

Chapitre 4

Distributions

4.1 Introduction

Il y a plusieurs raisons pour introduire la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même) alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques.

4.1.1 Unité pour la convolution.

Comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de la convolution des fonctions intégrables, il n'y a pas de fonction intégrable Δ qui puisse servir d'unité pour le produit de convolution de ces fonctions. Dans l'espace des distributions, il y a effectivement une telle distribution unité pour le produit de convolution : c'est la distribution de Dirac, qui satisfait à

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

4.1.2 Densité de charge d'une charge ponctuelle

En électrostatique, le potentiel électrique $V(\vec{r})$ en un point \vec{r} donné de l'espace, pour une distribution de charge de densité $\rho(\vec{r})$ donnée est solution de l'équation de Laplace

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{r}).$$

La question qu'on se pose est de savoir ce que signifie cette équation dans la limite où la charge, source du potentiel, peut d'une manière physiquement raisonnable être assimilée à une charge ponctuelle. On sait que dans ce cas le potentiel créé (mesuré physiquement) est un potentiel en $\frac{1}{r}$. L'équation de Laplace pose par contre dans ce cas un problème mathématique sérieux : quelle est la densité de charge d'une charge ponctuelle? La réponse la plus simple se trouve naturellement dans la théorie des distributions. La densité d'une telle charge est en fait proportionnelle à une distribution de Dirac située au point où se trouve la charge électrique.

4.1.3 Mesure d'une grandeur physique

Considérons la mesure d'une grandeur physique relativement courante comme la température d'un fil rectiligne "en un point donné". On peut se convaincre que pour des raisons évidentes, une telle mesure n'est jamais réalisable parfaitement. Tout thermomètre, quel que soit le principe physique utilisé pour la mesure, possède *une extension spatiale* qu'il est impossible de réduire à celle d'un point : ce qu'il faudrait réaliser pour pouvoir mesurer la température en *un point* x_0 . On peut cependant admettre, dans le cas d'une mesure réaliste de température, que le thermomètre prend en compte toutes les températures dans un "voisinage" du point x_0 selon une fonction de sensibilité ϕ_0 (fig.1.) de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la température le

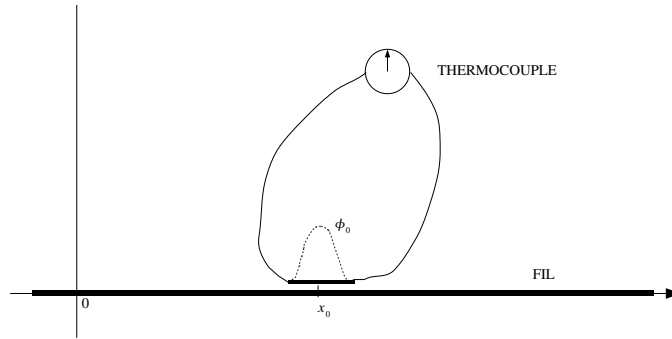


FIG. 4.1 – Mesure d’une température le long d’une barre

long de la barre (fonction dont on ignore *a priori* ce qu’elle vaut *vraiment* en un point précis de la barre), on puisse dire que la température mesurée T sera en fait

$$T_0 = \int T(x)\phi_0(x) dx.$$

Si on effectuait la mesure en un autre point x_1 on obtiendrait

$$T_1 = \int T(x)\phi_1(x) dx$$

etc...

On voit que la température mesurée T , dans l’hypothèse où les fonctions $T(x)$, ϕ_0 , ϕ_2 etc... sont suffisamment régulières, se présente sous la forme d’une expression linéaire en la fonction de sensibilité ϕ . On peut noter avantageusement cette expression sous la forme

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx$$

Lorsque le produit $x \mapsto T(x)\phi(x)$ est intégrable Lebesgue, cette écriture est parfaitement justifiée. Cependant, dans beaucoup de cas concrets, la grandeur physique en question (ici il s’agirait de $T(x)$) se révèle être trop *singulière* pour que l’intégrale écrite puisse avoir un sens quelconque avec un choix réaliste pour la fonction ϕ .

