Chapitre 2

Fonctions d'une variable complexe

2.1 Objets du plan complexe

2.1.1 Le plan complexe **C**

On peut définir un point z du plan complexe $\mathbf{C}$ par la donnée de deux coordonnées réelles de différentes manières.

Par exemple
$$z = x + iy \text{ où } x,\, y \in \mathbf{R}$$
ou bien encore
$$z = \rho e^{i\theta}$$
avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ à $2k\pi$ près.

On a donc $x = \rho \cos\theta$, $x = \rho \sin\theta$. Rappelons aussi que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ et que
$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } y = 0.$$

Remarque 1 *On* ne doit pas *utiliser les relations d'ordre $>$ et $<$ pour deux nombres complexes quelconques.*

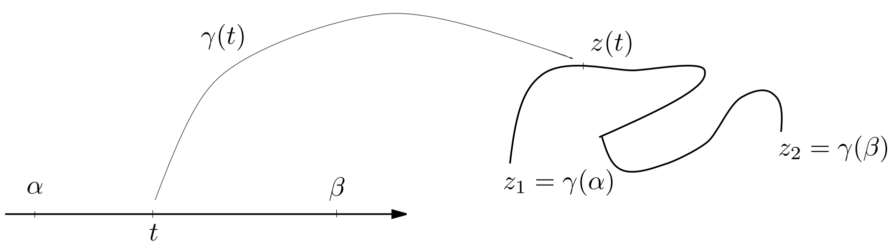
2.1.2 Disques

Disque ouvert : $D(a, r) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - a| < r\}$.
Disque fermé : $\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z - a| \leq r\}$.

2.1.3 Chemins

Un chemin $L(z_1, z_2)$ du plan complexe peut être caractérisé par une fonction γ à valeurs complexes $z(t) = \gamma(t)$ du paramètre réel $t \in [\alpha, \beta]$. La fonction γ est continue en t, à dérivée en t continue par morceaux .

Remarque 2 *1. On peut considérer avec profit une image en terme de cinématique du point matériel dans le plan : on considère que $z(t)$ représente la position à l'instant t d'un point mobile M. Le point M est autorisé à un*



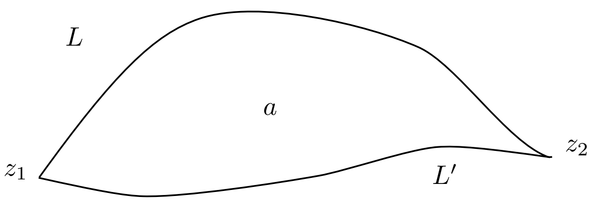
changement brusque de direction en certains points de sa trajectoire, en dehors de ces points la vitesse est une fonction continue.

2. *On peut avoir $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pour des temps t_1 et t_2 différents.*

2.1.4 Chemins homotopes

Deux chemins L et L' ayant mêmes extrémités sont dits *homotopes* s'il est possible de les déformer l'un en l'autre d'une manière continue (intuitivement : sans les déchirer à aucun moment au cours de cette déformation).

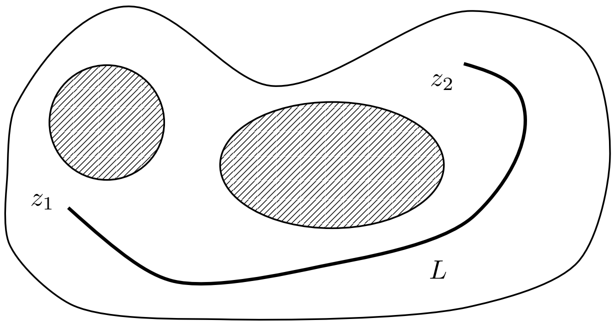
Remarque 3 *Cette dernière opération si elle est toujours possible dans* $\mathbf{C}$ *tout entier, n'est pas toujours possible dans* $\mathbf{C} - \{a\}$.



2.1.5 Domaine connexe

C'est un ensemble D de points du plan complexe $\mathbf{C}$ tels que

1. Chaque point z_0 de D peut être le centre d'un *disque ouvert* entièrement contenu dans D.
2. Deux points quelconques z_1 et z_2 de D peuvent être reliés entre eux par un chemin L entièrement contenu dans D.



2.1.6 Domaine simplement connexe

C'est un domaine connexe D où deux chemins quelconques joignant deux points arbitraires z_1 et z_2 de D sont homotopes tout en restant dans D.

Exemple 4 *Un disque ouvert est simplement connexe alors que le domaine précédent ne l'est pas.*

2.2 Séries entières

2.2.1 Définition

Les polynômes à coefficients complexes $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_d z^d$ peuvent être vus comme des fonctions de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. On a envie de passer des sommes finies aux sommes infinies.

Définition 5 *On appelle* série entière *une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de la forme*

$$f_n(z) = a_n z^n.$$

On la note $\sum a_n z^n$.

