

PROCESSUS STOCHASTIQUES

Stochastique vient du grec stokhastikos qui veut dire conjectural et de stockhos qui signifie but.

Se dit de phénomènes qui partiellement relèvent du hasard et pour lesquels on ne peut formuler que des prévisions globales d'ordre statistique.

En informatique un calculateur stochastique est un calculateur dans lequel l'information est codée par une probabilité.

1. INTRODUCTION

1.1. RAPPELS ET COMPLEMENTS

1.1.1. La fonction $o(h)$

Lors de l'étude des processus stochastiques à temps continu, nous utiliserons la notation $o(h)$

C'est une fonction de h définie dans un intervalle autour de l'origine et telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, ce qui signifie que lorsque h tend vers 0, $o(h)$ est négligeable par rapport à h .

EXEMPLES

$$2u^2 - u^3 = o(u)$$

$$1 - \cos u = o(u)$$

$$\sin u \neq o(u)$$

1.1.2. Espérances mathématiques conditionnelles

Soit $\{B_1, B_2, \dots\}$ une partition de l'univers et X une variable aléatoire discrète de distribution $p_n = p(X = x_n)$. alors d'après le théorème des probabilités composées on a

$$p_n = \sum_k p(X = x_n | B_k) p(B_k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

De même si X est continue de densité $f(x)$ on obtient

$$f(x) = \sum_k f(x | B_k) p(B_k)$$

où $f(x | B_k)$ est la densité conditionnelle de X sachant que l'événement B_k est réalisé.

L'espérance mathématique de X est donc

$$E(X) = \sum_k E(X | B_k) p(B_k)$$

où $E(X | B_k)$ est l'espérance mathématique conditionnelle de X sachant que B_k est réalisé.

Elle est définie par

$$E(X | B_k) = \sum_n x_n p(X = x_n | B_k)$$

ou par

$$E(X | B_k) = \int x f(x | B_k) dx .$$

1.1.3. Généralisations du théorème de multiplication

Nous aurons besoin de deux généralisations du théorème des probabilités composées ou de multiplication. Elles sont énoncées sans démonstration.

- Si les événements A_1, A_2, \dots, A_n sont de probabilité non nulle, on a :

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1 | A_2 \cap \dots \cap A_n) p(A_2 | A_3 \cap \dots \cap A_n) \dots p(A_{n-1} | A_n) p(A_n)$$

- Si A, B, C sont de probabilité non nulle, on a :

$$p(A \cap B | C) = p(A | B \cap C) p(B | C)$$

1.1.4. Quelques propriétés de la loi exponentielle

La loi exponentielle joue un rôle fondamental dans les processus stochastiques à temps continu. Nous allons en exposer les propriétés les plus importantes.

Soit un dispositif technique, dont la durée T de bon fonctionnement suit une loi exponentielle de densité

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pour } t \geq 0, \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre positif.}$$

- La loi exponentielle est **sans mémoire** : $p(T > t + u | T > u) = p(T > t) = e^{-\lambda t}$, où $t > 0$ et $u > 0$. Cela signifie que la probabilité de bon fonctionnement pendant un intervalle $]u, u + t]$ ne dépend que de la longueur t de cet intervalle.
- Si le dispositif fonctionne encore à l'instant t , la probabilité pour qu'il tombe en panne pendant l'intervalle $]t, t + \Delta t]$ est approximativement égale à $\lambda \Delta t$. En effet :

$$p(T \leq t + \Delta t | T > t) = \frac{p(t < T \leq t + \Delta t)}{p(T > t)} = 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

car $e^x = 1 + x + o(x)$.

- Soit T_1, T_2, \dots, T_n des variables aléatoires indépendantes distribuées selon des lois exponentielles de paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Alors $T = \min(T_1, T_2, \dots, T_n)$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.
- Voici une conséquence des deux dernières propriétés, très utile pour la suite. Supposons qu'à un instant donné t , n dispositifs fonctionnent indépendamment l'un de l'autre, la distribution commune de leurs durées de vie étant exponentielle de paramètre λ . La probabilité qu'exactement un de ces dispositifs tombe en panne pendant l'intervalle $]t, t + \Delta t]$ est donnée par $n\lambda \Delta t + o(\Delta t)$.

1.1.5. La loi Gamma

La **loi Gamma** de paramètre λ et n (ou **loi d'Erlang d'ordre n**) est la somme S_n de n variables indépendantes T_1, T_2, \dots, T_n obéissant à la même loi exponentielle de paramètre λ .

On montre que la densité de probabilité correspondante s'écrit $g_{\lambda,n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$ pour $t \geq 0$.

1.1.6. Valeurs propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n . Un vecteur non nul X de C^n est appelé **vecteur propre** (à gauche) de A s'il existe un nombre complexe λ tel que :

$$XA = \lambda X \text{ ou } X(A - \lambda I) = 0, I \text{ étant la matrice unité d'ordre } n.$$

Le nombre λ associé à X est appelé **valeur propre**.

Une matrice A est **diagonalisable** si et seulement si il existe une base de vecteurs propres.

Les valeurs propres de A sont les racines de l'**équation caractéristique** définie par :

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

Cette équation algébrique de degré n en λ , possède donc n racines complexes comptées avec leurs ordres de multiplicité. L'ensemble de ces racines constituent le **spectre** de la matrice A .

1.1.7. Matrices stochastiques

Cette famille de matrices carrées jouent un rôle important dans l'étude des processus stochastiques à temps discret.

Une matrice carrée P est appelée **matrice stochastique** si tous ses termes sont positifs ou nuls et si la somme des termes de chaque ligne vaut 1.

Les lignes de P représentent donc des **vecteurs de probabilité**, c'est à dire des vecteurs dont les composantes définissent une distribution de probabilité discrète.

Voici quelques propriétés élémentaires d'une matrice stochastique P :

- P admet 1 pour valeur propre.
- Il existe un vecteur propre π de P , associé à la valeur propre 1, qui définit une distribution de probabilité : $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ avec $\pi_k \geq 0$ et $\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1$.
- La valeur propre 1 est la seule à laquelle on peut associer un vecteur de probabilité comme vecteur propre.
- Toute valeur propre a un module inférieur ou égal à 1.
- Si le module d'une valeur propre est égal à 1, celle-ci est une racine de l'unité.

EXEMPLE

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

L'équation caractéristique est :

$$\det (P - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{4}{3}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{12} = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{12}) = 0$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1/2, \lambda_3 = -1/6.$$

Des vecteurs propres associés sont $X^{(1)} = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$, $X^{(2)} = (1, 0, -1)$, $X^{(3)} = (1, -2, 1)$.

Seul $X^{(1)}$ est un vecteur de probabilité.

1.1.8. Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non négatives. La **fonction génératrice** de X est alors définie par :

$$f (z) = E (Z^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k z^k \quad \text{où } p_k = P (X = k) \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}$$

f est une fonction de la variable complexe définie au moins pour $|z| \leq 1$.

On a $f(0) = p_0$ et $f(1) = 1$.

Voici d'autres propriétés élémentaires des fonctions génératrices :

- La loi de probabilité $\{ p_k \}$ est caractérisée de façon unique par la fonction génératrice associée $f(z)$, et l'on a $p_k = f^{(k)}(0) / k!$.
- $E(X) = f'(1)$ et $E(X^2) = f''(1) + f'(1)$.
- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs entières positives, la fonction génératrice de $X + Y$ est le produit des fonctions génératrices.

Les fonctions génératrices constituent un outil efficace pour l'étude des processus stochastiques à valeurs discrètes. Il est souvent plus facile de déterminer la fonction génératrice d'une distribution de probabilité inconnue que de calculer la distribution elle-même.

Il est donc intéressant de connaître les fonctions génératrices des distributions les plus utilisées.

- Distribution binomiale : $f(z) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} z^k = (zp + 1 - p)^n$
- Distribution géométrique : $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k p z^k = \frac{p}{1 - (1-p)z}$
- Distribution de Poisson : $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{\lambda(z-1)}$

1.2. GENERALITES SUR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Un **processus stochastique** est une famille de variables aléatoires $X(t)$ à valeurs réelles où t est un paramètre réel. L'**espace des paramètres** ou **espace du temps** T correspondant prend essentiellement une des deux formes suivantes :

- $T = \{ 0, 1, 2, \dots \}$; on parle alors de processus stochastique à **temps discret** et on écrit X_n au lieu de $X(t)$.

- $T = [0 , +\infty [$; on dit alors que $\{ X (t) ; t \geq 0 \}$ est un processus stochastique à **temps continu**.

Si $X(t) = x$, on dit que le processus est à l'instant t dans l'état x . On appelle **espace des états** l'ensemble S des valeurs prises par toutes les variables d'un processus stochastique. Dans ce cours nous nous limiterons à des états discrets, S étant souvent un sous-ensemble de N . Nous nous intéresserons surtout à des processus stochastiques présentant une structure de dépendance particulièrement simple et qui permettent de décrire de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique.

La forme prise par un processus stochastique lors d'une expérience du phénomène aléatoire est appelée **réalisation** ou **trajectoire** de ce processus stochastique .

Les phénomènes aléatoires ainsi étudiés dépendent d'un paramètre qui le plus souvent est le temps t , mais ce paramètre peut être aussi une autre quantité physique comme par exemple une distance.

Voici quelques exemples de phénomènes physiques susceptibles d'être modélisées par des processus stochastiques.

- Le nombre d'appels arrivant pendant un intervalle de temps $[0 , t]$ dans un central téléphonique.
- Le bruit de fond dans un circuit électronique.
- Le nombre de défaillances se produisant par jour dans un système technique.
- La fortune d'un joueur après avoir joué n parties.
- Le nombre de clients dans une file d'attente à un instant donné t .

