Remplissage et surfaces de révolution *

R. Grimaldi et P. Pansu

August 31, 2001

RESUME : La fonction de remplissage d'une variété riemannienne est ou bien linéaire ou bien au moins quadratique. Cette observation remonte à M. Gromov en 1985. Est-ce la seule restriction ? Nous donnons un résultat partiel : Toute fonction suradditive et surquadratique est équivalente à la fonction de remplissage d'une surface de révolution. Une fonction qui satisfait de plus une inéquation du second ordre naturelle coïncide avec une fonction de remplissage.

ABSTRACT: The filling function of a Riemannian manifold is either linear or at least quadratic. This fact was originally discovered by M. Gromov in 1985. We address the question of the existence of further obstructions. We give a partial answer : every superadditive and superquadratic function is asymptotic to the filling function of a surface of revolution. A function which furthermore satisfies a natural second order differential inequation is equal to a filling function.

1 Introduction

Soit M une variété riemannienne, soit c une courbe fermée dans M. Son aire de remplissage `(filling area)` est la borne inférieure des aires des disques dans M dont le bord est c. Etant donné un réel positif L, notons $Fill_M(L)$ la borne supérieure des aires de remplissage des courbes fermées dans M de longueur au plus L. La fonction $L \to Fill_M(L)$ s'appelle la *fonction de remplissage* de la variété riemannienne M.

Plus généralement, on peut parler d'aire de remplissage pour un cycle, i.e. une réunion de courbes fermées (on ne met aucune contrainte topologique sur les surfaces à bord en jeu). On note $Fill^h_M(L)$ la borne supérieure des aires de remplissage des cycles dans M de longueur au plus L. Cette fonction s'appelle *fonction de remplissage homologique*.

La fonction de remplissage riemannienne a été introduite par M. Gromov en lien avec la théorie des groupes. Lorsque M est le revêtement universel d'une variété compacte de groupe fondamental G, la fonction de remplissage de M est équivalente à la fonction de Dehn d'une présentation finie de G, qui mesure la complexité algorithmique du problème des mots dans G.

Dans [G1], M. Gromov a montré que si un groupe G de présentation finie a une fonction de Dehn sous-quadratique, alors G est hyperbolique, et sa fonction de Dehn est par conséquent linéaire. De nombreux auteurs ont généralisé ce résultat, [B], [O], [Pa]. L'énoncé suivant se trouve dans le livre de M. Bridson et A. Haefliger [BH] (dans un formulation un peu plus générale).

Théorème A. ([BH], theorem 2.11 page 422). *Soit M une variété riemannienne, soit $L \to Fill_M(L)$ sa fonction de remplissage. Si*

$$\lim_{L\to+\infty} Fill_M(L)/L^2 = 0,$$

alors il existe une constante C telle que pour tout L assez grand,

$$Fill_M(L) \leq C\,L.$$

*Mots clé : Inégalité isopérimétrique, remplissage, fonction de Dehn. Mathematics Subject Classification : 53C20, 49Q20, 20F65, 53A05.

Problème : Il y a t'il d'autres restrictions sur les fonctions de remplissage riemanniennes ?

2 Les résultats

Une fonction de remplissage est croissante et au moins linéaire. Nous pensons que ces deux propriétés élémentaires et le théorème A sont les seules restrictions. Dans cet article, nous donnons un résultat partiel dans cette direction.

Théorème 1 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞ à dérivée strictement positive. On fait les hypothèses suivantes.*

1. *F possède la propriété de* suradditivité restreinte*, i.e. il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $L > \lambda$ et tout entier n,*
$$F(nL) \geq n\, F(L).$$
2. *F est* surlinéaire*, i.e.*
$$\lim_{L\to+\infty} \frac{F(L)}{L} = +\infty.$$

Alors il existe une surface de révolution M de classe C^∞ telle que pour L assez grand,

$$F(L) \leq Fill_M(L) \leq F(L) + L^2.$$

En particulier, si F est de plus surquadratique*, i.e.*

$$\lim_{L\to+\infty} F(L)/L^2 = +\infty,$$

alors

$$\lim_{L\to+\infty} \frac{Fill_M(L)}{F(L)} = 1.$$

2.1 Idée de la preuve du théorème 1

Soit F une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+$ telle que

- $F(0) = 0$, $F''(0) = 1/2\pi$ et F se prolonge en une fonction paire, de classe C^∞, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
- Pour tout $L > 0$, $F'(L) > 0$.
- $\liminf_{L\to+\infty} F(L)/L > 0$.