Exemple 6 *On appelle* série exponentielle *la série entière de terme général $z^n/n!$, $n \geq 0$.*

2.2.2 Rayon de convergence

Théorème 1 *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un nombre $R \in [0, +\infty]$ tel que*

1. *Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*
2. *Si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente.*

Définition 7 *On appelle le nombre fourni par le théorème 1 le* rayon de convergence *de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque $D = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < R\}$ s'appelle le* disque de convergence *de la série entière $\sum a_n z^n$.*

Exemple 8 *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum z^n$ *est égal à 1. Sur le disque de convergence, la somme de cette série vaut* $\frac{1}{1-z}$.

En effet, $R \leq 1$ car la série diverge en $z = 1$. D'autre part, elle converge pour tout z tel que $|z| < 1$, donc $R \geq 1$. On conclut que $R = 1$. L'identité remarquable

$$1 + z + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

montre que si $|z| < 1$, les sommes partielles de la série convergent vers $\frac{1}{1-z}$.

Exemple 9 *Le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à* $+\infty$.

En effet, pour tout $z \in \mathbf{C}$, on peut appliquer le critère de d'Alembert au module $|z^n/n!|$.

2.2.3 Dérivation terme à terme

Définition 10 *Soit* $z_0 \in \mathbf{C}$, *soit* $r > 0$. *Soit* f *une fonction définie sur le disque de centre* z_0 *et de rayon* r *dans* $\mathbf{C}$. *On dit que* f *est* dérivable au sens complexe *s'il existe* $\ell \in \mathbf{C}$ *tel que*

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \ell \right| = 0.$$

Le nombre ℓ *s'appelle la* dérivée *de* f *en* z_0, *notée* $f'(z_0)$.

Exemple 11 *Un polynôme* $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_d z^d$ *est dérivable au sens complexe, de dérivée* $\mathcal{P}'(z_0) = a_1 + 2a_2 z_0 + \cdots + d a_d z_0^{d-1}$.

Théorème 2 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière dont le rayon de convergence n'est pas nul. Alors sa somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est dérivable au sens complexe sur le disque de convergence, et sa dérivée* f' *s'obtient en dérivant terme à terme,*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Preuve. Utiliser le théorème de dérivation dans l'intégrale, pour la mesure de décompte.■

2.2.4 Séries de Laurent

Définition 12 *Une* série de Laurent, *c'est une série de fonctions de la forme* $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$, *i.e. une série de puissances positives et négatives de* z.

Pour que $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (1/z)^n$ convergent. Par conséquent, une série de Laurent possède une *couronne de convergence* $A = \{R_1 < |z| < R_2\}$. Le théorème de dérivation terme à terme (Théorème 2) s'étend aux séries de Laurent.

2.3 Fonctions holomorphes dans un domaine

2.3.1 Définition

Soit $z = x+iy \in D$ et $z \mapsto f(z) \equiv f(x+iy)$ une fonction définie pour $z \in D$.

Définition 13 *La fonction f est* holomorphe dans D*,* si l'une des trois *conditions suivantes (I, II ou III) est satisfaite*

I. *La fonction f est dérivable au sens complexe* en tout point z_0 *de* D.

II. *Si on décompose $f(x, y)$ en parties réelle $P(x, y)$ et imaginaire $Q(x, y)$*

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

1. *Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues en tout point $z = x + iy$ de D.*
2. *Les dérivées partielles* $P'_x \quad P'_y \quad Q'_x \quad Q'_y$ existent *et sont* continues *en x et y en tout point de D.*
3. *Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ satisfont aux* conditions de Cauchy-Riemann *en tout point de D.*
$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$$

III. *Pour tout $z_0 \in D$, la fonction $h \mapsto f(z_0 + h)$ est égale, au voisinage de 0, à la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul*

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)h^n.$$

Remarque 14
1. *Les propriétés* **I**, **II** *et* **III** *sont équivalentes* seulement *lorsqu'on considère un domaine D. Elles ne sont plus équivalentes si on ne considère* qu'un seul point. *On dit que ce sont des propriétés* localement *équivalentes mais pas ponctuellement.*
2. *Les conditions de Cauchy-Riemann seules (cf. la définition II) n'assurent pas l'holomorphie.*
3. *La condition III s'appelle traditionellement condition* **d'analyticité***.*

Proposition 15
1. *Une fonction holomorphe dans D est continue en tout point de D.*
2. *Une fonction holomorphe dans D est bornée sur tout disque fermé (plus généralement une union finie de tels disques) contenu dans D.*

2.3.2 Exemples de fonctions holomorphes

1. $z \mapsto z$.
2. $z \mapsto \mathcal{P}(z)$ où $\mathcal{P}$ est un polynôme en z.
3. $z \mapsto e^{az} = 1 + az + \frac{1}{2}(az)^2 + ... + \frac{1}{n!}(az)^n + ...$, où $a \in \mathbf{C}$.
   Ces trois dernières fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.

