Université Paris-Sud — 2005/2006
Master de Mathématiques 2ème année : Algèbre, Analyse, Géométrie — Géométrie Différentielle

Examen de géométrie différentielle

30 juin 2006, durée 3h
Documents autorisés

I. Calcul des variations

Soit g une métrique riemannienne sur $\mathbf{R}^n$, dont la matrice au point q est notée $G(q)$. Soit α une 1-forme différentielle sur $\mathbf{R}^n$. On s'intéresse au problème variationnel suivant : trouver, parmi les courbes $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^n$, $t \mapsto q(t)$ d'extrémités P et Q fixées, les courbes extrémales pour la fonctionnelle

$$\Phi(q) = \int_\gamma \alpha.$$

1. Montrer que si la différentielle extérieure $d\alpha$ s'annule, alors le problème variationnel Φ n'est pas très intéressant.

2. A quel lagrangien $L(q,\dot q)$ ce problème variationnel correspond-il ? Ecrire les équations d'Euler-Lagrange pour Φ au moyen de $d\alpha$.

3. On note $L_0(q,\dot q) = \frac{1}{2}g_q(\dot q)$ le lagrangien correspondant à l'énergie des courbes. On note H_0 le hamiltonien associé. Rappeler son expression (cours). Soit H le hamiltonien correspondant à $L + L_0$. Exprimer H en fonction de H_0. En déduire que les extrémales de $q \mapsto E(q) + \Phi(q)$ sont parcourues à vitesse constante.

II. Géométrie riemannienne

Soit M une variété riemannienne complète, soient $P_1, \ldots, P_k$ des points distincts de M. On s'intéresse la fonction $u : M \to \mathbf{R}_+$, $P \mapsto \sum_{i=1}^k d(P, P_i)$.

1. Montrer que la fonction u atteint son minimum sur M.

2. Cas où $k = 2$. Montrer que $u(P) = \inf u$ si et seulement si P appartient à un segment géodésique minimisant entre P_1 et P_2.

3. On suppose toujours que $k = 2$. Soit M le cylindre quotient du plan euclidien par la translation $(x,y) \mapsto (x+1,y)$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{2},0)$. Dessiner le lieu des points où u atteint son minimum.

4. On suppose que $k = 3$. Soit M le cylindre quotient du plan euclidien par la translation $(x,y) \mapsto (x+1,y)$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{3},0)$, $P_3 = (\frac{2}{3},0)$. En combien de points u atteint-elle son minimum ?

5. On suppose que $k = 4$. Soit M le cylindre quotient du plan euclidien par la translation $(x,y) \mapsto (x+1,y)$, $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{4},0)$, $P_3 = (\frac{1}{2},0)$, $P_4 = (\frac{3}{4},0)$. En combien de points u atteint-elle son minimum. Déterminer le lieu des points où u atteint son minimum.

6. On suppose que $k = 3$ et que M est le plan hyperbolique. Montrer qu'en un point P où u atteint son minimum, les géodésiques PP_1, PP_2 et PP_3 font entre elles des angles égaux à 120^0.

III. Classes caractéristiques

1. Soit M une variété compacte orientée, de dimension paire. La classe d'Euler $e(TM)$ dépend-elle du choix de l'orientation de M ? Et le nombre d'Euler $\langle e(TM), [M] \rangle$?

2. On suppose de plus que $dim(M) = 4$. On suppose que la classe de Pontrijagin $p_1(TM)$ est non nulle. Montrer que tout difféomorphisme de M préserve l'orientation.

3. Montrer que si M est un espace projectif complexe de dimension complexe paire, alors tout difféomorphisme de M préserve l'orientation.

4. Donner un exemple de difféomorphisme de $\mathbf{C}P^1$ qui renverse l'orientation.

5. Soit N une variété orientée quelconque. Donner un exemple de difféomorphisme de $\mathbf{C}P^1 \times N$ qui renverse l'orientation.