Partant de cet échec, on a progressivement abstrait l’idée de concepts mathématiques qui ne préserveraient que l’indispensable de l’expression

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x) dx,$$

partant d’un ensemble de fonctions ϕ représentant de manière suffisante toutes les mesures d’une grandeur physique donnée qu’il est possible d’effectuer. L’ensemble des fonctions ϕ prend alors naturellement le nom d’ensemble de **fonctions “test”** ou **fonctions “d’essai”**. La mesure d’une grandeur physique T est alors représentée par le “crochet”

$$\langle T, \phi \rangle$$

indépendamment d'une forme intégrale ou non pour cette expression. L'ensemble des grandeurs T "mesurables" par les fonctions d'essai prend alors le nom générique de **distributions**.

Quel doit être le minimum exigé pour les objets ainsi considérés ?

1. L'ensemble des fonctions d'essai constitue un *espace vectoriel de fonctions*. C'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions d'essai est encore une fonction d'essai.
2. L'ensemble des distributions est l'ensemble des **formes linéaires** sur l'espace vectoriel des fonctions d'essai.
3. Le résultat de la mesure de T par ϕ est alors le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$.

Remarque. Dans un esprit d'utilisation pratique (et élémentaire) des distributions, nous réduisons ici, les considérations d'analyse fonctionnelle au minimum. Pour cette raison, nous considérerons que **toutes** les formes linéaires sur nos espaces de fonctions test sont des formes linéaires *continues*. Mathématiquement on sait que de telles formes linéaires non continues existent, mais comme personne n'a réussi, à ce jour, à les écrire explicitement, nous ferons comme si elles n'existaient pas !

4.2 L'espace des fonctions d'essai \mathcal{D}

Choisissons pour commencer un espace de fonctions test qui présente toutes les caractéristiques nécessaires aussi bien physiques que mathématiques.

Définition 1 Les fonctions test $x \mapsto \phi(x)$ sont définies pour x réel et sont à valeurs complexes. On exige d'elles qu'elles soient indéfiniment dérivables pour toutes les valeurs de x (elles sont donc C^∞). Elles sont de plus, nulles en dehors d'un intervalle borné. L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ ou simplement \mathcal{D} .

L'ensemble des fonctions test de \mathcal{D} constitue un espace vectoriel sur \mathbf{C} . On peut se convaincre que ce sont là des propriétés raisonnables pour des fonctions de sensibilité d'appareil.

Exemple 2 La fonction ξ_a définie par

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exemple 3 Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de \mathcal{D} , alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} .

On montre [1] que la classe de toutes les fonctions α telles que $\alpha\phi$ est une fonction de \mathcal{D} quel que soit ϕ appartenant à \mathcal{D} , est précisément l'ensemble de toutes les fonctions C^∞ .

Remarque 4 Pour ceux qui veulent en savoir plus, il faut dire qu'il est possible de définir une notion de proximité entre deux fonctions de \mathcal{D} . C'est ce qu'on désigne sous le nom de **topologie** sur \mathcal{D} [2].

Exemple 5 Soient f une fonction intégrable sur \mathbf{R} , nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors leur produit de convolution

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\phi(x-t) dt$$

est une fonction de \mathcal{D} .

Exemple 6 Soit ϕ une fonction de \mathcal{D} . Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans \mathcal{D} . On rappelle que

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x - a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exemple 7 Les fonctions d'essai de \mathcal{D} ainsi que toutes leurs dérivées sont intégrables et bornées.

Ces deux propriétés sont souvent utilisées dans les calculs.

4.3 L'espace des distributions \mathcal{D}'

En accord avec la discussion de l'introduction, nous définissons les distributions de la façon suivante.

Définition 8 Une distribution est une application T qui à chaque fonction de \mathcal{D} fait correspondre un nombre complexe $T(\phi)$ FINI qui vérifie la propriété suivante

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$$

pour tous nombres complexes a et b et toutes fonctions d'essai ϕ et ψ dans \mathcal{D} .

Remarque 9 En termes algébriques, on voit donc qu'une distribution T est une **forme linéaire** sur l'espace vectoriel \mathcal{D} . D'où la notation \mathcal{D}' qui indique que l'espace des distributions est en fait **un espace dual** de l'espace vectoriel des fonctions d'essai [3].

En théorie des distributions on note en général $T(\phi)$ sous la forme $\langle T, \phi \rangle$ et on dit que la distribution T est appliquée à ϕ . Ceci est en conformité avec notre notation de l'introduction qui exprime le fait qu'on peut dire que physiquement $\langle T, \phi \rangle$ est le résultat d'une mesure "par ϕ " de la distribution T .