4. $z \mapsto \frac{1}{z}$, qui est holomorphe dans $\mathbf{C} - \{0\}$.
5. $z \mapsto \frac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des polynômes en z, est holomorphe dans $\mathbf{C}$ privé des racines de l'équation $\mathcal{Q}(z) = 0$.
6. La dérivée p-ème $f^{(p)}$ d'une fonction f holomorphe dans D est holomorphe dans D. (En déduire que $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$).

2.3.3 Propriétés algébriques des fonctions holomorphes

Supposons données deux fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto g(z)$ holomorphes dans un domaine commun D du plan complexe. On a alors

1. $af(z) + bf(z)$ qui est holomorphe dans D pour a et $b \in \mathbf{C}$.
2. $f(z)g(z)$ est holomorphe dans D.
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ est holomorphe dans D privé des points de D où $g(z) = 0$.
4. (Loi de composition des fonctions holomorphes) Soient $z \mapsto f_1(z)$ holomorphe dans D_1 et $z \mapsto f_2(z)$ holomorphe dans D_2 et supposons que l'image $f(D_1)$ soit contenue dans D_2, on a alors : $z \mapsto f_2(f_1(z))$ qui est holomorphe dans D_1.

2.4 Intégrales le long de chemins du plan complexe

2.4.1 Définition

Définition 16 *Soit L : $[\alpha, \beta] \to \gamma(t)$ un chemin du plan complexe. Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction de la variable complexe z, qu'on suppose holomorphe dans un domaine D contenant le chemin L. On appelle* intégrale de f le long de L*, la quantité notée $\int_L f(z)\,dz$ donnée par*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt.$$

Remarque 17 *Bien que $f(z)$ soit une fonction continue en z et que $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ soit continue par morceaux en t, nous considérons ici que l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, alors que Riemann suffirait.*

Cela facilitera la formulation d'un certain nombre de théorèmes.

Remarque 18 *En décomposant $f(z)$ en partie réelle et imaginaire*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de même pour $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On pourra encore écrire $\int_L f(z)\,dz$ sous la forme d'une intégrale curviligne dans le plan des variables réelles x et y,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy + i \int_L P(x, y)\,dy + Q(x, y)\,dx$$

Il est très instructif de considérer l'analogie mécanique suivante. On peut dire que $\int_L f(z)\,dz$ représente le travail accompli par la force $f(z)$ appliquée sur un point mobile se trouvant au point $z(t)$ à l'instant t sur la trajectoire L, lorsqu'il parcourt tout le chemin L avec la vitesse $\frac{d\gamma(t)}{dt}$.

Proposition 19 *L'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ est* indépendante *de la paramétrisation prise pour décrire L.*

Ceci veut dire que si $t' \in [\alpha', \beta'] \to z(t') = \mu(t')$ est une autre paramétrisation équivalente [1] de L,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(\mu(t'))\frac{d\mu(t')}{dt'}\,dt' = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t))\frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt.$$

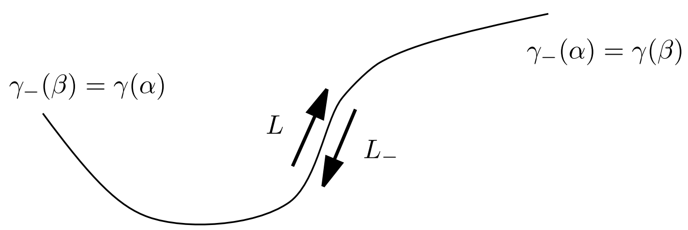
L'analogue en mécanique du point de cette propriété n'est autre que l'invariance, par rapport à la vitesse du point mobile, du travail accompli par une force appliquée sur ce point lors de son déplacement le long d'un chemin donné.

Proposition 20 *Soit L_- un chemin identique à L mais décrit en sens inverse par la paramètrisation*

$$t \in [\alpha, \beta] \to z(t) = \gamma_-(t) \in L_-$$

avec $\gamma_-(\alpha) = \gamma(\beta)$ et $\gamma_-(\beta) = \gamma(\alpha)$, alors

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_{L_-} f(z)\,dz.$$



Proposition 21 (Formule de majoration). *Soit f holomorphe dans un domaine connexe D et L : $[\alpha, \beta] \to z(t)$ un chemin contenu dans D. Alors*

$$|\int_L f(z)dz| \leq \lambda(L)\sup_{z\in L}|f(z)|,$$

où $\lambda(L)$ est la longueur de L.

[1] C'est à dire que $t' = \Phi(t)$ et $\gamma(t) = \mu(\Phi(t))$ où Φ est une fonction continue croissante à dérivée continue par morceaux, appliquant de façon bijective $[\alpha, \beta]$ sur $[\alpha', \beta']$.