6. On note $\mathbf{H}$ le corps des quaternions, muni de ses éléments i, j et k. Alors i définit une structure complexe sur le fibré tautologique quaternionien $\gamma_1(\mathbf{H}^m)$. On identifie l'espace vectoriel réel $\mathbf{H}^m$ muni de la structure complexe i à $\mathbf{C}^{2m}$. Montrer que le fibré projectivisé (au sens complexe) de $\gamma_1(\mathbf{H}^m)$ est difféomorphe à $M = \mathbf{C}P^{2m-1}$. Construire un difféomorphisme de M qui renverse l'orientation.

Corrigé de l'examen de géométrie différentielle

30 juin 2006, durée 3h

I. Calcul des variations

1. Si $d\alpha = 0$, alors $\int_\gamma \alpha$ ne dépend pas de la courbe γ. En effet, deux courbes γ_0 et γ_1 dans $\mathbf{R}^n$ sont toujours homotopes relativement aux extrémités, i.e. sont les restrictions à $\{0\} \times [0,1]$ et $\{1\} \times [0,1]$ d'une application lisse $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}^n$ constante sur $[0,1] \times \{0\}$ et $[0,1] \times \{1\}$. La formule de Stokes donne

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \alpha - \int_{\gamma_0} \alpha &= \int_{\partial[0,1]\times[0,1]} H^*\alpha \\ &= \int_{[0,1]\times[0,1]} H^* d\alpha \\ &= 0. \end{aligned}$$

2. Ici, $L(q, \dot{q}) = \alpha_q \dot{q}$ où on note la forme linéaire α_q par un vecteur ligne. Les équations d'Euler-Lagrange pour Φ s'écrivent

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t))\right) = 0.$$

Notons $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ et $q = (q_1, \ldots, q_n)$. Alors $\frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n da_i \dot{q}_i$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^n a_i(q) dx_i$, la dérivée par rapport à t,

$$\frac{d}{dt}\alpha_{q(t)} = \sum_{i=1}^n da_i(\dot{q}) dx_i.$$

L'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$\sum_{i=1}^n da_i \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n da_i(\dot{q}) dx_i,$$

i.e. pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\dot{q}_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\dot{q}_i = 0,$$

autrement dit,

$$\iota_{\dot{q}} d\alpha = 0.$$

On retrouve le fait que si $d\alpha = 0$, Φ est constante.

3. D'après le cours, $H_0(q, p) = \frac{1}{2} p G^{-1} p^\top$. Par définition, H est la transformée de Legendre de $L + L_0$, i.e.

$$\begin{aligned} H(q,p) &= \sup\{p\dot{q} - L(q,\dot{q}) - L_0(q,\dot{q}) \,|\, \dot{q} \in \mathbf{R}^n\} \\ &= \sup\{(p - \alpha_q)\dot{q} - L_0(q,\dot{q}) \,|\, \dot{q} \in \mathbf{R}^n\} \\ &= H_0(p - \alpha_q) \\ &= \frac{1}{2}(p - \alpha_q) G^{-1} (p - \alpha_q)^\top. \end{aligned}$$

Le sup est atteint au point $\dot{q}_p = G^{-1}(p - \alpha_q)^\top$.

A une extrémale $t \mapsto q(t)$, on associe la solution $t \mapsto (q(t), p(t) = \alpha_{q(t)} + \dot{q}(t)^\top G)$ des équations d'Hamilton. La fonction

$$\begin{aligned} H(q(t), p(t)) &= \frac{1}{2}(p(t) - \alpha_{q(t)})G^{-1}(p(t) - \alpha_{q(t)})^\top \\ &= L_0(\dot{q}(t)) \end{aligned}$$

est constante. Autrement dit, les extrémales de $q \mapsto E(q) + \Phi(q)$ sont parcourues à vitesse constante.

II. Géométrie riemannienne

1. Comme M est complète, la boule fermée B de centre P_1 et de rayon $\inf u + 1$ est compacte, donc u atteint sa borne inférieure sur cette boule, en un point P. Si $Q \notin B$, alors

$$u(Q) = \sum_{i=1}^{k} d(Q, P_i) \geq d(Q, P_1) > \inf u + 1,$$

donc $\inf_{M \setminus B} u \geq \inf u + 1$. On conclut que $\inf_M u = \inf_B u$ est atteint en P.

2. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $P \in M$, $u(P) \geq d(P_1, P_2)$, et l'égalité a lieu en P_1 et P_2, donc $\inf u = d(P_1, P_2)$. De plus l'égalité a aussi lieu en tout point de tout segment géodésique minimisant de P_1 à P_2. Réciproquement, si $u(P) = d(P_1, P_2)$, alors des segments géodésiques minimisants de P_1 à P et de P à P_2 mis bout à bout forment un chemin de longueur $d(P_1, P_2)$ de P_1 à P_2, donc ce chemin est minimisant, c'est une géodésique, donc P appartient à un segment géodésique minimisant entre P_1 et P_2.

3. Les segments géodésiques minimisants de P_1 à P_2 se relèvent en des segments de droites de longueur $1/2$ reliant un translaté de P_1 à un translaté de P_2. A translation près, il y en a de deux types, $s \mapsto (s, 0)$ et $s \mapsto (-s, 0)$. Cela donne deux segments minimisants de P_1 à P_2. Mis bout à bout, ils forment une géodésique périodique.

4. On remarque que M est le produit riemannien $S \times \mathbf{R}$ de la géodésique périodique S passant par les P_i (définie par l'équation $\{y = 0\}$) par la droite réelle. Pour tout point $P = (x \bmod 1, y) \in M$, le point $P' = (x \bmod 1, 0)$ est plus proche des P_i que P. Par conséquent, la borne inférieure de u est atteinte en des points de S. Si $P \in S$ varie sur un arc entre deux P_i, la somme de ses distances à ces points est constante. Sa distance au troisième est minimale aux extrémités de l'arc. On conclut que u atteint son minimum en 3 points, P_1, P_2 et P_3.

5. De nouveau, il suffit d'étudier u le long de S. Si $P \in S$ varie sur un arc entre deux P_i, la somme de ses distances à ces points est constante, car on est sur un segment minimisant entre ces points. La somme des distances de P aux deux autres points (notons les P_i et P_j) est aussi constante, mais pour une raison différente. Comme l'arc représente moins de la moitié du diamètre, les segments minimisants de P à P_i et P_j partent de P dans des directions opposées, indépendantes de la position de P, donc la somme des distances vaut toujours $3/4$. On conclut que u est constante, égale à 1, le long de S. Le lieu des points où u atteint son minimum est donc égal à S.

6. En géométrie hyperbolique, il y a unicité de la géodésique entre deux points, et elle dépend différentiablement des extrémités. Par conséquent, la distance à un point P_i est une fonction lisse en dehors de P_i. Son gradient en P est le vecteur unitaire $v_i(P)$, vitesse en P de la géodésique de P_i à P. Le gradient de u est la somme des v_i. Si le minimum est atteint en un point P distinct des P_i, u est lisse en P et on a $v_1 + v_2 + v_3 = 0$. Trois vecteurs de somme nulle dans le plan, ce sont les côtés d'un triangle. Comme les vecteurs sont unitaires, le triangle est équilatéral, donc les angles entre deux vecteurs valent 120^0.

Il arrive que le minimum soit atteint en l'un des P_i. Comme l'a remarqué Gregor, c'est le cas si les P_i sont alignés (il y avait donc une erreur dans l'énoncé). Ce n'est pas le seul cas. Si l'angle en P_1 entre P_1P_2 et P_1P_3 est supérieur à 120^0, le minimum est atteint en P_1. En effet, le long du rayon géodésique issu de P_1 avec vitesse initiale v, la fonction u est convexe (cela résulte du fait que le coubure est négative ou nulle), elle admet une dérivée à droite en 0, qui vaut $1+\langle v_2, v\rangle+\langle v_3, v\rangle \geq 0$, donc elle est croissante.

III. Classes caractéristiques

1. La définition de la classe d'Euler d'un fibré ξ nécessite une orientation de ξ. Si on change l'orientation du fibré, la classe d'Euler change de signe. Changer l'orientation de la variété change l'orientation du fibré tangent, mais change aussi le signe de la classe fondamentale, donc le nombre d'Euler $\langle e(TM), [M]\rangle$ ne change pas. C'est cohérent avec les théorèmes qui relient le nombre d'Euler à des quantités indépendantes d'un choix d'orientation, comme la somme alternée des dimensions des espaces de cohomologie.