Dans ce dernier exemple la trajectoire peut avoir la forme suivante :



2. CHAÎNES DE MARKOV

2.1. INTRODUCTION

Nous allons étudier une classe assez élémentaire de processus stochastiques à temps discret qui permettent de décrire mathématiquement de nombreux phénomènes aléatoires rencontrés dans la pratique.

Nous considérons pour cela une suite de variables aléatoires (X_n) dont l'espace des états S est discret c'est à dire fini ou dénombrable.

On note :

$$p_{ij}(n) = p (X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

C'est la probabilité conditionnelle que le processus passe de l'état i à l'état j au cours de l'intervalle de temps $[n, n+1]$. On l'appellera **probabilité de transition**.

EXEMPLE 1 (disponibilité de deux machines)

Une unité de production dispose de deux machines automatiques fonctionnant indépendamment et ayant chacune une fiabilité p au cours d'une journée. Lorsqu'elle tombe en panne elle est réparée pendant la nuit et se retrouve donc en état de marche le lendemain. Mais une seule machine peut être réparée à la fois.

Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la n -ième journée. On a $S = \{0,1\}$

Un calcul élémentaire établit que : $p_{00}(n) = p(2-p)$; $p_{01}(n) = (1-p)^2$

$p_{10}(n) = p$; $p_{11}(n) = 1-p$

Les probabilités de transition étant indépendantes du temps on pose alors : $p_{ij}(n) = p_{ij}$.

2.2. DEFINITIONS

2.2.1. Chaînes de Markov à temps discret

Dans l'exemple précédent les probabilités de transition $p_{ij}(n)$ ne dépendent pas du comportement du processus antérieur à l'instant n . On a par exemple

$$p_{10}(n) = p (X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1)$$

$$= p (X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1 ; X_{n-1} = 0) = p (X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1 ; X_{n-1} = 1)$$

Un tel processus est caractérisé par le fait que seule la connaissance de l'état présent, c'est à dire son état à l'instant n , est utile pour connaître son évolution future.

Cette propriété est connue sous le nom de **propriété de Markov**.

Mathématiquement elle s'énonce :

$$p (X_{n+1} = j \mid X_n = i ; X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p (X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

pour tout $n \geq 0$ et pour des états quelconques $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0$ appartenant à S .

Une suite de variables aléatoires (X_n) satisfaisant à cette condition est appelée **chaîne de Markov à temps discret** ou simplement **chaîne de Markov**. On dit qu'un tel processus stochastique est **sans mémoire**.

Dans la suite nous n'étudierons que des Chaînes de Markov **homogènes dans le temps**, c'est à dire telles que les probabilités de transition sont indépendantes du temps :

$$p_{ij}(n) = p_{ij} \quad \text{pour tout } n.$$

2.2.2. Matrices de transition et graphe des transitions

La **matrice des probabilités de transition** ou **matrice de transition** est la matrice :

$$P = ((p_{ij}))$$

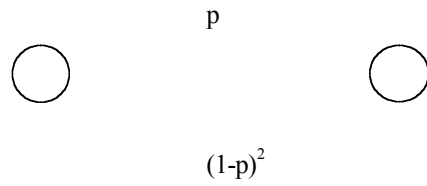
On vérifie immédiatement que P est une **matrice stochastique**.

Le **graphe des transitions** a pour sommets les états du processus, les arcs correspondant aux transitions possibles avec pour valuations les probabilités p_{ij} .

Pour l'exemple 1 décrit dans la section 2.1 on a donc :

$$P = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

Le graphe des transitions est représenté par la figure suivante :



EXEMPLE 2

Soit le processus (X_n) avec $S = \{1, 2\}$, tel que $X_0 = 1, X_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$:

- si $X_{n-1} = X_n$ alors $p_{i1} = 3/4$ et $p_{i2} = 1/4$,
- si $X_{n-1} \neq X_n$ alors $p_{i1} = p_{i2} = 1/2$.

Un tel processus n'est pas markovien. On a par exemple

$$p(X_4 = 1 \mid X_3 = 1 ; X_2 = 1) = 3/4,$$

tandis que

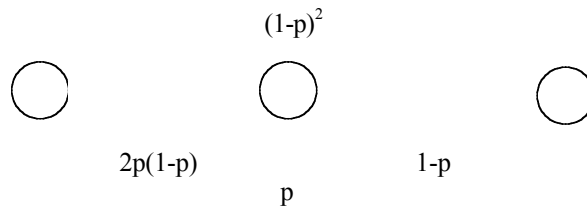
$$p(X_4 = 1 \mid X_3 = 1 ; X_2 = 2) = 1/2.$$

2.2.3. Exemples

EXEMPLE 3 (système en parallèle)

Soit un dispositif technique comprenant deux éléments montés en parallèle et fonctionnant indépendamment. Chaque élément a une fiabilité égale à p au cours d'une journée, et ne peut pas être réparé.

Si X_n est le nombre de machines en panne au début de la n -ième journée, on définit ainsi une chaîne de Markov à 3 états 0, 1 et 2. Le graphe des transitions est donné par la figure qui suit :



EXEMPLE 4

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes de même distribution. On a

$$p (X_n = k) = q_k \quad \text{avec } q_k \geq 0 \text{ et } q_0 + q_1 + \dots = 1$$

La suite (X_n) est un exemple très simple de chaîne de Markov puisque

$$p_{ij} = q_j \text{ pour tout couple d'entiers } (i , j) .$$

Si $Y_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$, la suite (Y_n) est également une chaîne de Markov. En effet

$$p (Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) = p (X_{n+1} = j-i)$$

D'où
$$p_{ij} = \begin{cases} q_{j-i} & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{si } j < i \end{cases}$$

EXEMPLE 5

Dans l'exemple des deux machines (exemple 1), si on ne répare plus une machine tombée en panne que le lendemain, on se trouve en présence d'une chaîne de Markov à trois états 0, 1 et 2 dont la matrice des transitions est

$$P = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. PROPRIETES FONDAMENTALES

2.3.1. Probabilités de transition à n étapes

Soit $p_{ij}^{(n)}$ la probabilité qu'une chaîne de Markov passe de l'état i à l'état j en n transitions ou étapes :

$$p_{ij}^{(n)} = p(X_n = j \mid X_0 = i) = p(X_{n+k} = j \mid X_k = i) \quad (n \geq 1, k \geq 1)$$

avec $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$

On note $P^{(n)}$ la matrice des probabilités de transition à n étapes : $P^{(n)} = ((p_{ij}^{(n)}))$

Alors pour tout $n \geq 1$: $P^{(n)} = P^n$

En effet :

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= p(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} p(X_n = j, X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \quad (n \geq 2) \\ &= \sum_{k \in S} p(X_n = j \mid X_{n-1} = k, X_0 = i) p(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \quad (\text{cf 1.1.3}) \\ &= \sum_{k \in S} p(X_n = j \mid X_{n-1} = k) p(X_{n-1} = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} p_{kj}^{(1)} p_{ik}^{(n-1)} \end{aligned}$$

Ce qui signifie que $P^{(n)} = P^{(n-1)} P$ et par itération on obtient $P^{(n)} = P^n$

Plus généralement on a donc $P^{(m)} P^{(n)} = P^{(m+n)}$

On obtient ainsi les **équations de Chapman- Kolgoromov** :
$$\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} = p_{ij}^{(m+n)}$$

Ces équations fournissent une condition nécessaire mais non pas suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires (X_n) soit une chaîne de Markov.

2.3.2. Loi de probabilité de X_n

Introduisons maintenant les **probabilités d'état** : $\pi_k(n) = p(X_n = k)$

La distribution de X_n peut être écrite sous forme vectorielle avec $\pi(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots)$ dont la somme des termes vaut 1. D'après le théorème des probabilités totales on a alors

$$\pi_k(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ik}^{(n)}$$

Matriciellement cette relation s'écrit :

$$\pi(n) = \pi(0) P^n \quad \text{pour tout } n \geq 0$$

On a de même : $\pi(n+1) = \pi(n) P$

Ces résultats permettent d'affirmer qu'une chaîne de Markov est complètement définie si l'on connaît sa matrice des probabilités de transition ainsi que la distribution de X_0 .

2.3.3. Exemples

Appliquons ces résultats à deux des exemples introduits précédemment.

EXEMPLE 1 (disponibilité de deux machines)

Si les deux machines sont au départ en état de marche on a $\pi(0) = (1, 0)$.

La distribution de X_1 est alors :

$$\pi(1) = \pi(0) P = (p(2-p), (1-p)^2)$$

Celle de X_2 est :

$$\pi(2) = \pi(1) P = \pi(0) P^2 = (p(1+2p-3p^2+p^3), (1-p)^2(1+p-p^2))$$

EXEMPLE 3 (système en parallèle)

La matrice des transitions est $P = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dans ce cas il est facile de calculer P^n .

On obtient $P^n = \begin{pmatrix} p^{2n} & 2p^n(1-p^n) & (1-p^n)^2 \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D'où $\pi(n) = \pi(0) P^n = (p^{2n}, 2p^n(1-p^n), (1-p^n)^2)$

2.3.4. Chaînes de Markov à deux états

Dans le cas général, le calcul de P^n et de $\pi(n)$ est souvent fastidieux. Il faut souvent diagonaliser la matrice P . Pour une chaîne de Markov à deux états, on obtient le résultat suivant :

Théorème 1

Soit une chaîne de Markov à deux états dont la matrice de transition est $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$

où $0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1$ et $0 < a + b < 2$. Alors

$$P^n = \frac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

La démonstration se fait par récurrence.