Preuve. On peut écrire

$$\begin{aligned}
|\int_L f(z)\,dz| &= |\int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt| \\
&\leq \int_{[\alpha,\beta]} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,dt \\
&\leq (\sup_{z\in L}|f(z)|)\int_{[\alpha,\beta]} |\gamma'(t)|\,dt.
\end{aligned}$$

Comme $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$, on a

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

D'autre part, il est bien connu en géométrie que

$$\int_{[\alpha,\beta]} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \lambda(L).\blacksquare$$

Proposition 22 *Soit $f(z)$ holomorphe dans un domaine connexe D et $L : [\alpha, \beta] \to z(t)$ un chemin contenu dans D. On a alors*

$$\int_L f'(z)\,dz = f(z(\beta)) - f(z(\alpha)).$$

Preuve. Posons $F(t) = f(z(t))$. Par la formule des dérivées composées (la dérivée $z'(t)$ est définie $p.p./dt$)

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df}{dz}.\frac{dz(t)}{dt} = f'(z).\frac{dz(t)}{dt},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_L f'(z)\,dz &= \int_{[\alpha,\beta]} f'(z)\frac{dz(t)}{dt}\,dt \\
&= \int_{[\alpha,\beta]} \frac{dF(t)}{dt}dt \\
&= F(\beta) - F(\alpha) = f(z(\beta)) - f(z(\alpha)).\blacksquare
\end{aligned}$$

2.4.2 Théorème de Cauchy

Définition 23 *Un chemin ayant ses extrémités confondues est un* lacet*, on dit aussi souvent* circuit *ou* contour*.*

Théorème 3 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D, soit C un circuit entièrement contenu dans D. Alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Preuve. Nous nous contenterons d'une démonstration utilisant les propriétés des champs de vecteurs en analyse vectorielle.

Considérons les décompositions en parties réelles et imaginaires

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + iy(t), \\ f(z) &= P(x, y) + iQ(x, y). \end{aligned}$$

Alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy + i \int_C P(x, y)\,dy + Q(x, y)\,dx.$$

On suppose connue la formule du rotationnel (formule de Green-Riemann) pour un champ de vecteurs à deux composantes $\vec{V} = (V_x, V_y)$:

$$\int_C V_x\,dx + V_y\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

où S désigne la surface enclose par le lacet C.

En appliquant cette dernière formule aux deux champs de vecteurs $\vec{A} = (P, -Q)$ et $\vec{B} = (Q, P)$ et en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann on voit immédiatement que le théorème est vrai.■

Corollaire 24 *Supposons que L et L' soient deux chemins contenus dans un domaine connexe D, ayant leurs deux extrémités z_1 et z_2 communes et qui sont homotopes entre eux dans D (voir figure). Si f est holomorphe dans D,*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{L'} f(z)\,dz.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy au circuit $C = L \cup L'_-$ constitué de l'union du chemin L et du chemin L'_- : le chemin L' parcouru en sens inverse.■

D'une manière plus générale,

Corollaire 25 *Si f est holomorphe dans un domaine D contenant deux circuits C et C' pouvant être déformés l'un dans l'autre d'une manière* continue *en restant dans D, alors*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z)\,dz.$$

Preuve. Il suffit de relier C et C' par deux chemins infiniment voisins et parcourus en sens inverse, puis d'appliquer le théorème de Cauchy au circuit ainsi constitué.■

2.5 Théorie de Cauchy

C'est l'étude des propriétés des intégrales de fonctions holomorphes sur des chemins contenus dans le domaine d'holomorphie de ces fonctions.

2.5.1 Exemple fondamental

Proposition 26 *Pour $m \in Z$ et $a \in \mathbf{C}$, considérons la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m}$. C'est une fonction définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $D = \mathbf{C} - \{a\}$. Considérons d'autre part un circuit Γ constitué par un cercle de rayon r centré au point a. Alors*

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0 & si\ m \neq 1, \\ 2i\pi & si\ m = 1. \end{cases}$$

Preuve. Paramétrons le circuit Γ de la manière suivante

$$z(t) = a + re^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

de sorte que

$$\frac{dz(t)}{dt} = ire^{it}$$

et

$$f(z(t)) = r^{-m}e^{-imt},$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} I = \int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m}\, dz &= \int_{[0,2\pi]} f(z(t)).\frac{dz(t)}{dt}\, dt \\ &= \int_{[0,2\pi]} r^{-m}e^{-imt} ire^{it} dt \\ &= ir^{1-m} \int_{[0,2\pi]} e^{i(1-m)t}\, dt, \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$\begin{cases} I = 0, & \text{si } m \neq 1; \\ I = 2i\pi, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

2.5.2 Les fonctions $z \mapsto \log z$, $z \mapsto \mathrm{Log} z$ et $z \mapsto z^\alpha \quad \alpha \in \mathbf{C}$

Définition des fonctions "logarithme complexe"

Considérons la fonction $u \to \frac{1}{u}$ définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $\mathbf{C} - \{0\}$. Soit d'autre part $L(z)$ un chemin issu du point $u = 1$ situé sur l'axe réel et allant jusqu'au point $u = z \in \mathbf{C} - \{0\}$ en évitant le point $u = 0$. Considérons l'intégrale dépendant de z

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u}\, du$$

A-t-on ainsi défini une fonction $z \mapsto F(z)$ sur $\mathbf{C} - \{0\}$? La réponse est négative car en prenant $L(z) = \Gamma$, le cercle unité centré en 0 on aurait d'après l'exemple fondamental

$$F(e^{2i\pi}) = 2i\pi.$$

Cependant le point $z = e^{2i\pi}$ étant confondu avec le point $z = 1$ on devrait avoir

$$F(e^{2i\pi}) = F(1) = 0,$$

d'où la contradiction.