Il existe une unique surface de révolution M_F (i.e. une métrique sur $\mathbf{R}^2$ de la forme $dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2$), telle que la longueur d'un parallèle,

$$L(r) = 2\pi f(r)$$

et l'aire du disque qu'il borde

$$A(r) = 2\pi \int_0^r f(t)\, dt$$

soient reliés par la relation

$$A(r) = F(L(r))$$

pour tout $r > 0$.

Par construction, $Fill_{M_F} \geq F$. L'inégalité inverse s'obtient en remplissant chaque courbe par (une modification du) cône de sommet l'origine sur cette courbe.

2.2 Remplissage exact

Dire que la fonction de remplissage de la surface de révolution M_F est F revient à dire que parmi toutes les courbes fermées de longueur au plus L, l'unique parallèle de longueur L est celle qui est la plus difficile à remplir par un disque.

On sait, dans des cas particuliers, démontrer que cette propriété est vraie pour tout L. M. Ritoré [R] montre que si la courbure $-f''/f$ est une fonction décroissante de r, alors tous les parallèles sont extrémaux (des résultats voisins se trouvent dans [BC], [HHM], [P1], [T]). Noter que l'hypothèse de M. Ritoré et al. correspond à l'inéquation du troisième ordre

$$((F' - LF'')/F'^3)' \geq 0,$$

qui n'est absolument pas nécessaire. Voici deux conditions nécessaires.

Proposition 1 *Soit M une surface de révolution. Supposons que, dans M, pour L assez grand les courbes extrémales pour le problème du remplissage sont les parallèles. Alors la fonction de remplissage $F = Fill_M$ satisfait pour L assez grand l'inéquation différentielle*

$$L^3 F''(L)/F'(L)^3 \leq 4\pi^2. \qquad (*)$$

Si de plus $F = Fill_M^h$ coïncide avec la fonction de remplissage homologique, alors F est suradditive, *i.e. il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous L, $L' > \lambda$,*

$$F(L + L') \geq F(L) + F(L').$$

En effet, l'inégalité (*), elle signifie exactement que les parallèles sont non seulement des points critiques de l'aire de remplissage à longueur fixée, mais que ce sont des solutions faiblement stables, i.e. la variation seconde de l'aire de remplissage à longueur fixée est négative ou nulle. C'est donc une condition nécessaire pour que les parallèles maximisent l'aire de remplissage à longueur fixée. La suradditivité quant à elle résulte de l'hypothèse qu'un parallèle fait mieux qu'une réunion de parallèles. Nous montrons une sorte de réciproque.

Théorème 2 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞. On fait les hypothèses suivantes.*

1. *La fonction F est* suradditive, *i.e. il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous L, $L' > \lambda$,*

$$F(L + L') \geq F(L) + F(L');$$

2. *La dérivée $F'(L)$ est* surlinéaire, *i.e.*

$$\lim_{L \to +\infty} \frac{F'(L)}{L} = +\infty.$$

3.

$$\mathrm{limsup}_{L \to +\infty} \frac{L^3 F''(L)}{F'(L)^3} < 4\pi^2.$$

Alors il existe une surface de révolution M de classe C^∞ telle que pour tout L assez grand,

$$Fill_M(L) = Fill_M^h(L) = F(L).$$

2.3 Idée de la preuve du théorème 2

Supposons que pour tout L assez grand, l'inéquation

$$L^3 F''(L)/F'(L)^3 \leq \epsilon^2 4\pi^2. \qquad (*)_\epsilon$$

est satisfaite pour un $\epsilon < 1$. Alors chaque parallèle admet un voisinage dans l'espace des courbes fermées dans lequel il est le seul point critique de l'aire de remplissage à longueur fixée, i.e. la seule courbe fermée à courbure géodésique constante.