La matrice P^n est composée d'un terme permanent et d'un terme transitoire convergent vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La convergence est d'autant plus rapide que $1-a-b$ est petit, c'est à dire que la probabilité $a + b$ de changer d'état lors d'une transition est proche de 1.

La condition $0 < a + b < 2$ sert à exclure les chaînes de Markov de comportement déterministe définies par les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\bar{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE

2.4.1. Régime transitoire et régime permanent

Lorsqu'on exprime les probabilités d'état $\pi_k(n) = P(X_n = k)$ d'une chaîne de Markov en fonction du nombre n de transitions, on étudie le **régime transitoire** du phénomène aléatoire. Généralement la distribution de X_n varie en fonction du temps et dépend de la distribution initiale $\pi(0)$.

Si la distribution $\pi(n)$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers une distribution limite notée π , cette dernière définit le **régime permanent** du processus stochastique. Celui-ci n'est pas influencé par le choix de la distribution initiale.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(n) = \pi$, indépendamment de la distribution initiale et si π est une distribution de probabilité, on dit que la chaîne de Markov (X_n) **converge** vers π ou possède une **distribution limite** π .

EXEMPLE 6

Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, si $\pi(0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \pi(n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

En revanche pour toute autre distribution initiale, $\pi(n)$ ne converge pas. La chaîne de Markov ainsi définie n'est donc pas convergente.

EXEMPLE (chaîne de Markov à deux états)

Une distribution limite π existe si le comportement du processus est aléatoire et non déterministe, c'est à dire si au moins une des probabilités de transition est différente de 0 et de 1. Dans ce cas $\pi = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$.

2.4.2. Existence d'une distribution limite

Les deux théorèmes qui suivent donnent des conditions suffisantes de convergence d'une chaîne de Markov dont le nombre d'états est **fini**. Ils sont exposés sans démonstration.

Théorème 2

Si au moins une des puissances de la matrice de transition P^n n'a que des termes strictement positifs, alors la chaîne de Markov (X_n) possède une distribution limite π , vecteur de probabilité strictement positif. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} P^n = P^$, P^* étant une matrice dont toutes les lignes sont identiques au vecteur π et telle que $\pi P^* = \pi$.*

Théorème 3

Si la valeur propre 1 de P est simple et les autres valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, alors les conclusions du théorème 2 sont valables.

Pour une chaîne de Markov à deux états, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 1-a-b$, et on retrouve les conclusions du théorème précédent.

2.4.3. Exemples

EXEMPLE 7

Considérons une chaîne de Markov de matrice $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le symbole + indiquant une valeur strictement positive, on trouve :

$$P^2 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & 0 \\ + & 0 & + \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & 0 \end{pmatrix} \quad P^4 = \begin{pmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 2 la chaîne de Markov est donc convergente.

D'autre part les valeurs propres de P sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ et $\lambda_3 = -3/4$, ce qui confirme les conclusions en utilisant le théorème 3.

EXEMPLE 8

Soit la matrice stochastique $P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'étude du graphe des transitions montre que pour tout $n \geq 1$ $p_{21}^{(n)} = 0$, donc le théorème 2 ne s'applique pas. Mais les valeurs propres de P sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3/4$ ce qui permet d'utiliser le théorème 3, et de montrer que les hypothèses de ces deux théorèmes ne sont pas équivalentes.

2.5. DISTRIBUTIONS STATIONNAIRES

2.5.1. Définitions et méthodes de calcul

Une distribution de probabilité discrète π est dite **stationnaire** par rapport à la matrice stochastique P si $\pi P = \pi$. Autrement dit π est un vecteur propre normalisé π de P (c'est à dire tel que $\sum_{k \in S} \pi_k = 1$), associé à la valeur propre 1.

Une chaîne de Markov est appelée **stationnaire** si la distribution $\pi(n)$ de la variable aléatoire X_n est indépendante du temps n , ce qui signifie que $\pi(0)$ est une distribution stationnaire du processus en question.

Pour déterminer les vecteurs stationnaires d'une chaîne de Markov finie, on a les deux approches suivantes :

- On détermine un vecteur propre π normalisé de P , relatif à la valeur propre 1.
- On utilise le graphe des transitions en interprétant les probabilités π_k comme des masses associées aux états $k \in S$ et les produits $\pi_k p_{kj}$ comme des flux de masse entre les états k et j . La répartition des masses π_k est stationnaire si, lors d'une transition, le flux d'entrée est égal au flux de sortie pour chacun des états. Les m équations ainsi déterminées sont appelées **équations de balance**.

2.5.2. Exemples

EXEMPLE 9

Considérons une chaîne de Markov de matrice $P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

Les équations de balance sont :

$$\begin{aligned} \pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_3 &= \pi_2 \\ \frac{1}{2}\pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_3 \end{aligned}$$

En tenant compte de $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, on obtient $\pi_1 = 4/9$, $\pi_2 = 1/9$ et $\pi_3 = 4/9$.

EXEMPLE 1 (disponibilité de deux machines)

La distribution stationnaire est après calcul $\pi = \left(\frac{p}{1-p+p^2}, \frac{(1-p)^2}{1-p+p^2} \right)$

EXEMPLE 5

Les équations de balance pour les états 1 et 2 sont :

$$\begin{aligned} \pi_0 2p(1-p) + \pi_2 &= \pi_1 p \\ \pi_0 (1-p)^2 &= \pi_2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\pi_0 = \frac{p}{1+2p-3p^2+p^3}$, $\pi_1 = \frac{1-p^2}{1+2p-3p^2+p^3}$ et $\pi_2 = \frac{p(1-p)^2}{1+2p-3p^2+p^3}$.

2.5.3. Existence et unicité des distributions stationnaires

Le théorème suivant énoncé sans démonstration concerne l'existence de distributions stationnaires.

Théorème 4

Pour une chaîne de Markov finie, il existe toujours au moins une distribution stationnaire. Ce n'est pas toujours le cas lorsque l'espace des états est infini.

La formulation d'un critère d'unicité nécessite une classification des états d'une chaîne de Markov.

Deux états i et j **communiquent** ou sont **communicants** si l'on peut passer de i à j ainsi que de j à i avec des probabilités non nulles, ce qui signifie qu'il existe deux entiers positifs m et n tels que : $p_{ij}^{(m)} > 0$ et $p_{ji}^{(n)} > 0$.

On définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble S et on réalise de ce fait une partition de S en classes disjointes : $S = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_r$

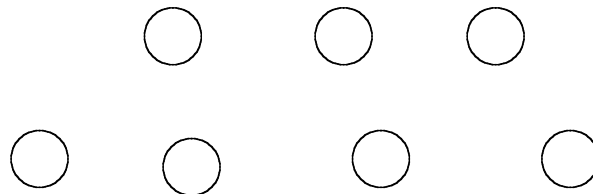
Deux états d'une même classe communiquent entre eux, alors que deux états de deux classes différentes ne communiquent jamais.

Il est alors possible de distinguer deux types de classes :

- une classe est dite **transitoire** s'il est possible d'en sortir, mais dans ce cas le processus ne pourra plus jamais y retourner,
- une classe est dite **récurrente** s'il est impossible de la quitter.

EXEMPLE 10

Chaque arc du graphe représenté indique une transition de probabilité non nulle



Les classes transitoires sont { 1, 2 } et { 3 } et les classes récurrentes sont { 4 , 5 , 6 } et { 7 }.

Le critère d'unicité s'énonce ainsi dans le théorème suivant

Théorème 5

Une chaîne de Markov finie admet une unique distribution stationnaire si et seulement si elle comprend une seule classe récurrente.

Lorsque cette unique classe récurrente recouvre à elle seule tout l'ensemble S , ce qui signifie que tous les états de S communiquent entre eux, la chaîne de Markov est dite **irréductible**.

EXEMPLE 11

Soit la chaîne de Markov définie par
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En traçant le graphe des transitions , on voit que { 2 } et { 3 , 4 } sont deux classes récurrentes, ce qui exclut l'existence d'une seule distribution stationnaire π .

Par le calcul on trouve que $\pi = (0 , 1-2\alpha , \alpha , \alpha)$ où $0 \leq \alpha \leq 1/2$.

2.5.4. Distributions stationnaires et distributions limites

Nous allons maintenant nous intéresser à l'évaluation numérique des distributions limites.

Le théorème suivant permet de ramener ce problème au calcul d'une distributions stationnaire.

Théorème 6

Si π est la distribution limite d'une chaîne de Markov, alors π est l'unique distribution stationnaire de cette chaîne.

Le passage à la limite de la relation $\pi(n + 1) = \pi(n) P$ montre que π est stationnaire.

Soit π^* une distribution stationnaire. En prenant π^* comme vecteur initial on voit que les distributions du processus sont toujours égales à π^* donc elle convergent vers π^* . L'unicité d'une distribution limite entraîne donc que $\pi^* = \pi$.

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple de la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

En effet $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ est l'unique distribution stationnaire, alors que cette chaîne ne possède pas de distribution limite car si $\pi(0) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ la suite des distributions $\pi(n)$ ne converge pas.

2.6. Chaînes de Markov absorbantes

2.6.1. Définition

Un état k est dit **absorbant** si le processus ne peut plus le quitter une fois qu'il y est entré, en d'autres termes si $p_{kk} = 1$. Une chaîne de Markov est dite **absorbante** si elle comprend au moins un état absorbant et si l'on peut passer de n'importe quel état à un état absorbant.

Un état absorbant forme à lui seul une classe récurrente.

