $y \in \mathbf{Q}$. Comme A ne possède pas de plus grand élément, $y^2 > 2$. Il existe un entier n tel que $y^2 - 2 > 10^{-n}$. On pose $z = y - 10^{-n-1}$. On remarque que $y < 2$. Si $x \geq z$,

$$x^2 \geq z^2 = y^2 - 2y.10^{-n-1} + 10^{-2n-2} > y^2 - 2y.10^{-n-1} > y^2 - 4.10^{-n-1} > y^2 - 10^{-n} > 2.$$

Par conséquent, tout $x \in A$ est $< z$. Donc z est un majorant de A, et $z < y$, contradiction. On conclut que A n'a pas de borne supérieure.$\blacksquare$

Fin du cours $n^0 1$

4 Nombres réels

On se contente d'une notion intuitive de nombre réel. Elle peut-être assise sur une base solide, au prix de démonstrations plutôt fastidieuses.

Un nombre réel, c'est un développement décimal illimité. Soit $x = 0.9999....$ Alors $10x = 9 + x$, donc $x = 1$. Plus généralement, il faut identifier un développement qui se termine par une suite de 9 avec un nombre décimal, i.e. dont le développement se termine par une suite de zéros. Autrement dit, chaque nombre réel non décimal possède exactement un développement décimal, et chaque nombre décimal en possède exactement 2.

4.1 Deux caractérisations de la borne supérieure

Proposition 14 *Soit $A \subset \mathbf{R}$. Le réel y est la borne supérieure de A si et seulement si*
- *y est un majorant de A ;*
- *$\forall \epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x > y - \epsilon$.*

Preuve. Soit $y = \sup A$ le plus petit des majorants de A. Alors $\forall \epsilon > 0$, $y - \epsilon < y$ n'est pas un majorant de A, donc il existe $x \in A$ tel que $x > y - \epsilon$.

Réciproquement, soit y un majorant de A. Si y n'est pas le plus petit, il existe un autre majorant $z < y$. Posant $\epsilon = y - z$, on voit que pour tout $x \in A$, $x \leq z = y - \epsilon$. C'est la contraposée de l'énoncé.$\blacksquare$

Proposition 15 *Soit $A \subset \mathbf{R}$. Le réel y est la borne supérieure de A si et seulement si*
- *y est un majorant de A ;*
- *il existe une suite de nombres $x_n \in A$ qui converge vers y.*

Preuve. Soit $y = \sup A$ la borne supérieure de A. Appliquons la proposition 14 aux nombres ϵ de la forme $1/n$, n entier. Il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > y - \frac{1}{n}$. Comme y est un majorant de A, $x_n \leq y$. Cela prouve que x_n tend vers y.

Réciproquement, soit y un majorant de A, (x_n) une suite d'éléments de A telle que $y = \lim x_n$. Etant donné $\epsilon > 0$, il existe N tel que

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - y| < \epsilon.$$

En particulier, $x_n > y - \epsilon$, ce qu'il fallait démontrer.■

Exemple 16 *Considérons la suite* $u_n = (-1)^n \frac{n-1}{n}$ *et l'ensemble* $A = \{u_n \,|\, n \geq 1\}$. *Alors* $\sup A = 1$.

En effet, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$, donc 1 est un majorant de A. D'autre part, la suite des termes pairs $x_n = u_{2n} = \frac{2n-1}{2n}$ converge vers 1, donc, d'après la proposition 15, 1 est la borne supérieure de A.■

Danger : la borne supérieure d'une suite n'est pas toujours la limite d'une sous-suite.

Exemple 17 *Considérons la suite* $v_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$ *et l'ensemble* $B = \{v_n \,|\, n \geq 1\}$. *Alors* $\sup B = 3/2$.

En effet, pour tout $n \geq 2$, $v_n \leq \frac{n+1}{n} \leq 3/2$, et $v_1 < 0 \leq 3/2$, donc $3/2$ est un majorant de B. D'autre part, $3/2 = v_2 \in B$ est le plus grand élément de B, donc *a fortiori* la borne supérieure de B.■

Autrement dit, dans cet exemple, la suite x_n dont l'existence est garantie par la proposition 15 est stationnaire.

4.2 Supériorité de R sur Q

Théorème 2 *Soit* $A \subset \mathbf{R}$ *un ensemble non vide qui possède un minorant. Alors* A *possède une borne inférieure.*

Preuve. Elle repose sur la propriété suivante des entiers : tout ensemble E d'entiers possède un plus petit élément. C'est clair, car pour tout $x \in E$, les éléments de E inférieurs à x sont en nombre fini.

Quitte à translater A, on peut supposer que le minorant donné est 0. Soit $m = b_k b_{k-1} \cdots b_0$ la plus petite des parties entières des éléments de A. Par construction, m est un minorant de A et il y a des éléments de A dans l'intervalle $[m, m+1[$. Soit a_1 le plus petit des premiers chiffres après la virgule des éléments de $A \cap [m, m+1[$. Par construction, $b_k b_{k-1} \cdots b_0.a_1 = m + a_1.10^{-1}$ est un minorant de A et il y a des éléments de A dans l'intervalle $[m + a_1.10^{-1}, m + (a_1+1).10^{-1}[$. Soit a_2 le plus petit des seconds chiffres après la virgule des éléments de $A \cap [m + a_1.10^{-1}, n + (a_1+1).10^{-1}[$. Par construction, $b_k b_{k-1} \cdots b_0.a_1 a_2 = m + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2}$ est un minorant de A et il y a des éléments de A dans l'intervalle $[m + a_1.10^{-1} + a_2.10^{-2}, m + a_1.10^{-1} + (a_2+1).10^{-2}[$.