L'espace des distributions \mathcal{D}' est aussi un espace vectoriel sur \mathbf{C} , il suffit pour cela de définir la somme $T_1 + T_2$ de deux distributions ainsi que le produit aT d'un nombre complexe a et d'une distribution T . On définit

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} , et

$$\langle aT, \phi \rangle = a \langle T, \phi \rangle .$$

pour tout nombre complexe a et tout ϕ dans \mathcal{D} .

La distribution nulle, quant à elle, est définie par

$$T = 0 \iff \langle T, \phi \rangle = 0$$

pour tout ϕ dans \mathcal{D} .

Remarquons qu'une telle définition est parfaitement raisonnable du point de vue expérimental puisqu'elle veut dire qu'une quantité physique est nulle si et seulement si n'importe quelle mesure représentée par ϕ donne un résultat nul.

Mise en garde. Il n'est pas question de définir le produit de deux distributions quelconques entre elles car cela, on le verra par la suite, ne peut se faire que dans des cas **extrêmement limités**. Ce dernier point est bien entendu une des tares principale de la théorie des distributions et limite ainsi leur utilisation aux *problèmes linéaires*. Il touche d'ailleurs aux aspects les plus fondamentaux de la physique quantique moderne.

4.3.1 Les distributions régulières

Définition 10 Une fonction f est dite **localement intégrable** si elle est intégrable sur tout intervalle borné (fini). On note $f \in L^1_{loc}$ cette propriété.

Exemple 11 À toute fonction localement intégrable on peut associer une distribution définie par

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ dans \mathcal{D} .

Exemple 12 Étant données deux fonctions localement intégrables f et g égales presque partout, i.e.

$$f(x) = g(x) \quad p.p. dx,$$

les distributions associées sont égales,

$$T_f = T_g.$$

La réciproque est aussi vraie [4]. D'où

Théorème 1

$$T_f = 0 \iff f(x) = 0 \quad p.p. dx.$$

Définition 13 Une distribution T est **régulière** si elle est associée à une fonction localement intégrable f .

Notation 14 Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter T_f tout simplement f .

Par contre la notation $f(x)$, tolérée pour une fonction f l'est moins pour la distribution T_f , car elle laisse croire à tort qu'il est possible de connaître la valeur d'une distribution en un point précis x (elle est cependant utilisée!).

Exemple 15 C'est ainsi que nous définissons la distribution (régulière) constante C par

$$\langle C, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} C\phi(x) dx = C \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ . En particulier $C = 0$ définit la distribution (régulière) nulle.

Exemple 16 De même, la fonction de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

définit la distribution de Heaviside H par

$$\langle H, \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} H(x)\phi(x) dx = \int_{\mathbf{R}^+} \phi(x) dx,$$

et la fonction $2H(x) - 1 = \text{sgn}(x)$ définit la distribution ϵ , qui est aussi notée sgn_x .

4.3.2 Distributions non régulières

Définition 17 Toute distribution qui n'est pas régulière est dite non régulière.

Exemple 18 La distribution de Dirac à l'origine δ est définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Elle n'est pas régulière.

Exemple 19 La distribution de Dirac δ_{x_0} au point $x_0 \in \mathbf{R}$ est définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Mise en garde. Les ouvrages de Physique et d'Électronique utilisent dans leur grande majorité la notation $\delta(x)$ pour la distribution δ et $\delta(x - x_0)$ pour la distribution δ_{x_0} . Cette notation est une source d'erreur constante dans les calculs, puisqu'elle laisse supposer que ces distributions ont une valeur donnée en un point donné. Pour éviter les erreurs, il est donc fortement recommandé d'effectuer les calculs au sens des distributions, quitte à présenter ensuite les formules finales comme le font traditionnellement les physiciens et les électroniciens.

Exemple 20 La forme linéaire $vp\frac{1}{x}$ définie par

$$\langle vp\frac{1}{x}, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{x < -\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{x > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx \right]$$

pour toute fonction d'essai ϕ , est une distribution non régulière.