2. La définition des classes de Pontrijagin d'un fibré ξ ne nécessite aucune orientation de ξ. Par conséquent, la classe de Pontrijagin $p_1(TM)$ ne dépend pas de l'orientation. En revanche, le nombre de Pontrijagin $\langle p_1(TM), [M]\rangle$ en dépend. Soit ϕ un difféomorphisme de M. Alors la différentielle de ϕ donne un isomorphisme de fibré $\phi^*TM \simeq TM$, donc $p_1(\phi^*TM) = p_1(TM)$. Or, par naturalité, $p_1(\phi^*TM) = \phi^*p_1(TM)$. La cohomologie en degré maximum d'une variété compacte orientable étant de rang 1, il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $p_1(TM) = c\mu_M$, où μ_M est la classe fondamentale en cohomologie. Par hypothèse, $c \neq 0$. Il vient donc $\phi^*\mu_M = \mu_M$, donc ϕ préserve l'orientation.

3. D'après un exemple du cours, pour $\mathbf{C}P^{2m}$, la classe de Pontrijagin totale du fibre tangent vaut $(1+h^2)^{2m+1}$, donc $p_{4m}(T\mathbf{C}P^{2m}) = C_{2m+1}^m h^{2m}$ est non nulle. Le raisonnement de la question 2 s'applique, et on conclut que tout difféomorphisme de M préserve l'orientation.

4. $\mathbf{C}P^1$ est difféomorphe à la sphère unité de $\mathbf{R}^3$, qui possède l'antipodie $v \mapsto -v$, difféomorphisme qui renverse l'orientation (il préserve la normale orientée mais renverse l'orientation de $\mathbf{R}^3$ donc renverse celle de la sphère).

5. Soit a l'antipodie de $\mathbf{C}P^1$. Alors $a \times id$ est un difféomorphisme de $\mathbf{C}P^1 \times N$ qui renverse l'orientation.

6. Un point du fibré projectivisé $P(\gamma_1(\mathbf{H}^m))$ de $\gamma_1(\mathbf{H}^m)$, c'est la donnée d'une droite quaternionienne dans $\mathbf{H}^m$, et, dans cette droite, d'une droite complexe. Cela fournit une application $P(\gamma_1(\mathbf{H}^m)) \to P(\mathbf{H}^m) = \mathbf{C}P^{2m}$. Inversement, étant donnée une droite complexe $D = (\mathbf{R} + \mathbf{R}i)v$ de $\mathbf{H}^m$, la droite quaternionienne $\mathbf{H}v$ correspond à un point q de l'espace projectif $\mathbf{H}P^m$, v définit un vecteur de la fibre en q du fibré tautologique $\gamma_1(\mathbf{H}^m)$, et la droite complexe qu'il engendre dans cette fibre ne dépend pas du choix de v dans D. On a ainsi obtenu l'application réciproque $P(\mathbf{H}^m) = \mathbf{C}P^{2m} \to P(\gamma_1(\mathbf{H}^m))$.

On munit $\mathbf{H}^m$ de la métrique euclidienne standard. Chaque fibre de $P(\gamma_1(\mathbf{H}^m))$ est une droite projective complexe, qui hérite d'une métrique riemannienne qui la rend isométrique à une sphère de $\mathbf{R}^3$. On remarque que l'antipodie $v \mapsto -v$, étant le seul élément non trivial du centre du groupe orthogonal $O(3)$, est canoniquement attachée à la métrique riemannienne de la sphère. Par conséquent, toute variété riemannienne isométrique à une sphère de $\mathbf{R}^3$ possède une antipodie canonique. En utilisant cette antipodie pour chaque fibre de $P(\gamma_1(\mathbf{H}^m))$, on obtient un difféomorphisme global qui renverse l'orientation. En effet, localement sur l'espace projectif quaternionien, le fibré $\gamma_1(\mathbf{H}^m)$ est trivial, donc au-dessus de petits ouverts de $\mathbf{H}P^{m-1}$, $P(\gamma_1(\mathbf{H}^m)) \simeq \mathbf{C}P^1 \times N$. Le difféomorphisme construit est de la forme $a \times id$, donc il renverse l'orientation.