On continue indéfiniment. On produit ainsi un développement décimal illimité

$$y = b_k b_{k-1} \cdots b_0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots ,$$

limite de nombres décimaux $y_n = b_k b_{k-1} \cdots b_0.a_1 a_2 \cdots a_n$. Alors y est un minorant de A. En effet, si $x \in A$, alors $x \geq y_n$ pour tout n, donc, en passant à la limite, $x \geq y$. Aussi, pour tout n, il existe $x_n \in A \cap [y_n, y_n + 10^{-n}[$. La suite x_n converge vers y. D'après la proposition 15, y est la borne inférieure de A.■

4.3 Suites croissantes

Théorème 3 *Soit (u_n) une suite croissante majorée de réels. Alors u_n possède une limite finie.*

Preuve. Soit $y = \sup\{u_n\}$. Soit $\epsilon > 0$. D'après la proposition 14, il existe N tel que $u_N > y-\epsilon$. Pour $n \geq N$,

$$y \geq u_n \geq u_N > y - \epsilon,$$

d'où $|u_n - y| < \epsilon$. Autrement dit, $y = \lim u_n$.∎

Remarque 18 *Clairement, cette propriété n'est pas vraie dans* $\mathbf{Q}$.

Prendre la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$.

Exercice 19 *Soit u_n une suite croissante de réels. On suppose que (u_n) ne possède aucun majorant. Alors u_n tend vers $+\infty$.*

Solution de l'exercice 19. *Suite croissante non majorée.*
Soit $T \in \mathbf{R}$. Comme T n'est pas un majorant de $\{u_n\}$, il existe N tel que $u_N > T$. Pour $n \geq N$, $u_n \geq u_N \geq T$. Autrement dit, $\lim u_n = +\infty$.

Corollaire 20 *Soit $v_n \geq u_n \geq 0$. On suppose que la série de terme général v_n est convergente. Alors la série de terme général u_n est convergente.*

4.4 Caractérisation des intervalles

Dans un ensemble totalement ordonné, on peut parler d'*intervalles*, comme l'ensemble des mots compris entre `ordre` et `total` dans le dictionnaire.

Dans $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{R}$, il y a 9 types d'intervalles (non vides),

$$[a,b], \quad]a,b], \quad [a,b[, \quad]a,b[, \quad]-\infty,b], \quad]-\infty,b[, \quad [a,+\infty[, \quad]a,+\infty[,]-\infty,+\infty[.$$

Proposition 21 *Soit $I \subset \mathbf{R}$ un sous-ensemble* convexe, *i.e. qui possède la propriété suivante : si $a \in I$ et $b \in I$, alors $[a,b] \in I$. Alors I est un intervalle.*

Preuve. Supposons d'abord I majoré et minoré. Soit $a = \inf I$, $b = \sup I$. Alors $I \subset [a,b]$. De plus, $]a,b[\subset I$. En effet, d'après la proposition 15, il existe des suites $a_n \in I$ et $b_n \in I$ telles que a_n tend vers a et b_n tend vers b. Si $x \in]a,b[$, alors pour n assez grand $a_n < x < b_n$, d'où $x \in [a_n,b_n] \subset I$. Cela prouve que I est l'un des 4 intervalles de bornes a et b.

Si I n'est pas minoré, remplacer a par $-\infty$ avec la même preuve. Si I n'est pas majoré, remplacer b par $+\infty$ avec la même preuve. ∎

Remarque 22 *Cet énoncé est faux dans* $\mathbf{Q}$.

L'ensemble $\{x \in \mathbf{Q} \,|\, x^2 \leq 2\}$ est convexe dans $\mathbf{Q}$ mais n'est pas un intervalle, car sinon il posséderait une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbf{Q}$.

4.5 Intervalles emboîtés

Théorème 4 *Soient $[a_n,b_n]$ des intervalles bornés* emboîtés, *i.e. $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$. Alors l'intersection $J = \bigcap_n [a_n,b_n]$ est un intervalle fermé non vide. Si, de plus, $b_n - a_n$ tend vers 0, J est réduit à un point.*

Preuve. Par hypothèse, pour tout n, $a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$. La suite a_n est croissante et majorée par b_1, la suite b_n est décroissante est minorée par a_1. Par conséquent elles admettent des limites finies a et b, et $\sup\{a_n\} = a \leq b = \inf\{b_n\}$. Clairement, pour tout n, $[a,b] \subset [a_n, b_n]$ donc il est contenu dans l'intersection J. Inversement, si $x < a$, alors pour n assez grand, $x < a_n$, donc $x \notin [a_n, b_n]$, donc $x \notin J$. De même, J ne contient pas les points $x > b$, donc $J = [a,b]$. Enfin, si $b_n - a_n$ tend vers 0, $a = b$.■

Corollaire 23 *Soient a_n et b_n des suites* adjacentes, *i.e. a_n est croissante, b_n décroissante, $a_n \leq b_n$, et $b_n - a_n$ tend vers 0. Alors a_n et b_n convergent vers la même limite finie.*

Corollaire 24 *Soit u_n une suite telle que $(-1)^n u_n$ décroît et tend vers 0. Alors la série de terme général u_n est convergente.*

En effet, les suites $a_n = \sum_{p=1}^{2n-1} u_p$ et $b_n = \sum_{p=1}^{2n} u_p$ sont adjacentes.■