4.4 Suites et séries de distributions

4.4.1 Limite d'une suite de distributions.

Définition 21 On dit que la suite de distributions $\{T_n\}_0^\infty$ de \mathcal{D}' , converge vers la distribution T si la suite de nombres complexes $\langle T_n, \phi \rangle$ tend vers le nombre complexe $\langle T, \phi \rangle$ pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

On écrit cela sous la forme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D})T_n = T.$$

Ce qui, d'après la définition est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ de \mathcal{D} .

Remarque 22 Si cette distribution limite T existe, elle est unique.

Remarque 23 Si on peut trouver un nombre $K(\phi)$ qui dépend de la fonction d'essai ϕ choisie et qui est tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \phi \rangle = K(\phi)$$

Alors la suite de distributions T_n tend vers la distribution T , et on a

$$\langle T, \phi \rangle = K(\phi).$$

Remarque 24 Du point de vue expérimental, cette **limite au sens des distributions** veut dire que pour n suffisamment grand la mesure par ϕ de la grandeur T_n donne pratiquement la même valeur que celle de T . Il ne devient plus possible de distinguer expérimentalement ces deux distributions.

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une *distribution régulière*.

Exercice 25 Montrer que si T_λ est la distribution associée à la fonction $\sin \lambda x$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_\lambda = 0.$$

Noter qu'une suite de distributions régulières peut avoir comme limite une *distribution non régulière*.

Exercice 26 On définit la fonction porte Π par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et on pose $g_k(x) = k\Pi(kx)$. Montrer que l'on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')g_k = \delta.$$

4.4.2 Séries de distributions

Définition 27 On considère la suite de distributions $\{T_n\}_1^\infty$. On dit que la série de distributions

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

définit une distribution T de \mathcal{D}' , si la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^N T_n$$

converge au sens des distributions vers T , c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \sum_{n=1}^N T_n = T.$$

Dans la pratique, on a très souvent des séries du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$. Dans ce cas la définition de la convergence est tout à fait analogue au cas précédent : il suffit en fait de considérer la convergence de la suite des sommes partielles "symétriques" $S_N = \sum_{n=-N}^N T_n$.

Exemple 28 La suite $\Delta_N = \sum_{n=-N}^N \delta_n$ converge dans \mathcal{D}' vers une distribution notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_n$, qu'on appelle *Cha* et qu'on note *III* (lettre de l'alphabet cyrillique). En physique on l'appelle aussi "Peigne de Dirac".

4.4.3 Suites de fonctions convergeant vers δ

Deux théorèmes sont d'un usage courant et permettent de reconnaître si une suite de distributions régulières converge vers δ .

Théorème 2 Soit $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ une suite de fonctions positives intégrables telles que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$ et que $f_n(x)$ soit nulle en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n]$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$. Alors la suite de distributions régulières définies par f_n tend vers δ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')f_n = \delta.$$

Théorème 3 Soit f une fonction intégrable vérifiant $\int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1$. On considère, pour $\varepsilon > 0$ la distribution régulière définie par la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Alors f_ε tend vers δ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{D}') f_\varepsilon = \delta.$$

Exercice 29 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = k\Pi(kx)$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{\xi_a(kx)}{\int_{\mathbf{R}} \xi_a(kx) dx}$$

où Π et ξ_a ont été définis précédemment.

Exercice 30 Démontrer que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta$ pour

$$g_k(x) = \frac{\sin^2 kx}{\pi k x^2}$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{1}{k\pi} \frac{1}{x^2 + \frac{1}{k^2}}.$$

Exercice 31 En admettant [5] que l'on a pour $\lambda > 0$ (avec des notations incorrectes !)

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\mathcal{D}') \frac{\sin \lambda x}{x} = \pi \delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(k) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi kx} dx.$$

Remarque 32 On voit donc sur ces derniers exemples qu'il est possible d'approcher une distribution aussi "singulière" que δ par des distributions "extrêmement" régulières. Le cas le plus spectaculaire étant celui qui est fourni par le deuxième exemple de l'exercice 30, où les distributions approchant δ sont associées à des fonctions $g_k(x)$ qui se trouvent être des fonctions d'essai dans \mathcal{D} .

Ceci est en fait une propriété générale. On démontre qu'on peut approcher toute distribution de \mathcal{D}' par une suite de distributions régulières associées à des fonctions d'essai de \mathcal{D} . On dit que l'espace \mathcal{D} est **dense** dans \mathcal{D}' .