Voici deux exemples de chaînes de Markov absorbantes :

EXEMPLE 3 (système en parallèle)

2 est l'unique état absorbant d'une chaîne de Markov convergente vers la distribution limite $(0, 0, 1)$. Tôt ou tard le processus sera absorbé dans 2 avec une probabilité égale à 1.

EXEMPLE 12

Une école offre un programme d'études sur trois ans. Chaque année peut être réussie ou non, et en cas d'échec ne peut être répétée qu'une fois. La réussite des trois ans est récompensée par un diplôme.

Ce programme peut être décrit par une chaîne de Markov à quatre états non absorbants et à deux états absorbants. Les premiers correspondent à l'inscription ainsi qu'aux trois années d'études, les deuxièmes aux possibilités de quitter l'école avec ou sans diplôme.

2.6.2. Délais et probabilités d'absorption

Lorsqu'on a affaire à une chaîne de Markov absorbante, on se pose en général les deux questions suivantes:

- En combien de temps le processus sera-t'il absorbé, étant donné son état initial?
- S'il existe plusieurs états absorbants, quelle est la probabilité pour un processus d'être absorbé par un état donné?

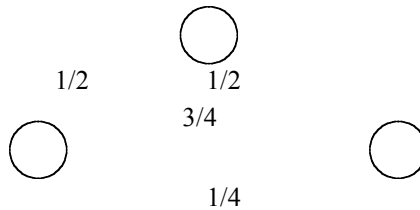
Pour répondre à ces questions on est amené à introduire les quantités suivantes :

- N_i = nombre de transitions jusqu'à l'absorption en partant de l'état i ,
- $n_i = E(N_i)$ = temps moyen jusqu'à l'absorption en partant de i ,
- b_{ij} = probabilité que le processus soit absorbé dans j si son état initial est i .

En particulier si i est absorbant on a $n_i = 0$, $b_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $b_{ii} = 1$.

EXEMPLE 13

La chaîne de Markov définie par le graphe suivant possède 3 comme état absorbant.



On trouve pour tout $k \geq 1$: $p(N_1 = 2k - 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$ et $p(N_1 = 2k) = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1}$

D'où $E(N_1) = n_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} (2k - 1) \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k) \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8}\right)^{k-1} = 2,4$.

Ce dernier résultat est obtenu en utilisant la formule $\sum_{k=1}^{+\infty} k a^{k-1} = 1/(1-a)^2$, pour $0 < a < 1$.

2.6.3. Deux théorèmes pour l'étude d'exemples moins élémentaires

Le calcul de la distribution de N_i est souvent fastidieuse. Le résultat suivant permet de calculer directement les temps moyens d'absorption $n_i = E(N_i)$ à partir d'un système d'équations linéaires.

Théorème 7

Les quantités n_i sont les solutions du système d'équations suivant : $n_i = 1 + \sum_{k \in S'} p_{ik} n_k$

où i est un état non absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants.

Supposons qu'il n'y ait qu'un seul état absorbant noté j et que l'état initial i soit différent de j . Si A_k est l'événement tel que le processus passe de i à k lors de la première unité de temps, on a alors :

$$E(N_i) = \sum_{k \in S} E(N_i | A_k) p(A_k) = \sum_{k \in S} [E(N_k) + 1] p_{ik} = \sum_{k \in S'} E(N_k) p_{ik} + 1$$

étant donné que $E(N_j) = 0$. La démonstration du cas général se fait de la même manière.

Le théorème suivant permet, pour une chaîne de Markov comprenant plusieurs états absorbants, de calculer la probabilité que le processus soit absorbé par un état donné.

Théorème 8

Soit j un état absorbant et S' l'ensemble de tous les états non absorbants. Les probabilités b_{ij} , où $i \in S'$, sont les solutions du système d'équations suivant : $b_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S'} p_{ik} b_{kj}$.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème des probabilités totales. En effet si on désigne par S'' l'ensemble des états absorbants, on a :

$$b_{ij} = \sum_{k \in S} p_{ik} b_{kj} = \sum_{k \in S'} p_{ik} b_{kj} + \sum_{k \in S''} p_{ik} b_{kj} = \sum_{k \in S'} p_{ik} b_{kj} + p_{ij} \cdot 1.$$

2.6.4. Exemples

EXEMPLE 13

On a : $n_1 = 1 + \frac{1}{2}n_2$

$n_2 = 1 + \frac{3}{4}n_1,$

d'où $n_1 = 2,4$ et $n_2 = 2,8$.

EXEMPLE 3 (système en parallèle)

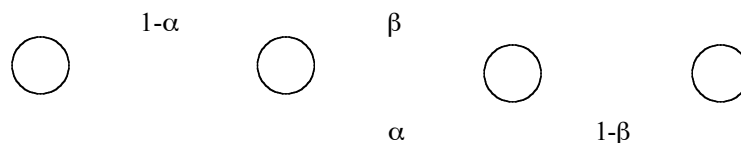
On trouve : $n_0 = 1 + p^2n_0 + 2p(1-p)n_1$
 $n_1 = 1 + pn_1$

d'où $n_0 = \frac{1+2p}{1-p^2}$ et $n_1 = \frac{1}{1-p}$.

En particulier si $p = 0,9$ on a $n_0 = 14,7$ jours et $n_1 = 10$ jours.

EXEMPLE 14

La chaîne de Markov absorbante définie par le graphe suivant possède 0 et 3 comme états absorbants.



Posons pour $i \in \{ 1, 2 \}$ $b_{i0} = a_i$ et $b_{i3} = b_i$. Alors

$a_1 = 1 - \alpha + \alpha a_2$

$a_2 = 0 + \beta a_1$

d'où $a_1 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}$ et $a_2 = \frac{(1-\alpha)\beta}{1-\alpha\beta}$.

De même on trouve $b_1 = \frac{\alpha(1-\beta)}{1-\alpha\beta}$ et $b_2 = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}$.

Comme $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = 1$, on est donc sûr que le processus sera absorbé tôt ou tard.

EXEMPLE 15

Dans une production en série, les articles passent par 3 étapes de fabrication; ils sont inspectés à la fin de chaque étape. Ils peuvent alors présenter 3 états possibles : totalement défectueux (probabilité p ; l'article est jeté), légèrement défectueux (probabilité q ; il passe une seconde fois par la même étape), en bon état (probabilité r avec $p + q + r = 1$)

On va déterminer, en prenant $p = 0,1$ et $q = 0,3$, la durée moyenne jusqu'à ce qu'un article quitte la machine ainsi que la probabilité qu'en quittant la machine cet article soit en bon état.

Ce processus peut-être décrit par une chaîne de Markov à 5 états, les 3 étapes de fabrication (états 1 à 3), la sortie en bon état(état 4) et la mise à l'écart (état 5). Les deux derniers états sont absorbants.

On a $p_{11} = p_{22} = p_{33} = q$, $p_{12} = p_{23} = p_{34} = p$, $p_{15} = p_{25} = p_{35} = r$.

Les quantités n_1, n_2, n_3 sont alors déterminées par le système d'équations suivant :

$$n_1 = 1 + qn_1 + rn_2$$

$$n_2 = 1 + qn_2 + rn_3$$

$$n_3 = 1 + qn_3$$

d'où $n_1 = 3,7$ étapes.

D'autre part

$$b_{14} = qb_{14} + rb_{24}$$

$$b_{24} = qb_{24} + rb_{34}$$

$$b_{34} = r + qb_{34}$$

d'où $b_{14} = r^3/(1-q)^3 = 0,630$.

2.6.5. Délais et probabilités d'atteinte

Intéressons nous maintenant, à des chaînes de Markov ne possédant pas d'états absorbants. Si i est l'état initial, j et k étant deux états différents de i , essayons de déterminer les deux quantités suivantes :

- le temps moyen pour atteindre j pour la première fois (**délai moyen d'atteinte** ou **de premier passage**),
- la probabilité d'atteindre j avant k (**probabilité d'atteinte**)

Pour les calculer on modifie la matrice des probabilités de transition P du processus en transformant l'état j en état absorbant si l'on cherche le délai d'atteinte, ou en rendant absorbant les états j et k si l'on cherche la probabilité d'atteinte. Si P^* est la matrice ainsi définie, le temps moyen jusqu'à l'absorption n_i^* et la probabilité d'absorption b_{ij}^* sont les quantités cherchées.

EXEMPLE 16 (promenade du scarabée)

Un scarabée se déplace sur les arêtes d'un tétraèdre régulier dont les sommets sont numérotés de 1 à 4. Initialement il est en 1 et une arête est parcourue en une unité de temps. De chaque sommet le choix de parcourir une des trois arêtes voisines est équiprobable. On va calculer le temps moyen nécessaire τ pour atteindre le sommet 4 pour la première fois, puis la probabilité p d'atteindre 4 s'il y a de la colle au sommet 2.

La matrice du processus correspondant est
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour rendre l'état 4 absorbant, remplaçons la dernière ligne de P par $(0\ 0\ 0\ 1)$, et appelons P^* la matrice ainsi définie. On trouve $n_1^* = n_2^* = n_3^* = 3$ d'où $\tau = 3$.

En transformant aussi 2 en état absorbant, on obtient finalement $p = 1/2$.

2.7. Phénomènes d'attente à temps discret

Les files d'attente se rencontrent dans des domaines très variés comme un guichet de poste, le trafic routier, un central téléphonique, un atelier de réparation, etc.

On parle de **phénomène d'attente** chaque fois que certaines unités appelées **clients** se présentent à des **serveurs** afin de recevoir un **service** dont la durée est généralement aléatoire.

Pour traiter des problèmes d'attente dans le contexte des chaînes de Markov, on est contraint de discrétiser l'échelle des temps. Ainsi les passages d'un état à un autre ne se produisent qu'à des instants déterminés à l'avance, et la durée d'un service suit une loi de probabilité discrète.