Supposons la dérivée F' strictement surlinéaire. On montre que pour L grand, le problème variationnel du remplissage homologique admet une solution, un cycle dont chaque composante est à courbure géodésique constante. Un argument de principe du maximum montre que l'intégrale de la courbure géodésique de chaque composante c tend vers 0 et que la largeur de l'anneau de révolution contenant c est petite par rapport à la longueur de c. Par conséquent, c est suffisamment proche d'un parallèle, i.e. contenue dans un voisinage qui ne contient qu'une courbe fermée à courbure constante, le parallèle lui-même. On conclut que pour L assez grand, les réunions de parallèles sont optimales pour le problème de remplissage homologique. Si de plus F est suradditive, les parallèles eux-mêmes sont optimaux, donc la fonction de remplissage coïncide avec F.

2.4 Remplissage approché, version améliorée

Plus F croît vite, plus F est proche d'une fonction qui satisfait l'inégalité (*). En effet, l'inégalité (*) a, en termes de la surface M_F, une jolie interprétation physique. Elle signifie que M_F se plonge dans l'espace euclidien comme une surface de révolution qui est l'enveloppe d'une famille de sphères de même axe. Nous appelons de telles surfaces des *cornets de glace* (`ice cream cones`). Etant donnée une surface de révolution M_F dans l'espace dont la longueur des parallèles est croissante, on considère la famille des sphères inscrites dans M_F. Son enveloppe est un cornet de glace asymptote à M_F. Cette discussion s'étend aux ϵ-cornets de glace, solutions de l'inéquation $(*)_\epsilon$. L'inégalité de remplissage optimale établie pour les ϵ-cornets de glace (théorème 2) entraîne une inégalité de remplissage approchée pour M_F, d'autant meilleure que F croît rapidement. Voici une conséquence, parmi d'autres, de ce phénomène.

Théorème 3 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞. Pour n entier, on note*

$$u_n = \inf_{L \geq n} \frac{2\pi F'(L)}{L}.$$

On suppose que

1. *F est suradditive, i.e. il existe $\lambda > 0$ tel que pour tous L, $L' > \lambda$,*
$$F(L + L') \geq F(L) + F(L').$$
2. *La série $\sum \frac{n}{u_n}$ est convergente.*

Alors il existe une surface de révolution M de classe C^∞ telle que pour tout L assez grand, $Fill_M(L) = Fill_M^h(L)$ et

$$\lim_{L \to +\infty} Fill_M(L) - F(L) = 0.$$

2.5 Questions

1. Etant donné un cornet de glace M, y a t'il d'autres conditions nécessaires (resp. suffisantes) pour que les réunions de parallèles soient les solutions du problème de remplissage homologique dans M ?
2. Les résultats obtenus ici apportent-ils un éclairage utile sur les fonctions de Dehn des groupes de présentation finie ? Ils semblent que celles-ci puissent être très diverses, voir par exemple [G2].

2.6 Plan de l'article

On construit d'abord en section 3 la surface de révolution candidate pour avoir une fonction de remplissage prescrite. La section 4, dédiée au remplissage par des disques, se termine sur la preuve du théorème 1. La section 5 précise, au moyen du langage des courants, la notion de remplissage homologique. En section 6, on donne une condition suffisante d'existence d'un cycle extrémal pour le problème de remplissage homologique. C'est en section 7 qu'on fait usage du principe du maximum pour obtenir des estimations *a priori* sur les courbes à courbure géodésique constante. La section 8 donne une condition suffisante pour que les parallèles soient quantitativement isolés parmi les courbes à courbure géodésique constante, et se conclut sur la preuve du théorème 2. On poursuit avec l'interprétation géométrique de l'inégalité différentielle (*) (section 9) : les cornets de glace. Une variante, les ϵ-cornets, est nécessaire pour prouver le théorème 3 en section 10.