En revanche, l'application $z \mapsto F(z)$ est bien une fonction définie sur $\mathbf{C} - \Delta(\alpha)$ où $\Delta(\alpha)$ est une demi-droite issue de l'origine faisant un angle α avec l'axe réel. En effet, le chemin $L(z)$ ne peut alors accomplir un tour complet autour du point 0. On évite donc la situation précédente. Il est traditionnel d'appeler chacune de ces différentes fonctions des *déterminations du logarithme*.

La fonction Log ou détermination principale du logarithme

Elle est définie par $\mathrm{Log} z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbf{C} - \Delta_-$ où Δ_- est la demi -droite des réels négatifs ou nuls.

Proposition 27 *1. La fonction Log est holomorphe en z pour $z \in \mathbf{C} - \Delta_-$.*

2. *Pour $z = x \in]0, \infty[$ on a $\mathrm{Log} z|_{z=x} = \ell n x$.*
3. $\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z}$ *pour $z \in \mathbf{C} - \Delta_-$.*
4. *Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, \infty[$ et $\theta \in] - \pi, +\pi[$,*

$$\mathrm{Log} z = \ell n \rho + i\theta,$$

où $\ell n(x)$ représente le logarithme népérien de x.

Une autre fonction $\log z$

Elle est définie par $\log z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbf{C} - \Delta_+$ où Δ_+ est la demi droite des réels positifs ou nuls.

(On remarque que 1 n'appartient pas à $L(z)$, mais 1 est de longueur nulle.)

On peut démontrer les propriétés suivantes de cette fonction log.

1. Cette fonction log est holomorphe en z pour $z \in C - \Delta_+$.
2. Pour $z = x \in]0, \infty[$ on a pour $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \log(x + i\epsilon) = \ell n x.$$

   On en déduit

$$\lim_{\epsilon \to 0} \log(x - i\epsilon) = \ell n x + 2i\pi.$$

3. $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbf{C} - \Delta_+$.
4. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, \infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\log z = \ell n \rho + i\theta.$$

Propriétés communes aux déterminations de $\log z$

1. Pour z_1 et z_2 à l'intérieur du domaine d'holomorphie de la fonction log considérée
$$\int_{L(z_1,z_2)} \frac{1}{z}\, dz = \log(z_2) - \log(z_1),$$
pour tout chemin $L(z_1, z_2)$ allant de z_1 vers z_2 tout en restant dans le domaine d'holomorphie de la fonction log considérée.
2. $e^{\log z} = z$ pour $z \in \mathbf{C} - \Delta_+$; $e^{\mathrm{Log} z} = z$ pour $z \in \mathbf{C} - \Delta_-$.
3. $$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2ik\pi, \quad k \in Z,$$
$$\mathrm{Log} z_1 z_2 = \mathrm{Log} z_1 + \mathrm{Log} z_2 + 2im\pi, \quad m \in Z$$
avec en général $k \neq m$.

Exercice 28 *Calculer* $\mathrm{Log} z_1 z_2$ *pour* $z_1 = z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Que vaut* m *dans ce cas ?*

Les fonctions $z \mapsto z^\alpha$ **pour** α ***complexe***

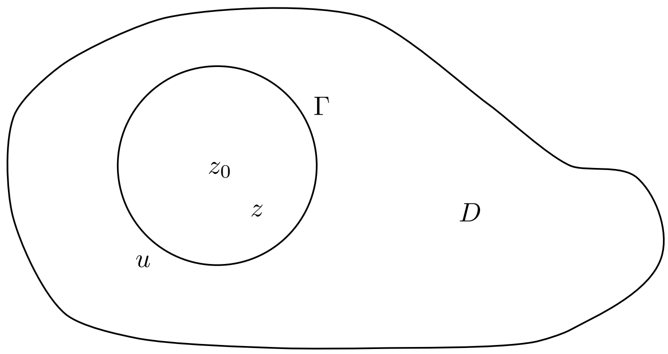
Remarquons qu'il ne suffit pas d'écrire "z^α" pour définir la fonction $z \mapsto z^\alpha$ en tant que fonction holomorphe en z lorsque l'exposant α est un nombre complexe. La seule façon simple pour définir la fonction en question est de l'exprimer à l'aide des fonctions logarithmes. Lorsqu'on a défini une fonction logarithme, on peut définir $z \mapsto z^\alpha$ par la formule
$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$
où log désigne la fonction $z \mapsto \log z$ choisie.

Le domaine de définition et d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est donc pour α complexe quelconque, celui de la fonction log qu'on a choisie : le plan complexe $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite particulière.