EXEMPLE 17 (station service)

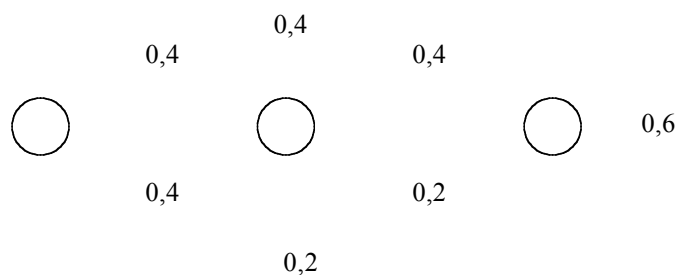
Dans une station service équipée d'une seule pompe, on a observé que le nombre de voitures arrivant au cours du n-ième intervalle de temps [n-1 , n] est une variable aléatoire Y_n de distribution $p (Y_n = 0) = p (Y_n = 1) = 0,4$ et $p (Y_n = 2) = 0,2$ pour tout $n \geq 1$.

On suppose que chaque service dure exactement une unité de temps; les services commencent (si au moins une voiture est présente) aux instants 1, 2 ... La station dispose de deux places d'attente. On note X_n le nombre de voitures se trouvant dans la station immédiatement après l'instant n.

Vérifions d'abord que (X_n) forme bien une chaîne de Markov. On a :

$$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \text{ ou } 1 \\ \min(Y_{n+1} + 1, 2) & \text{si } X_n = 2 \end{cases}$$

La distribution de X_{n+1} ne dépend que de l'état du processus à l'instant n, donc on a bien affaire à une chaîne de Markov. Le graphe des transitions associé est le suivant :



Par la méthode des balances on trouve : $p_0 = 4/15$, $p_1 = 6/15$, $p_2 = 5/15$.
 La station est donc inoccupée pendant environ 27% du temps.

Si $X_0 = 0$ calculons la durée moyenne n_0 jusqu'à ce que les deux places d'attente soient occupées pour la première fois. Pour cela il faut modifier le graphe des transitions de telle sorte que 2 devienne un état absorbant. On a alors :

$$\begin{aligned} n_0 &= 1 + 0,4n_0 + 0,4n_1 \\ n_1 &= 1 + 0,4n_0 + 0,4n_1 \end{aligned}$$

d'où $n_0 = 5$.

3. PROCESSUS STOCHASTIQUES A TEMPS CONTINU

3.1. Introduction

Les chaînes de Markov permettent d'étudier des phénomènes aléatoires pour lesquels les changements d'état se produisent à des instants fixés à l'avance.

Dans beaucoup de cas il est nécessaire d'avoir recours à un modèle stochastique faisant intervenir tous les instants appartenant à un intervalle donné, c'est à dire à un processus à temps continu.

Parmi ceux-ci, le processus de Poisson occupe une place privilégiée. Il est utilisé avant tout pour décrire la réalisation dans le temps d'événements aléatoires d'un type donné, comme par exemple :

- l'arrivée de clients vers un guichet,
- l'occurrence d'accidents dans une entreprise,
- l'apparition de pannes dans un parc de machines,
- l'arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur.

3.2. PROCESSUS DE POISSON

3.2.1. Définition

On considère le nombre d'événements $N(t)$ se produisant dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et on cherche à déterminer la distribution de cette variable aléatoire discrète. Le processus stochastique $\{N(t); t \geq 0\}$ est appelé **processus de comptage**.

Un tel processus est un **processus de Poisson** s'il satisfait aux trois conditions suivantes.

- **C1** Le processus $N(t)$ est **homogène dans le temps** :

$$p(N(s+t) - N(s) = k) = p(N(t) = k) = p_k(t) \quad \text{pour tout } s > 0, t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}.$$

- **C2** Le processus $N(t)$ est à **accroissements indépendants** :

$$p(N(s+t) - N(s) = k, N(s) = j) = p(N(s+t) - N(s) = k) p(N(s) = j) = p_k(t)p_j(s) \quad \text{pour tout } s > 0, t > 0.$$

- **C3** La probabilité que deux événements ou plus se produisent dans un petit intervalle Δt est négligeable par rapport à la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul événement :

$$p_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & \text{pour } k \geq 2 \\ \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{pour } k = 1 \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{pour } k = 0 \end{cases}$$

Le coefficient λ est appelé **densité** ou **intensité** du processus poissonnien.

3.2.2. Propriété principale

Théorème 9

Si un processus de comptage obéit aux conditions C1, C2 et C3, alors

$$p(N(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \text{pour tout } t > 0 \text{ et } k \in \mathbb{N}$$

Par conséquent $E(N) = \lambda t$ et $Var(N) = \lambda t$.

Le coefficient λ est donc égal au nombre moyen d'événements par unité de temps.

Ces relations définissent le **régime transitoire** du processus de Poisson.

Aucun régime stationnaire n'existe car $\lim_{k \rightarrow +\infty} p_k(t) = 0$.

Pour démontrer ce théorème on utilise le théorème des probabilités totales. On a pour $n > 0$:

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= p_n(t) p_0(\Delta t) + p_{n-1}(t) p_1(\Delta t) + \sum_{i=2}^n p_{n-i}(t) p_i(\Delta t) \\ &= p_n(t) (1 - \lambda \Delta t) + p_{n-1}(t) \lambda \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

d'où $\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lambda (p_{n-1}(t) - p_n(t)) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$

Lorsque Δt tend vers 0 on obtient : $p_n'(t) = \lambda (p_{n-1}(t) - p_n(t))$

De même pour $n = 0$ on obtient : $p_0'(t) = -\lambda p_0(t)$

Ce système d'équations différentielles appelées **équations de Kolmogorov** peut être résolu soit par récurrence, soit en employant les fonctions génératrices.

Utilisons cette dernière méthode et associons à la distribution inconnue $\{p_0(t), p_1(t), \dots\}$ sa

fonction génératrice $f(z, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^n$

En multipliant la n-ième équation de Kolmogorov par z^n et en sommant sur n , on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n'(t) z^n &= \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} p_{n-1}(t) z^n - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^n \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^{n+1} - \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) z^n \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore $\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \lambda (z - 1) f(z, t)$

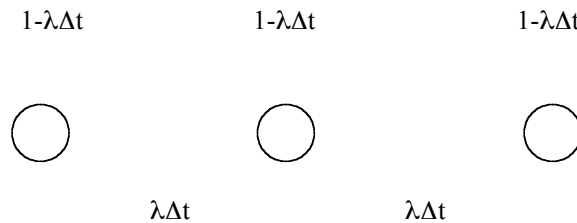
d'où, sachant que $f(z, 0) = p_0(0) = 1$

$$f(z, t) = e^{\lambda(z-1)t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t z)^n}{n!}$$

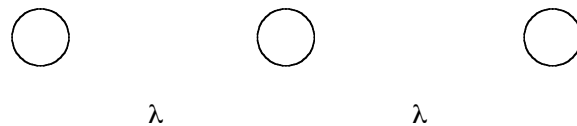
On a donc en identifiant $p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$.

3.2.3. Graphe des transitions

Pour les processus à temps continus, dans les graphes des transitions on remplace l'unité temporelle par un petit intervalle Δt et l'on indique à nouveau sur chaque arc la probabilité de transition correspondante. Le graphe suivant est celui d'un processus de Poisson où l'on a supprimé le terme $+ o(\Delta t)$ pour ne pas le surcharger.



On utilise souvent un graphe réduit dans lesquels les probabilités de transition sont remplacés par les taux de transition.



3.2.4. Intervalle entre deux événements

Soit $\{ N(t) ; t \geq 0 \}$ un processus de Poisson de paramètre λ , et T_n la durée séparant le $(n-1)$ -ième et le n -ième événement.

Théorème 10

Les temps d'attente T_n d'un processus de Poisson de paramètre λ sont des variables aléatoires indépendantes et distribuées identiquement selon une loi exponentielle de paramètre λ .

Considérons d'abord T_1 : $p (T_1 > t) = p (N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

Donc T_1 suit bien une loi exponentielle de paramètre λ .

Ensuite, d'après la condition C_2 , on a :

$$p (T_2 > t \mid T_1 = s) = p (\text{aucun événement dans }]s, s+t] \mid T_1 = s)$$

$$= p (\text{aucun événement dans }]s, s+t]) = e^{-\lambda t}$$

D'où $p (T_2 > t , T_1 > u) = \int_u^{+\infty} p (T_2 > t \mid T_1 = s) \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} e^{-\lambda u}$ pour $t > 0$ et $u > 0$.

T_2 obéit donc à la même distribution que T_1 et est indépendante de T_1 .

Il en est de même pour T_n pour $n > 2$.

On obtient à l'aide de la loi gamma la généralisation du théorème précédent.

Théorème 11

La durée séparant $n + 1$ événements consécutifs c'est à dire le temps écoulé entre le k -ième et le $(k + n)$ -ième événement, suit une loi gamma de paramètres λ et n .

3.3. PHENOMENES D'ATTENTE A TEMPS CONTINU

3.3.1. Classification des systèmes d'attente

Nous allons nous intéresser plus particulièrement aux phénomènes d'attente appelés aussi **systèmes d'attente** ou **files d'attentes** à temps continu.

Pour identifier un tel système on a besoin des spécifications suivantes.

- La nature stochastique du processus d'arrivée(ou flux d'entrée) défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- La distribution du temps aléatoire de service.
- Le nombre s de serveurs qui sont montés en parallèle. On admet en général que les temps de service correspondants suivent la même loi et que les clients qui arrivent forment une seule file d'attente.
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file d'attente ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités.