4.5 Opérations élémentaires sur les distributions

Exercice 33 Désignons par f et g les distributions régulières associées aux deux fonctions localement intégrables f et g . Montrer que l'on a, pour toute fonction d'essai ϕ

- $\langle f + g, \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \langle g, \phi \rangle$
- $\langle \lambda f, \phi \rangle = \lambda \langle f, \phi \rangle$ pour $\lambda \in \mathbf{C}$
- $\langle \alpha f, \phi \rangle = \langle f, \alpha \phi \rangle$ pour α , fonction C^∞
- $\langle \tau_a f, \phi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbf{R}$
- $\langle d_a f, \phi \rangle = \langle f, |a| d_{1/a} \phi \rangle$ pour $a \in \mathbf{R} - 0$

Pour pouvoir reproduire ces résultats particuliers, on pose par définition, pour toute fonction test ϕ :

Somme. Pour deux distributions T_1 et T_2 ;

$$\langle T_1 + T_2, \phi \rangle = \langle T_1, \phi \rangle + \langle T_2, \phi \rangle .$$

Produit par un nombre. Pour une distribution T et un nombre complexe $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\langle \lambda T, \phi \rangle = \lambda \langle T, \phi \rangle .$$

Produit par une fonction C^∞ . Soient une distribution T de \mathcal{D}' et α une fonction C^∞ , on définit leur produit αT par

$$\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle .$$

Exemple 34 Pour α , fonction C^∞

$$\alpha \delta = \alpha(0) \delta .$$

Cette relation est souvent interprétée en physique en disant que δ est une **distribution propre** de l'**opérateur de multiplication** par une fonction α , avec la **valeur propre** $\alpha(0)$.

Exemple 35 En désignant par x la fonction qui à x donne x

$$x \delta = 0 .$$

Exemple 36

$$xvp \frac{1}{x} = 1 .$$

Cette relation est extrêmement intéressante, car elle nous dit que l'inverse de x au sens des distributions n'est autre que la distribution $vp \frac{1}{x}$ et non pas $\frac{1}{x}$ qui, de toute évidence ne peut pas définir une distribution régulière (pourquoi ?).

Exemple 37 Soit α , une fonction de $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ qui est C^∞ et qui ne s'annule jamais. Pour toute distribution T , on a

$$\alpha T = 0 \iff T = 0 .$$

On admettra [6] que si $T \in \mathcal{D}'$

$$xT = 0 \iff T = k\delta .$$

où k est un nombre complexe arbitraire.

Translation. Pour $a \in \mathbf{R}$, la tradatée $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par

$$\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a} \phi \rangle .$$

Exemple 38

$$\tau_a \delta = \delta_a .$$

Exemple 39 Soit α une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution de \mathcal{D}' . Pour tout a réel,

$$\tau_a(\alpha T) = (\tau_a \alpha)(\tau_a T) .$$

Exemple 40 Pour tout x_0 réel,

$$(x - x_0)T = 0 \iff T = k\delta_{x_0} .$$

Dilatation. Pour $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, la dilatée $d_a T$ d'une distribution T est définie par

$$\langle d_a T, \phi \rangle = \langle T, |a| d_{\frac{1}{a}} \phi \rangle .$$

Exemple 41

$$d_a \delta = |a| \delta .$$

Exemple 42

$$d_a \delta_{x_0} = |a| \delta_{ax_0} .$$

4.5.1 Parité

Posons $\check{T} = d_{-1}T$

Exemple 43 Pour toute fonction test ϕ ,

$$\langle \check{T}, \phi \rangle = \langle T, \check{\phi} \rangle,$$

où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Définition 44 On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$ et impaire si $\check{T} = -T$.

Exemple 45 La distribution δ est paire, de même que $\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}$.

Exemple 46 La distribution $vp \frac{1}{x}$ est impaire, de même que $\text{sgn}_x = 2H - 1$.

Exemple 47 La distribution H n'a pas de parité bien définie, de même que δ_{x_0} pour $x_0 \neq 0$.

Exercice 48 Toute distribution peut s'écrire de façon unique comme somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire

$$T = \frac{T + \check{T}}{2} + \frac{T - \check{T}}{2}$$

Appliquer cette formule aux distributions H et δ_{x_0} .