3 Construction d'une surface de révolution

Proposition 2 *Soit* $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *une fonction de classe* C^∞*. On suppose que*

- $F(0) = 0$*,* $F''(0) = 1/2\pi$ *et* F *se prolonge en une fonction paire, de classe* C^∞*, de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$*.*
- *Pour tout* $L > 0$*,* $F'(L) > 0$*.*
- $\liminf_{L\to+\infty} F(L)/L > 0$*.*

Alors il existe une unique surface de révolution $M = (\mathbf{R}^2, dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2)$ *de classe* C^∞ *telle que pour tout* $R > 0$*,*

$$2\pi \int_0^R f(r)\, dr = F(2\pi f(R)).$$

Dans cette surface, la courbure géodésique du parallèle d'équation $\{r = R\}$ *vaut* $1/F'(L)$ *où* $L = 2\pi f(r)$*. La courbure de Gauss le long de ce parallèle vaut* $(LF'' - F')/F'^3$*.*

Preuve. On cherche une fonction f telle que pour tout $r \geq 0$,

$$A(r) := 2\pi \int_0^r f(t)\, dt = F(2\pi f(r)).$$

Comme $2\pi f(r) = \frac{dA}{dr}$, il vient $A(r) = F(A'(r))$. Par hypothèse, $F' > 0$ et $F(0) = 0$, donc F est un difféomorphisme de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$. Notons G la fonction réciproque de F. Il s'agit de trouver une fonction A telle que $G(A) = \frac{dA}{dr}$. On définit donc une fonction ρ sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\rho(A) = \int_0^A \frac{da}{G(A)}.$$

Comme $G(a) \sim \sqrt{4\pi a}$ au voisinage de zéro, l'intégrale ρ a un sens. La fonction ρ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est strictement positive. Comme F est au moins linéaire, G est au plus linéaire, donc ρ tend vers $+\infty$. ρ est donc un difféomorphisme de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$, et on note $r \mapsto A(r)$ la fonction réciproque. Posons enfin $f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{dA}{dr}$. C'est une fonction de classe C^1 équivalente à r au voisinage de 0. Par construction, $A(r) = F(2\pi f(r))$ donc $f(r) = \dfrac{1}{2\pi} G(A(r))$ ce qui montre que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Comme F se prolonge en une fonction paire de classe C^∞ et $F''(0) = 1/2\pi$, f se prolonge en une fonction impaire, de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, telle que $f'(0) = 1$. C'est la condition pour que la métrique $dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2$ soit de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

En dérivant la relation $A = F(2\pi f)$, il vient $f = F'(2\pi f)f'$ puis $f' = 2\pi F''(2\pi f)f'^2 + F'(2\pi f)f''$. Or la courbure géodésique des parallèles est $f'/f = 1/F'(2\pi f)$ et la courbure de Gauss $-f''/f = (2\pi f F''(2\pi f) - F'(2\pi f))/F'(2\pi f)^3$. ∎

Définition 3 *On* note M_F *la surface de révolution associée à une fonction* F*.*

Dans la suite, **on supposera toujours les trois hypothèses de la proposition 2 satisfaites**.

Remarque. Le fait que A tende vers $+\infty$ entraîne que f tend vers $+\infty$.

La formule $f'/f = 1/F'(2\pi f)$ montre que f est strictement croissante. De plus, si F' tend vers $+\infty$, f'/f tend vers 0. Cela entraîne qu'une bande de largeur constante $\{R \leq r \leq R + \text{const.}\}$ est de plus en plus proche d'un cylindre euclidien, lorsque R tend vers l'infini, et explique pourquoi la solution du problème de remplissage doit converger vers un parallèle, solution du problème de remplissage dans le cylindre.