Les variables aléatoires introduites pour décrire le phénomène sont supposées indépendantes. Pour classer les systèmes d'attente, on a recours à une **notation symbolique** comprenant quatre symboles rangés dans l'ordre

$$A / B / s / N$$

où

- A = distribution des temps entre deux arrivées,
- B = distribution des durées de service,
- s = nombre de postes de service en parallèle,
- N = capacité du système.

Le dernier symbole est supprimé si $N = \infty$. Pour spécifier les distributions A et B, on introduit les symboles suivants:

- M = distribution exponentielle (qui vérifie donc la propriété de Markov)
- E_k = distribution d'Erlang d'ordre k ,
- G = distribution générale,
- D = cas déterministe.

Par exemple la notation M/D/1/4 définit donc un système d'attente comprenant un serveur et une file d'attente de capacité $4 - 1 = 3$. Le processus d'arrivée est poissonien et la durée de service constante.

En plus, on utilise les grandeurs suivantes.

$1/\lambda$: intervalle moyen séparant deux arrivées successives, d'où λ est le taux des arrivées

$1/\mu$: durée moyenne de service, d'où μ est le taux de service.

Lorsque les distributions sont exponentielles, les taux λ et μ sont identiques aux paramètres de ces distributions.

3.3.2. Analyse mathématique

On introduit un processus stochastique qui permet une étude mathématique du système. On s'intéresse d'abord au nombre $X(t)$ de clients se trouvant dans le système à l'instant t ($t \geq 0$). Nous cherchons à calculer

- les **probabilités d'état** $p_n(t) = p(X(t) = n)$ définissant le **régime transitoire** du processus
- le **régime stationnaire** du processus défini par $p_n = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = p(X(+\infty) = n)$.

Nous écrivons X au lieu de $X(+\infty)$

A partir de la distribution stationnaire du processus $\{X(t); t \geq 0\}$, on peut obtenir d'autres **caractéristiques d'exploitation** du système telles que

- le nombre moyen de clients dans le système : $L = E(X)$,
- la durée d'attente d'un client,
- la durée de séjour dans le système composée de la durée d'attente et la durée de service,
- le taux d'occupation des serveurs,
- le pourcentage de clients n'ayant pas pu être servis,
- la durée d'une période d'activité, c'est à dire l'intervalle de temps pendant lequel il y a toujours au moins un client dans le système.

Le calcul explicite du régime transitoire est souvent pénible, voire impossible. En dehors de certains modèles simples on se contentera de déterminer le régime stationnaire d'un phénomène d'attente.

3.3.3. Le système d'attente M/M/1

3.3.3.1. Régime transitoire

Pour ce système d'attente, le plus simple, le flux d'arrivées est poissonien, de paramètre λ , et la durée de service exponentielle, de paramètre μ ; La capacité d'attente est illimitée et il y a un seul serveur.

En utilisant les propriétés du processus de Poisson et de la loi exponentielle, nous avons pour un petit intervalle de temps Δt les probabilités suivantes :

- $p(\text{exactement 1 arrivée pendant } \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
- $p(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$
- $p(\text{2 arrivées ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$
- $p(\text{exactement 1 départ pendant } \Delta t \mid X(t) \geq 1) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$
- $p(\text{aucun départ pendant } \Delta t \mid X(t) \geq 1) = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$
- $p(\text{2 départs ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$

Ces probabilités ne dépendent ni du temps t ni de l'état $X(t)$ dans lequel le système se trouve.

Désignons par $p_{ij}(\Delta t)$ la **probabilité de transition** qui ne dépend pas de l'instant t , probabilité que le processus $X(t)$ fasse une transition de i vers j pendant la durée Δt :

$$p_{ij}(\Delta t) = p(X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = i)$$

Les arrivées et les départs étant indépendants entre eux on a

$$\begin{aligned} \text{si } n \geq 0 & \quad p_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ \text{si } n \geq 1 & \quad p_{n,n}(\Delta t) = \lambda \Delta t \mu \Delta t + (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu) \Delta t + o(\Delta t) \\ & \quad p_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ \text{si } n \geq 0 & \quad p_{n+1,n}(\Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) \mu \Delta t + o(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t) \\ \text{alors que pour } |m - n| \geq 2 & \quad p_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t) \end{aligned}$$

Ainsi le processus ne peut, à partir d'un état donné n , que passer dans l'un des états voisins $n - 1$ ou $n + 1$.

On cherche à calculer les probabilités d'état $p_n(t) = p(X(t) = n)$.

D'après le théorème des probabilités totales on a pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= \sum_{i=0}^{+\infty} p_i(t) p_{in}(\Delta t) \\ &= p_{n-1}(t) \lambda \Delta t + p_n(t) (1 - (\lambda + \mu) \Delta t) + p_{n+1}(t) \mu \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

En passant à la limite, on trouve alors pour $n \geq 1$:

$$p_n'(t) = -(\lambda + \mu) p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t)$$

De même on trouve :

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Ces équations connues sous le nom **d'équations différentielles de Kolgomorov** permettent lorsqu'on connaît les conditions initiales du processus, c'est à dire la distribution de $X(0)$, de déterminer le régime transitoire du processus. Mais les calculs nécessaires pour obtenir cette distribution dépassent le cadre de ce cours.

3.3.3.2. Régime stationnaire

Lorsque t tend vers $+\infty$, on montre que la limite de $p_n(t)$ est indépendante de l'état initial du processus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = p_n$$

On a aussi pour tout n :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n'(t) = 0$$

On obtient donc un système d'équations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned} \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} &= (\lambda + \mu) p_n \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

En plus nous avons $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$

En additionnant les $n + 1$ équations on obtient $\mu p_{n+1} = \lambda p_n$

D'où $p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$

Finalement on obtient à condition que $\lambda < \mu$ $p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$

Le régime stationnaire est donc régi par la loi géométrique.

L'expression $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est souvent appelée **coefficient d'utilisation** du système ou encore **intensité** du trafic. Étant égale au nombre moyen d'arrivées par durée moyenne de service elle mesure le degré de saturation du système. Puisque $\rho = 1 - p_0$, cette quantité représente également la probabilité d'occupation du serveur.

EXEMPLE 18

Dans un système d'attente du type M/M/1 un client arrive en moyenne toutes les 12 minutes et la durée moyenne de service est de 8 minutes .

Calculons la probabilité p que 2 clients au moins attendent d'être servis.

En prenant l'heure pour unité de temps on a $\lambda = 5$ et $\mu = 7,5$ et $\rho = 2/3$.

Donc $p_n = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $p = 1 - p_0 - p_1 - p_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,296$.

Le taux d'arrivée augmentant de 20% calculons l'augmentation de p .

On a maintenant $\lambda^* = 6$ et $\rho^* = 4/5$ d'où $p^* = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,512$ ce qui correspond à une augmentation de 73% .

EXEMPLE 19

Dans un système d'attente du type M/M/1 on a $\lambda = 20/h$. Calculons la durée moyenne de service pour qu'en moyenne un client sur deux n'attende pas.

On a $\lambda/\mu = 1 - p_0 = 1/2$, d'où la durée moyenne de service est $1/\mu = 1,5$ min .

Calculons alors la probabilité q_n qu'un client qui arrive et doit attendre ait devant lui une file d'attente formée de n clients.

On a $q_n = p(X = n+1 \mid X \geq 1) = \frac{p_{n+1}}{1 - p_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

3.3.4. Caractéristiques d'un système d'attente

3.3.4.1. Définitions, formules de Little

A partir de la distribution stationnaire on peut calculer d'autres valeurs caractéristiques d'un système d'attente telles que :

- $L = E(X)$ = nombre moyen de clients dans le système,
- L_q = nombre moyen de clients dans la file d'attente,
- W = temps de séjour moyen d'un client dans le système,
- W_q = temps d'attente moyen d'un client,
- W_q^* = temps d'attente moyen d'un client qui est obligé d'attendre.

Ces valeurs sont liées entre elles par les relations suivantes dont les deux premières sont connues sous le nom de **formules de Little** :

$$\begin{aligned} L &= \lambda_e W \\ L_q &= \lambda_e W_q \\ W &= W_q + 1/\mu \\ L &= L_q + \lambda_e/\mu \end{aligned}$$

où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système.

Si la capacité du système est infinie, on a $\lambda_e = \lambda$. Sinon on a $\lambda_e < \lambda$.

Ces quatre relations sont valables dans des conditions assez générales, c'est à dire pour des systèmes d'attente du type $G/G/s/N$.

On peut interpréter intuitivement les deux premières formules, les deux autres s'en déduisant. Par exemple pour la première formule, W représente le temps moyen de séjour d'un client dans le système, et λ_e le nombre moyen de clients entrés dans le système par unité de temps, donc lorsqu'il quitte le système un client laisse en moyenne derrière lui $\lambda_e W$ clients dans le système d'où $L = \lambda_e W$.

3.3.4.2. Caractéristiques du système M/M/1

On a d'abord
$$L = E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} np_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{+\infty} np^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}.$$

Soit X_q le nombre de clients dans la file d'attente :
$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ X - 1 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

Alors
$$L_q = E(X_q) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1)p_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}.$$

Le calcul de W et W_q peut se faire à l'aide des formules de Little ou directement à partir de la distribution stationnaire. En effet si l'on note T la durée de séjour d'un client dans le système et A_n l'événement tel qu'il y ait n clients dans le système à l'instant d'entrée on a :

$$W = E(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(T|A_n) p(A_n)$$

Or $E(T | A_n) = \frac{n+1}{\mu}$ et $p(A_n) = p(X = n) = (1 - \rho) \rho^n$,

donc $W = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(1-\rho)\rho^n}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$

De la même manière, si T_q est la durée d'attente d'un client, on obtient :

$$W_q = E(T_q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} .$$

EXEMPLE 18

Lorsque $\lambda = 5$ et $\mu = 7,5$ on trouve $L = 2$ et $W = 0,4h = 24min$, tandis que pour $\lambda^* = 6$ et $\mu^* = 7,5$ on a $L^* = 4$ et $W^* = 40min$.