Cependant, pour des valeurs particulières de α le domaine d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est plus grand que celui donné par le domaine de la fonction log considérée. On a en particulier

1. Lorsque $\alpha = m$ entier positif ou nul, la fonction $z \mapsto z^m$ peut être définie et holomorphe sur tout le plan complexe $z \in \mathbf{C}$.
2. Lorsque $\alpha = -n$ où n est entier positif, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ peut être définie et holomorphe pour $z \in \mathbf{C} - \{0\}$.

Exercice 29 *La fonction*
$$z \mapsto i \arg z = \log z - \ell n|z|$$
est-elle holomorphe ?



2.5.3 La formule intégrale de Cauchy

Théorème 4 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe D. Considérons un cercle Γ contenu dans D et centré en z_0 (on le supposera parcouru dans le sens trigonométrique). Soit un point z à* l'intérieur *de Γ. On peut exprimer $f(z)$ en fonction des valeurs $f(u)$ de f sur Γ,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

Preuve. Soit Γ_r le cercle de centre z et de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique. Pour r assez petit, Γ_r est contenu dans D. De plus, il est homotope à Γ dans le domaine d'holomorphie $D \setminus \{z\}$ de $u \mapsto \frac{f(u)}{u-z}$. D'après le théorème 3, l'intégrale de cette fonction sur Γ_r, pour tout r, est égale à son intégrale sur Γ. En utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_r} \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z).$$

Par conséquent, pour tout r assez petit,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_r} \frac{f(u)}{u-z}\,du = f(z).\blacksquare$$

Remarque 30 *On peut remplacer Γ par tout autre circuit obtenu par déformation continue de Γ et gardant z en son intérieur, à condition de rester dans D (Corollaire 24).*

Exercice 31 *Exprimer les coefficients a_n (cf. Définition 13) à l'aide de l'intégrale de $f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ sur Γ.*

2.6 Calcul des résidus.

2.6.1 Résidu

Supposons que la fonction $z \mapsto f(z)$ soit définie et holomorphe dans un domaine connexe (mais non simplement connexe) de la forme $D-\{a\}$ Supposons que pour z appartenant au disque ouvert $0 < |z-a| < \rho$ (*disque privé du point* a) la fonction f soit développable en une série de Laurent convergente de la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

(sur la couronne $0 < |z-a| < \rho$ de rayon intérieur nul).

Alors, pour un cercle Γ de centre a et de rayon $r \in]0, \rho[$, contenu dans $D - \{a\}$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2i\pi c_{-1}.$$

Preuve. Posons, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $t \in [0, 2\pi]$,

$$g(n,t) = i\, c_n r^{n+1} e^{i(n+1)t}.$$

Alors

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{[0,2\pi]} (\sum_{n\in\mathbf{Z}} g(n,t))\, dt = \int_{[0,2\pi]} (\int_{\mathbf{Z}} g(n,t)\, d\mu)\, dt,$$

où μ est la mesure de décompte sur $\mathbf{Z}$. La fonction g est intégrable sur $\mathbf{Z} \times [0, 2\pi]$ relativement à la mesure produit de la mesure de décompte sur $\mathbf{Z}$ et de la mesure de Lebesgue sur $[0, 2\pi]$. En effet, la série $f(r)$ étant absolument convergente, la série $|g(n,t)| = |c_n| r^{n+1}$ est convergente, $\int_{\mathbf{Z}} |g(n,t)|\, d\mu = \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n| r^{n+1}$ est fini, donc

$$\int_{[0,2\pi]} (\int_{\mathbf{Z}} |g(n,t)|\, d\mu)\, dt = 2\pi \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n| r^{n+1}$$

est fini. D'après le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à la mesure produit de la mesure de décompte et de la mesure de Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f(z)\, dz &= \int_{\mathbf{Z}} (\int_{[0,2\pi]} g(n,t)\, dt)\, d\mu \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \int_\Gamma c_n z^n\, dz \\ &= 2i\pi c_{-1}, \end{aligned}$$

avec la Proposition 26.■

Définition 32 *Le nombre complexe* c_{-1} *s'appelle* le résidu de f au point a *et se note*

$$c_{-1} = Rés(f, a).$$

Exemple 33 *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0, telle que $f(0) \neq 0$. Alors la fonction définie par $g(z) = f(z)/z$ a un résidu en 0 qui vaut $f(0)$.*

En effet, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $g(z) = \dfrac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots + a_{n+1} z^n + \cdots$.

Définition 34 *On dit que f possède un* pôle d'ordre $N \geq 1$ *en $z = a$ lorsque son développement en série de Laurent commence à l'ordre $n = -N$,*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

avec $c_{-N} \neq 0$.

Lorsque le pôle est d'ordre $N = 1$ en $z = a$, on dit que le pôle est simple*.*

Exemple 35 *Soit $f(z) = \dfrac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$ une fraction rationnelle. Alors chaque racine de multiplicité m de Q est un pôle d'ordre m de f.*

Si la dénominateur $\mathcal{Q}$ n'a que des racines simples, alors f n'a que des pôles simples.