4 Remplissage par des disques

4.1 Généralités

Définition 4 *Soit M une variété riemannienne. Un* disque *dans M est une application lipschitzienne $u : \Omega \to M$ du disque unité Ω dans M. Son* aire *est l'intégrale sur Ω du 2-jacobien de u,*

$$\mathrm{aire}\, u = \int_{\Omega} |\Lambda^2 du|.$$

*Soit $\gamma : \partial\Omega \to M$ une courbe fermée dans M. L'*aire de remplissage *de γ est*

$$\mathrm{Aire}\,(\gamma) = \inf\{\mathrm{aire}\,(u)\,;\, u_{|\partial\Omega} = \gamma\}$$

(l'aire et la longueur étant invariantes par reparamétrisation à la source, on utilisera aussi des courbes et des disques paramétrés par divers objets homéomorphes au cercle ou au disque unité).

La fonction de remplissage *de M est*

$$Fill_M(L) = \sup\{\mathrm{Aire}\,(\gamma)\,;\, \gamma \textit{ courbe fermée de longueur } \leq L\}.$$

Proposition 5 *Soit M une variété riemannienne. La fonction de remplissage de M est au moins linéaire, i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$Fill_M(L) \geq \delta\, L \quad \textit{pour tout } L > \epsilon.$$

Preuve. Soit γ une courbe fermée dans M de longueur $< \epsilon$ et β une 1-forme différentielle à support compact sur M telle que

$$\int_{\gamma} \beta = 1.$$

Voici comment les construire. Prendre une fonction à support compact χ sur $\mathbf{R}^{n-1}$ qui vaut 1 à l'origine. La 1-forme $\beta_0 = \chi\, dt$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^{n-1}$ est à support compact et d'intégrale 1 sur $\gamma_0 = \mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \{0\}$. Le tore solide $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \times \mathbf{R}^{n-1}$ est difféomorphe au complémentaire de $\mathbf{R}^{n-2}$ dans $\mathbf{R}^n$ donc se plonge dans un ouvert arbitrairement petit de M. Il ne reste plus qu'à transporter β_0 et γ_0 dans M.

Si $L > \epsilon$, alors $n = [L/\epsilon] \geq 1$ et $n\epsilon \leq L < 2n\epsilon$. Si u est un disque dont le bord est la courbe γ parcourue n fois, alors

$$\int_u d\beta \leq N \mathrm{aire}\,(u)$$

où N est la norme L^{∞} de $d\beta$. Par conséquent

$$N \mathrm{aire}\,(u) \geq \int_{\gamma^n} \beta = n$$

d'où

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}\,(\gamma^n) \geq \frac{n}{N}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} Fill_M(L) &\geq Fill_M(n\epsilon) \\ &\geq \mathrm{Aire^h}\,(\gamma^n) \\ &\geq \frac{n}{N} \\ &\geq \frac{1}{2\epsilon N} L. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Remarque 6 *Lorsque M est une surface riemannienne orientée et γ une courbe fermée simple qui borde un domaine simplement connexe Δ, l'argument de la proposition 5 s'applique à une primitive de la forme d'aire, et donne que*

$$\mathrm{Aire^h}\,(\gamma^n) = n\,\mathrm{Aire^h}\,(\gamma) = n\,\mathrm{aire}\,(\Delta).$$

pour tout entier n. Par conséquent, si il existe une courbe de longueur L extrémale pour le remplissage et qui est sans points doubles, alors

$$Fill_M(nL) \geq n\,Fill_M(L)$$

pour tout entier n. C'est pourquoi la propriété de suradditivité restreinte qui apparaît dans le théorème 1, bien que n'étant pas nécessaire, est tout de même naturelle.

4.2 Anneaux géodésiques et cônes

On va remplir les courbes tracées sur une surface de révolution par des disques qui sont une modification légère du cône de sommet l'origine.