4.6 Dérivée d'une distribution

C'est une opération qui est toujours réalisable et celà autant de fois que l'on veut sur les distributions!

Exemple 49 Considérons une fonction $x \rightarrow f(x)$ qui est dérivable à dérivée continue pour tout x , on dit que c'est une fonction C^1 , et on note $x \rightarrow f'(x)$ sa dérivée. Les deux fonctions f et f' définissent chacune une distribution que nous noterons aussi respectivement f et f' et on a

$$\langle f', \phi \rangle = - \langle f, \phi' \rangle$$

Définition 50 Par analogie, nous dirons que la **dérivée** d'une distribution T est la distribution T' définie par

$$\langle T', \phi \rangle = - \langle T, \phi' \rangle$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

On vérifie que pour une distribution régulière T_f associée à une fonction f qui est C^1 , on retrouve la formule précédente.

Exemple 51 a) Pour une constante K on a $K' = 0$.

b) $H' = \delta$

c) $(\text{sign}_x)' = 2\delta$

Exemple 52 La dérivée p -ième $\delta^{(p)}$ de δ est définie par

$$\langle \delta^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \phi^{(p)}(0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ .

Exemple 53 Les deux distributions δ et δ' sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que si a et b sont deux nombres complexes arbitraires

$$a\delta + b\delta' = 0 \iff a = b = 0.$$

Exemple 54 Si T est une distribution et α une fonction C^∞ on a

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

On admettra aussi [7] que l'on a

$$T' = 0 \iff T = K$$

où K est une constante.

Exemple 55 Formule des sauts. Soit une fonction f qui est C^1 **par morceaux**, on suppose pour simplifier la présentation, qu'elle n'a de discontinuité qu'en un seul point a de l'axe réel, on a

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a \delta_a.$$

où σ_a désigne le **saut (fini)** de la fonction au point a ,

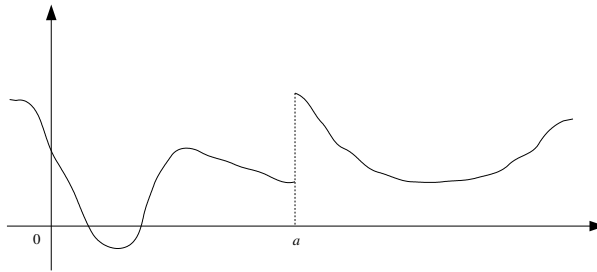


FIG. 4.2 – Fonction C^1 par morceaux

$$\sigma_a = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a + \varepsilon) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(a - \varepsilon),$$

et où on a noté $T_{\{f'\}}$ la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout $x \rightarrow f'(x)$.

La généralisation est immédiate au cas où la fonction f possède N sauts aux points $\{a_i\}_1^N$

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^N \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$$

et même au cas où $N \rightarrow \infty$ sous la condition où la série écrite soit une *série convergente* au sens des distributions.

Exercice 56 Calculer la dérivée au sens des distributions de

a) La distribution régulière Π définie par la fonction porte $\Pi(x)$.

b) La distribution régulière Λ définie par la fonction

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 57 Calculer, au sens des distributions, les dérivées

- a) $(|x|)^{(p)}$.
- b) $(|x|^n)'$ pour n entier et ≥ 1 .
- c) $(\alpha H)^{(p)}$ où α est une fonction C^∞ .

Application. L'étudiant qui a l'occasion d'utiliser un oscillographe cathodique pourra "dérivée" à l'oscillographe n'importe quel signal et se convaincre sur un exemple donné (la distribution H par exemple) que le résultat obtenu n'est autre que la dérivée du signal au sens des distributions.

4.7 Les opérateurs continus sur \mathcal{D}'

Définition 58 Un opérateur linéaire A sur \mathcal{D}' est une application linéaire de \mathcal{D}' dans \mathcal{D}' , c'est-à-dire que

$$A(aT_1 + bT_2) = aA(T_1) + bA(T_2)$$

pour tout nombre complexe a, b et toute distribution T_1 et T_2 de \mathcal{D}' .