Proposition 36 *Soit f une fonction qui possède un pôle simple en a. Le résidu de f en a est donné par la formule*

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Preuve. Dans ce cas

$$f(z) = c_{-1} \frac{1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots . \blacksquare$$

2.6.2 Théorème des résidus

Théorème 5 *Soit $z \to f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine connexe $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ où D est supposé simplement connexe, les a_j sont en nombre fini. On note $Rés(f, a_j)$ le résidu de f en a_j. Considérons un chemin fermé C contenu dans D' et entourant k_j fois chaque point a_j. Alors*

$$\int_C f(z)\, dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} k_j Rés(f, a_j).$$

Preuve. Par hypothèse, on peut déformer dans C dans D jusqu'à un chemin constant, pour lequel l'intégrale est nulle. Au cours de la déformation, le lacet va traverser k_j fois le point a_j. A chaque traversée, l'intégrale saute de la quantité Rés(f, a_j).$\blacksquare$

2.6.3 Lemmes de Jordan

Le théorème des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales par la méthode dite *"des résidus"*. Cependant, pour mener à bien les calculs il est indispensable de connaitre le comportement de $\int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz$ où $\Gamma(R)$ est un arc de cercle d'ouverture constante et $R \to \infty$ (même question pour $\Gamma(r)$ et $r \to 0$). On a pour cela les deux lemmes suivants dits *lemmes de Jordan.*

Lemme 37 *On suppose que pour z appartenant à une portion de disque centré en 0 et d'ouverture $\theta_2 - \theta_1$,*

- *on puisse trouver pour* $|z| = r < r_0$ *une constante* $M(r_0)$ indépendante *de* r *telle que* $|zf(z)| < M(r_0)$.
- *Pour presque tout* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *on ait* $\lim_{r\to 0} re^{i\theta} f(re^{i\theta}) = l_1$.

Alors

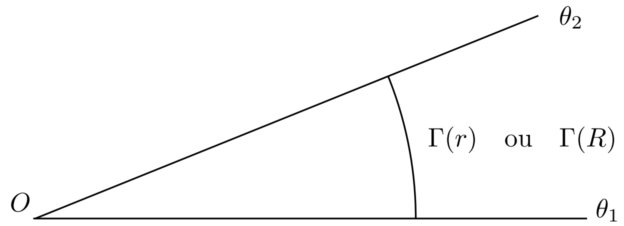
$$\lim_{r\to 0} \int_{\Gamma(r)} f(z)dz = i\, l_1(\theta_2 - \theta_1).$$

Lemme 38 *On suppose que pour* z *appartenant à une portion de disque centré en* 0 *et d'ouverture* $\theta_2 - \theta_1$,

- *On puisse trouver pour* $|z| = R > R_0$ *une constante* $M(R_0)$ indépendante *de* R *telle que* $|zf(z)| < M(R_0)$.
- *Pour presque tout* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *on ait* $\lim_{R\to\infty} Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) = l_2$.

Alors

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz = i\, l_2(\theta_2 - \theta_1).$$



Preuve. On applique le théorème de convergence dominée.■

2.6.4 Exemple

Calcul de l'intégrale $I(t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ *pour* $t > 0$ *puis pour* t *réel.*

On choisit la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

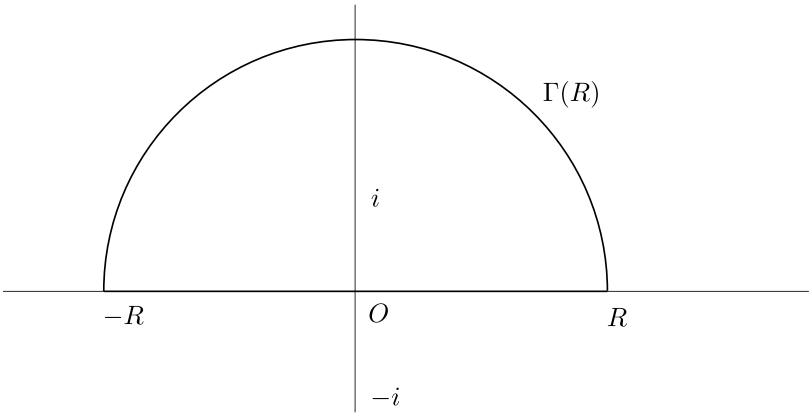
définie et holomorphe sur $D = \mathbf{C}$ privé des deux points i et $-i$. On choisit un contour constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels et d'un demi-cercle $\Gamma(R)$, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand pour entourer le point i.

Comme $1 + z^2 = (z - i)(z + i)$ et que le numérateur de $f(z)$ ne s'annule pas pour $z = i$, le point $a_1 = i$ est de toute évidence un pôle simple pour la fonction f.

Application du théorème des résidus.

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i).$$

Application du Lemme de Jordan.