Une augmentation de 20% du taux d'arrivée provoque donc une augmentation de 100% du nombre moyen de clients dans le système et de 67% du temps moyen de séjour.

3.3.4.3. Distribution du temps de séjour T

Soit les variables aléatoires

- T = temps de séjour d'un client dans le système
- T_q = temps d'attente d'un client

On veut connaître par exemple la probabilité que le temps d'attente dans un système donné ne dépasse pas une certaine valeur. Pour cela il faut connaître la distribution de T_q .

Calculons celle-ci dans le cas d'un système M/M/1.

$T_q = 0$ si le système est vide. Si $n \geq 1$ T_q est la somme des temps de service des n clients se trouvant devant lui dont un est en train d'être servi. Ainsi la distribution conditionnelle de T_q est la loi gamma de paramètres n et μ . D'où, si A_n est l'événement tel qu'il y ait n clients dans le système à l'instant d'entrée, on obtient :

$$p(0 < T_q \leq t | A_n) = \int_0^t \frac{\mu(\mu u)^{n-1} e^{-\mu u}}{(n-1)!} du$$

Ce qui donne en utilisant le théorème des probabilités totales,

$$p(0 < T_q \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(T_q \leq t | A_n) p(A_n) = \mu (1 - \rho) \rho \int_0^t e^{-\mu u} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\rho \mu u)^{n-1}}{(n-1)!} du$$

$$= \mu (1 - \rho) \rho \int_0^t e^{-\mu u(1-\rho)} du = \rho (1 - e^{-\mu(1-\rho)t})$$

D'autre part

$$p(T_q = 0) = p_0 = 1 - \rho$$

Finalement on obtient pour $t > 0$ et $\rho < 1$:

$$p(T_q \leq t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$$

La durée d'attente T_q obéit donc à une loi exponentielle à laquelle est superposée concentrée à l'origine la probabilité $1 - \rho$.

Un calcul similaire permet d'obtenir la distribution du temps de séjour T qui obéit également à une loi exponentielle :

$$p(T \leq t) = 1 - e^{-\mu(1-\rho)t} \quad \text{pour } t \geq 0 .$$

3.4. PROCESSUS DE NAISSANCE ET DE MORT

3.4.1. Introduction

Les processus de naissance et de mort sont des processus stochastiques à temps continu et à états discrets $n = 0, 1, 2, \dots$. Ils sont sans mémoire, et à partir d'un état donné n , seules les transitions vers l'un des états voisins $n + 1$ et $n - 1$ sont possibles. On parle alors de « naissances » et de « morts », car le premier domaine d'application de ces processus a été l'étude de la croissance des populations.

Le processus de Poisson et le système d'attente $M/M/1$ en sont des exemples simples.

En général et contrairement à ces cas particuliers, les taux de transition dépendent de l'état n dans lequel le système se trouve.

3.4.2. Définition

Soit un processus stochastique $\{ X(t) ; t \geq 0 \}$ à états discrets $n = 0, 1, 2, \dots$, et homogènes dans le temps, c'est à dire tel que

$$p(X(t+s) = j \mid X(s) = i) = p_{ij}(t)$$

ne dépend pas de s .

$\{ X(t) ; t \geq 0 \}$ est un **processus de naissance et de mort** s'il satisfait les conditions suivantes :

- $p_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t) \quad (i \geq 0)$
- $p_{i,i-1}(\Delta t) = \mu_i \Delta t + o(\Delta t) \quad (i \geq 1)$
- $p_{i,i}(\Delta t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i) \Delta t + o(\Delta t) \quad (i \geq 0)$

Les coefficients positifs λ_i et μ_i sont appelés **taux de transition**, plus particulièrement taux de naissance (ou de croissance) pour λ_i et taux de mort (ou de décroissance) pour μ_i .

On en déduit que

$$p_{ij}(\Delta t) = o(\Delta t) \quad \text{si} \quad |i - j| \geq 2$$

3.4.3. Régime transitoire et régime stationnaire

Des méthodes identiques à celles employées aux paragraphes 3.2 et 3.3 permettent d'obtenir les **équations de Kolmogorov** d'un processus de naissance et de mort :

$$p_n'(t) = -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) \quad (n \geq 1)$$

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

Ces équations caractérisent le système transitoire du processus mais sont généralement difficiles voire impossible à résoudre. La plupart du temps on ne considère que la distribution stationnaire du processus

$$p_n = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p(X = n)$$

En admettant l'existence de ces limites, il est clair qu'elles satisfont aux équations

$$(\lambda_n + \mu_n) p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

appelées **équations de balance**.

En additionnant les $n + 1$ premières équations on obtient le système équivalent suivant :

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

En admettant que $\lambda_0 > 0$, on trouve

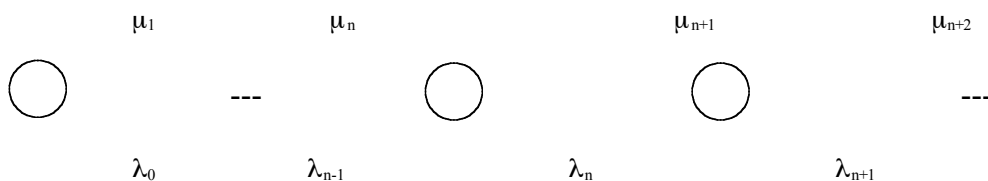
$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0 \quad (n \geq 1)$$

avec
$$p_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1}$$

Une distribution stationnaire existe donc lorsque la somme contenue dans p_0 converge.

3.4.4. Graphe des transitions

On concrétise les équations de Kolmogorov à l'aide du graphe des transitions. Les flèches indiquent les transitions possibles du processus. En interprétant les probabilités d'état $p_n(t)$ comme des masses, on associe à chaque flèche un flux de masse de valeur respectivement $\lambda_n p_n(t)$ et $\mu_n p_n(t)$. On n'indique pas les boucles existant pour chaque état.



Le taux de variation $p'_n(t)$ de la masse attribuée à l'état n est alors égal à la différence du flux d'entrée (input) et du flux de sortie (output) de cet état, ce qui correspond aux équations de Kolmogorov du système.

Un raisonnement identique au cas du régime stationnaire permet de retrouver les équations de balance. On peut aussi en considérant la condition d'équilibre des $n + 1$ premiers états retrouver l'équation :

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 0 .$$

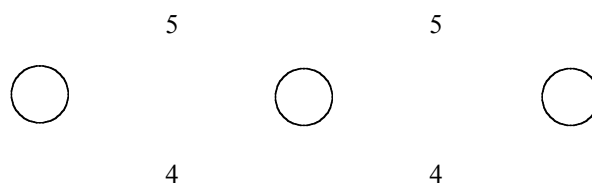
3.4.5. Exemples

EXEMPLE 20

Dans un cabinet médical, l'arrivée des patients est décrite par un processus de Poisson de paramètre $\lambda = 4h^{-1}$. La durée de traitement suit une loi exponentielle de moyenne 12 min. La salle d'attente ne contenant qu'un client, calculons la probabilité qu'une personne qui arrive soit traitée :

Le nombre de personnes se trouvant dans le cabinet forme un processus de naissance et de mort dont on veut déterminer le régime stationnaire. On a

$$\begin{aligned} \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda = 4, & \quad \lambda_i = 0 \text{ pour } i \geq 2 \\ \mu_2 = \mu_1 = \mu = 5, & \quad \mu_i = 0 \text{ pour } i \geq 3 \end{aligned}$$



A l'aide du graphe des transitions ci-dessus on obtient les équations de balance suivantes :

$$\begin{aligned} \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ \lambda p_0 + \mu p_2 &= (\lambda + \mu) p_1 \\ \lambda p_1 &= \mu p_2. \end{aligned}$$

On en déduit que : $p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$ et $p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$ avec $p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right)^{-1}$.

Numériquement, on obtient : $p_0 = 0,41, \quad p_1 = 0,33 \quad p_2 = 0,26.$

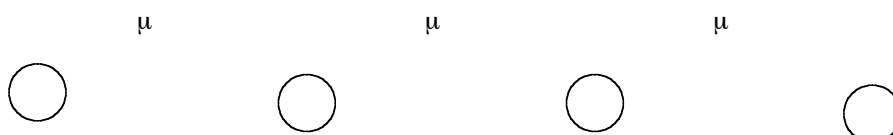
La probabilité qu'une personne qui arrive soit traitée est donc $p_0 + p_1 = 0,74.$

EXEMPLE 21 (entretien de machines)

Un atelier comprend $m = 3$ machines automatiques qui sont entretenues par un opérateur qui ne peut réparer qu'une machine à la fois. La durée de bon fonctionnement de chaque machine suit une distribution exponentielle de paramètre λ , et le temps de réparation une distribution exponentielle de paramètre μ . Pour $\lambda = \mu/3$ calculons :

- la probabilité que l'opérateur soit libre
- le nombre moyen de machines qui fonctionnent.