Définition 59 Un opérateur A est un opérateur continu si, quelle que soit la suite convergente $\{T_n\}$ de distributions T_n de \mathcal{D}'

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')T_n = T,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(AT_n) = AT.$$

La dernière égalité peut encore s'écrire sous la forme lapidaire

$$\lim(AT_n) = A(\lim T_n),$$

indiquant que la continuité d'un opérateur A veut dire qu'on est autorisé à permuter l'action de A et la prise de la limite.

Exemple 60 Les opérateurs suivants, définis sur \mathcal{D}' , sont tous continus

- a) $T \rightarrow T + T_0$ où $T_0 \in \mathcal{D}'$
- b) $T \rightarrow aT$ où $a \in \mathbb{C}$
- c) $T \rightarrow \alpha T$ où $\alpha \in C^\infty$
- d) $T \rightarrow \tau_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- e) $T \rightarrow d_a T$ où $a \in \mathbb{R}$
- f) $T \rightarrow T'$

Exercice 61 Montrer que $\tau_1 III = III$. Que veut dire ce résultat? Montrer que III est paire.

Exercice 62 Calculer III' ; αIII où α est C^∞ . Calculer $(e^{2i\pi x} - 1)III$.

Exercice 63 Calculer $(|\cos x|)''$.

Exercice 64 Montrer que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} (\mathcal{D}')(\lambda \cos \lambda x) = 0$

Remarque 65 Une catégorie extrêmement importante d'opérateurs continus est constituée par les filtres en théorie du signal.

4.8 Les espaces $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

Nous n'avons considéré, jusqu'à présent, que des distributions "à une variable". Il est tout à fait possible de considérer des distributions "à n variables", les cas $n = 3$ et $n = 4$ représentant les cas physiques par excellence. En fait, au niveau élémentaire, la généralisation à n variables ne pose pas de gros problèmes, si ce n'est en ce qui concerne les notations. Ce n'est qu'à un niveau plus avancé (analyticité, causalité...) que la différence est importante entre $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

Définition 66 *L'ensemble des fonctions d'essai (test) $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est l'espace vectoriel sur \mathbf{C} des fonctions $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C}$ indéfiniment dérivables par rapport à toutes les variables $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ et qui sont nulles à l'extérieur d'un pavé borné.*

Donnons des exemples de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

a) Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \dots \phi_n$ un ensemble de n fonctions d'essai de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ (fonctions à une variable). La fonction Φ à n variables

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) \dots \phi_n(x_n)$$

est une fonction d'essai à n variables.

b) De même pour

$$\xi_a(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}}, & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 < a^2; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition 67 *On appelle $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ l'espace vectoriel sur \mathbf{C} des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.*

Exemple 68 *La forme linéaire δ définie par*

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0, 0, 0, \dots, 0),$$

pour toute fonction d'essai ϕ , est la distribution de Dirac à l'origine de \mathbf{R}^n .

Exemple 69 *La forme linéaire $\delta_{\vec{k}}$ avec $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ est définie par*

$$\langle \delta_{\vec{k}}, \phi \rangle = \phi(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n),$$

pour toute fonction d'essai ϕ . C'est la distribution de Dirac au point $\vec{k} \in \mathbf{R}^n$.

La plupart des notions introduites dans le cas d'une variable se transposent, avec les modifications appropriées, au cas de n variables. En particulier, en ce qui concerne les suites de distributions régulières qui convergent vers $\delta \in \mathbf{R}^n$, on a

Théorème 4 *Remplacer "intervalle" par "pavé" dans le théorème 2.*

Théorème 5 *Soit $\vec{x} \rightarrow f(\vec{x}) \in \mathbf{C}$ qui appartient à $L^1(\mathbf{R}^n)$ et qui vérifie*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\vec{x}) d^n x = 1.$$

Posons, pour $\varepsilon > 0$

$$f_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{\vec{x}}{\varepsilon}\right).$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))(f_\varepsilon) = \delta.$$

Exemple 70 Soit $f_\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{\pi \vec{x}^2}{\varepsilon^2}}$ avec $\varepsilon > 0$ et $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$. On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n))(f_\varepsilon) = \delta.$$

Définition 71 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. On définit la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_i} T$ de T au sens des distributions par

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

Exemple 72 On a pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

quelle que soit la paire $\{i, j\}$ d'indices $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Exercice 73 Soit Y la fonction définie sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ par

$$Y(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial y} = \delta.$$