Calculons $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz$. On a

$$zf(z) = z\frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

et pour $z \in \Gamma(R)$ la paramétrisation

$$z(\theta) = R\cos\theta + iR\sin\theta \quad \theta \in [0,\pi].$$

Par conséquent,

$$|zf(z)| = R\frac{e^{-Rt\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} \leq \frac{R}{|R^2-1|},$$

car $t\sin\theta \geq 0$.

1. Posons $M(R) = \frac{R}{|R^2-1|}$. Puisque de toute évidence $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, il y a une valeur R_0 telle que pour $R > R_0$ on ait $M(R) < M(R_0)$.
2. Par ailleurs on a
$$\lim_{R\to\infty} |zf(z)| = 0,$$
ce qui impose que $\lim_{R\to\infty} zf(z) = 0$, donc que $l_2 = 0$.

Le lemme 38 s'applique donc sur $\Gamma(R)$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz = 0.$$

Calcul du résidus de f en $z = i$. Puisque le point i est pôle simple de f, on peut appliquer la formule 36 donnant le résidu en un pôle simple

$$\text{Rés}(f,i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Calcul de $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx$. La fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\,dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Prenons la $\lim_{R\to\infty}$ de chacun des deux membres de la formule du théorème des résidus,

$$\lim_{R\to\infty}[\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz] = 2i\pi\frac{e^{-t}}{2i}.$$

Finalement, pour $t > 0$,

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-t}.$$

Question : Que vaut $I(t)$ pour $t \leq 0$?

2.7 Principe du prolongement analytique

Ce "principe" permet, connaissant la valeur d'une fonction holomorphe en certains points de son domaine d'holomorphie, de déterminer sa valeur en tout point de ce domaine.

Théorème 6 *Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D du plan complexe telle que $f(z_i) = 0$ pour une suite infinie de points z_i qui* converge *vers un point $a \in D$. Alors $f(z) = 0$ pour* tout $z \in D$.

Preuve. On développe $f(z)$ en série de puissances de $(z - a)$ sur un disque $V = \{z : |z - a| < r\}$ contenu dans D.

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + c_4(z-a)^4 + ...$$

On définit en outre la famille de fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ par les séries convergentes dans V

$$f_1(z) = c_1 + c_2(z-a) + c_3(z-a)^2 + c_4(z-a)^3 + c_5(z-a)^4 + ...$$

$$f_2(z) = c_2 + c_3(z-a) + c_4(z-a)^2 + c_5(z-a)^3 + c_6(z-a)^4 + ...$$

etc... Ces fonctions étant continues et dérivables en a, on montre successivement que

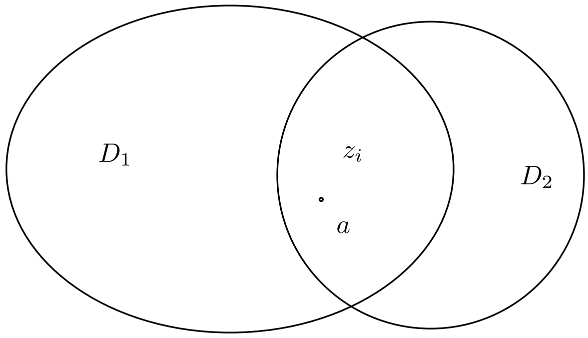
$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \cdots = c_n = 0$$

pour tout n entier positif.■

Théorème 7 (dit du prolongement analytique). *Soient deux fonctions f_1 et f_2 holomorphes chacune dans leurs domaines respectifs D_1 et D_2 supposés connexes. Supposons que $f_1(z_i) = f_2(z_i)$ pour (au minimum) une suite infinie de points $z_i \in D_1 \cap D_2$* convergente *vers un point $a \in D_1 \cap D_2$.*

On a alors

1. *$f_1(z) = f_2(z)$ pour tout $z \in D_1 \cap D_2$.*



2. *Il existe une fonction* unique $z \mapsto F(z)$ *holomorphe dans le domaine* $z \in D_1 \cup D_2$ *telle que*
   $F(z) = f_1(z)$ *pour* $z \in D_1$
   $F(z) = f_2(z)$ *pour* $z \in D_2$

Dans de telles circonstances, on dit que la fonction $z \mapsto F(z)$ est le "prolongement analytique" de f_1 (ou de f_2) du domaine D_1 (ou D_2) au domaine $D_1 \cup D_2$.

Remarque 39 *Dans la pratique, il se trouve très souvent que* $f_1(z) = f_2(z)$ *sur un segment ouvert de* $D_1 \cap D_2$*, le théorème 2 s'applique donc.*

Exemple 40 *Considérons les fonctions*

$$z \mapsto f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

qui est holomorphe dans le disque $|z| < 1$*, et*

$$z \mapsto f_2(z) = \frac{1}{1-z},$$

qui est holomorphe dans $\mathbf{C} \setminus \{1\}$.

Puisque $f_1(z) = f_2(z)$ pour les $z = x$ réels compris entre 0 et 1, on déduit du Théorème 7 que f_1 est "prolongeable analytiquement" en une fonction F (égale ici à f_2) holomorphe dans tout le plan complexe privé du point $z = 1$.