Soit X le nombre de machines en panne. Le graphe des transitions est donné par la figure ci-dessous :



3λ

2λ

λ

Les relations $\lambda_0 = 3\lambda$ et $\lambda_1 = 2\lambda$ sont des conséquences de propriétés de la loi exponentielle exposées au paragraphe 1.1.4. D'où la probabilité que l'opérateur soit libre est :

$$p_0 = \left(1 + 3\frac{\lambda}{\mu} + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \right)^{-1} = \left(1 + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \right)^{-1} = \frac{9}{26}.$$

On a aussi $p_1 = 3\frac{\lambda}{\mu}p_0 = \frac{9}{26}$, $p_2 = 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \frac{6}{26}$, $p_3 = 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = \frac{2}{26}$.

Le nombre moyen de machines qui fonctionnent est donc :

$$3 - E(X) = 3 - \frac{27}{26} = \frac{51}{26} = 1,96.$$

3.5. SYSTEMES D'ATTENTE AUTRES QUE M/M/1

3.5.1. Généralités

A l'aide du concept probabiliste du processus de naissance et de mort nous pouvons construire d'autres modèles pour des phénomènes d'attente correspondant mieux à des situations concrètes. Par rapport au système M/M/1 nous envisagerons les modifications suivantes :

- l'espace de service comprendra plusieurs stations en parallèle,
- la capacité de l'espace d'attente ne sera plus illimitée.

Pour décrire un tel phénomène d'attente il nous faut spécifier les valeurs des taux de transition λ_n et μ_n . Nous nous limiterons à l'étude de la distribution stationnaire, ainsi qu'aux valeurs caractéristiques les plus importantes.

3.5.2. Système à plusieurs stations M/M/s

Considérons le cas d'un système d'attente comprenant s stations en parallèle dont les durées de service correspondantes suivent la même distribution exponentielle de paramètre μ . Les spécifications du système M/M/1 sont conservées : flux des arrivées poissonien de paramètre λ , capacité illimitée de l'espace d'attente. Les clients qui arrivent forment une seule file d'attente et se font servir par ordre à la première station libre.

Le nombre de clients dans le système à l'instant t , noté $X(t)$, constitue un processus de naissance et de mort dont les taux de transition sont

$$\lambda_n = \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

puisque chaque client qui arrive peut entrer dans le système et

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (1 \leq n \leq s) \\ s\mu & (n \geq s) \end{cases}$$

Cette relation est la conséquence d'une propriété de la loi exponentielle énoncée au paragraphe 1.1.4.

On appelle $s\mu$ le **taux de service global** du système, et $\rho = \lambda/(s\mu)$ l'**intensité de trafic globale**.

En utilisant le graphe des transitions ou les résultats du paragraphe 3.4.3 on obtient la distribution stationnaire suivante du système M/M/s :

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } n \leq s \\ \frac{(\lambda / \mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 = \rho^{n-s} p_s & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

avec

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^s \frac{(\lambda / \mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda / \mu)^{s+1}}{s!(s - \lambda / \mu)} \right]^{-1}$$

Ces relations n'ont un sens que lorsque la série $p_0 + p_1 + p_2 + \dots$ converge, c'est à dire dès que $\rho = \lambda/(s\mu) < 1$. Si $s = 1$, on retrouve le résultat correspondant au système M/M/1.

La probabilité qu'un client qui entre dans le système doive attendre est alors :

$$p(\text{attente}) = p(X \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n = \frac{p_s}{1 - \rho}.$$

La distribution stationnaire nous permet de calculer les caractéristiques essentielles du système :

$$L_q = E(X_q) = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n - s)p_n = \frac{\rho p_s}{(1 - \rho)^2} = \frac{\lambda^s \rho p_0}{\mu^s s! (1 - \rho)^2}$$

et

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = s\rho + \frac{\rho p_s}{(1 - \rho)^2}.$$

Les expressions de W_q et W peuvent alors se déterminer à l'aide des formules de Little.

EXEMPLE 22

L'arrivée des clients dans une banque suit un processus de poisson dont le taux moyen est de 9 clients par heure. La durée de service par client suit une loi exponentielle de moyenne 10 min. Calculons le nombre minimal a de guichets nécessaires pour assurer un régime stationnaire de ce processus, puis le temps d'attente moyen si $s = a$ ou si $s = a+1$.

Nous avons $\lambda = 9$ clients/h et $\mu = 6$ clients/h et il faut que $\rho = \frac{\lambda}{\mu s} < 1$.

D'où $s > 1,5$, donc $a = 2$.

Si $s = 2$, on a $\rho = 3/4$ et $p_0 = \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{(3/2)^3}{2 - 3/2} \right)^{-1} = \frac{1}{7}$, d'où $p_2 = 9/56 \approx 0,16$

et

$$W_q = \frac{p_2}{2\mu(1-\rho)^2} \approx 0,21h = 12,8 \text{ min.}$$

Pour $s = 3$, on trouve $W_q = 0,026h = 1,58 \text{ min.}$

Soit Y le nombre de stations inoccupées d'un système $M/M/s$. Calculons $E(Y)$:

$$\text{On a } Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \geq s \\ s - X & \text{si } X < s \end{cases}$$

$$\text{Donc } E(Y) = \sum_{n=0}^s (s - n)p_n .$$

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{\infty} (s - n)p_n = s - L$$

$$\text{Par conséquent } E(Y) = s - L - \sum_{n=s+1}^{\infty} (s - n)p_n = s - L + L_q = s(1 - \rho).$$

On peut noter que le nombre moyen de stations occupées, $E(s - Y) = \lambda/\mu$, ne dépend pas de s .

3.5.3. Distribution du temps de séjour

Calculons la distribution du temps d'attente T_q :

$$p(T_q = 0) = \sum_{n=0}^{s-1} p_n = 1 - \frac{p_s}{1 - \rho} .$$

Si n est le nombre de personnes devant un client au moment où il rentre dans le système, celui-ci est obligé d'attendre si $n \geq s$. On appelle alors T_q^* son temps d'attente. Il commencera son service lorsque qu'il ne restera plus devant lui que $s - 1$ clients, c'est à dire après $n - s + 1$ départs.

Chaque départ suit une distribution exponentielle de paramètre $s\mu$. Donc pour $n \geq s$, T_q^* étant la somme de $n - s + 1$ variables indépendantes de ce type, suit une loi gamma de paramètres $n - s + 1$ et $s\mu$. En procédant comme dans le paragraphe 3.3.4 on établit que pour $t > 0$:

$$p(T_q^* \leq t) = 1 - \frac{p_s}{1 - \rho} \exp[-s\mu t(1 - \rho)].$$

3.5.4. Le système $M/M/\infty$

Considérons maintenant un système comprenant une infinité de stations de service identiques. Dans ce cas chaque client est servi dès son entrée. Le processus de naissance et de mort associé a pour paramètres :

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda & (n \geq 0) \\ \mu_n &= n\mu & (n \geq 1) \end{aligned}$$

λ et μ étant comme d'habitude les taux d'entrée et de service du système.

En adoptant, pour la distribution stationnaire, les mêmes méthodes que précédemment on trouve

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{e^{-\lambda/\mu}}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

En régime stationnaire le nombre de clients X dans le système $M/M/\infty$ suit donc une distribution de Poisson de paramètre λ/μ . Cette distribution limite de celle du paragraphe précédent existe pour toutes valeurs de λ et μ .

On a aussi

$$L = E(X) = \lambda/\mu, \quad W = 1/\mu \quad \text{et} \quad L_q = W_q = 0.$$

3.5.5. Systemes à pertes M/M/s/s

Nous allons considérer maintenant un système excluant toute possibilité d'attente. Cela signifie qu'un client qui arrive ne peut entrer dans le système que si les s stations ne sont pas toutes occupées. Il existe donc, en plus du flux de sortie comprenant les clients servis, un flux de demandes refusées ou perdues. Un central téléphonique est l'exemple typique d'un tel modèle.

On a donc

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & (0 \leq n \leq s) \\ 0 & (n \geq s) \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (1 \leq n \leq s) \\ 0 & (n = 0 \text{ ou } n > s) \end{cases}$$

d'où

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} p_0 \quad (n \leq s)$$

avec

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right]^{-1}$$

Ici aucune restriction n'est imposée à λ et μ . Lorsque s tend vers l'infini on retrouve la solution du système $M/M/\infty$.

La **probabilité de pertes** du système, c'est à dire la probabilité qu'un client qui arrive ne puisse entrer, est égale à la probabilité pour le système de se trouver dans l'état s :

$$p(\text{pertes}) = p_s = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \frac{1}{s!} p_0.$$

On trouve aussi

$$W = 1/\mu,$$

$$L = \lambda_e W = \lambda(1 - p_s)W = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_s)$$

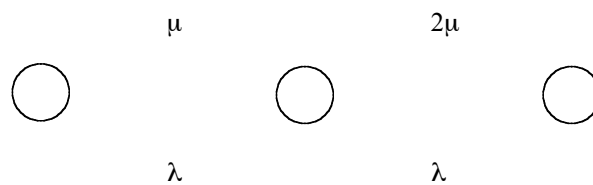
où λ_e est le taux d'entrée des clients dans le système, alors que $W_q = L_q = 0$

Le système M/M/s/N(n>s) peut être traité de façon analogue.

EXEMPLE 23

Un central téléphonique d'une petite entreprise comprend deux lignes d'entrée.

Le graphe des transitions est le suivant :



Les équations de balance sont

$$\mu p_1 = \lambda p_0$$

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2$$

D'où

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 p_0$$

avec

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \right]^{-1} .$$

Si par exemple $\lambda = \mu$, on trouve

$$p_0 = 2/5, \quad p_1 = 2/5, \quad p_2 = 1/5,$$

ce qui signifie que 20% des appels sont perdus.