Lemme 7 *Soit γ une courbe fermée de longueur L dans la surface M_F, ne passant pas par l'origine, et faisant i tours autour de l'origine. Si $i = 0$, alors*

$$\mathrm{Aire}\,(\gamma) \leq L^2.$$

Sinon,

$$\mathrm{Aire^h}\,(\sigma) \leq |i|F(L/|i|) + L^2$$

Preuve. Soit $\gamma : [0,1] \to M$ un arc lipschitzien. Supposons γ contenu dans l'anneau $\{r_1 \leq r \leq r_2\}$. Pour $x \in [0,1]$, notons $\gamma(x) = (r(x), \theta(x))$. La longueur de γ vaut

$$\begin{aligned} \mathrm{Long}\,(\sigma) &= \int_0^1 \sqrt{r'(x)^2 + f(r(x))^2\theta'(x)^2}\,dx \\ &\geq \int_0^1 f(r(x))|\theta'(x)|\,dx. \end{aligned}$$

Notons p_1 le parallèle d'équation $\{r = r_1\}$. L'*anneau géodésique* reliant σ au parallèle p_1 est l'application

$$\kappa : [0,1] \times [0,1] \to M, \quad (t,x) \mapsto ((1-t)r_1 + tr(x), \theta(x)).$$

Son aire vaut

$$\begin{aligned} \mathrm{aire}\,\kappa &= \int_{[0,1]^2} |\kappa^* f(r)\,dr \wedge d\theta| \\ &= \int_{[0,1]^2} f((1-t)r_1 + tr(x))|(r(x) - r_1)\theta'(x)\,dt \wedge dx| \\ &\leq \int_{[0,1]^2} f(r(x))(r_2 - r_1)|\theta'(x)|\,dt\,dx \\ &= (r_2 - r_1)\int_0^1 f(r(x))|\theta'(x)|\,dx \\ &\leq (r_2 - r_1)\mathrm{Long}\,(\sigma), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que f est croissante et l'hypothèse que $r(x) \leq r_2$ pour tout $x \in [0,1]$.

Supposons maintenant que γ est une courbe fermée. Choisissons r_1 maximal et r_2 minimal, de sorte que les parallèles correspondants touchent σ. Alors $r_2 - r_1 \leq L$, car la projection sur un méridien diminue les longueurs. Par conséquent, l'aire de l'anneau est majorée par L^2.

Le bord de l'anneau géodésique est la différence de σ et d'une courbe σ' contenue dans le parallèle p_1 et homotope au parallèle parcouru i fois, où i est le nombre de tours (l'indice de γ par rapport à l'origine). Si $i = 0$, σ' est homotope à zéro à l'intérieur du parallèle. On peut donc refermer l'anneau en un disque sans ajouter d'aire, et

$$\mathrm{Aire}\,(\sigma) \leq L^2.$$

Sinon, on prolonge l'anneau géodésique par une homotopie à l'intérieur du parallèle de σ' au parallèle p_1 parcouru i fois (d'aire nulle), et on referme au moyen du disque

$$[0, r_1] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, \quad (t, \theta) \mapsto (t, i\theta)$$

dont l'aire vaut $|i| F(\mathrm{Long}\,(p_1))$. Comme la projection sur le parallèle p_1 diminue les longueurs des courbes contenues dans $\{r \geq r_1\}$,

$$|i| \mathrm{Long}\,(p_1) \leq L$$

d'où

$$F(\mathrm{Long}\,(p_1)) \leq F(\frac{L}{|i|}).$$

Il vient

$$\mathrm{Aire}\,(\sigma) \leq L^2 + |i| F(\frac{L}{|i|}). \blacksquare$$

4.3 Preuve du théorème 1

On modifie F sur un voisinage $[0, \epsilon[$ de 0 pour qu'elle satisfasse aux hypothèses de la proposition 2. Cela permet de construire la surface M_F. D'après la remarque 6, pour $L > \epsilon$, le parallèle de longueur L dans M_F a une aire de remplissage égale à $F(L)$. Par conséquent

$$Fill_{M_F}(L) \geq F(L)$$

pour tout $L > \epsilon$.

Soit λ la constante intervenant dans l'hypothèse de suradditivité restreinte. Soit σ une courbe de longueur L dans M_F. Par continuïté de l'aire de remplissage, on peut supposer que σ ne passe pas par l'origine. Notons i l'indice de l'origine par rapport à σ. Si $i = 0$ ou si $L/|i| > \lambda$, alors le lemme 7 donne

$$\mathrm{Aire}\,(\sigma) \leq F(L) + L^2.$$

Sinon, σ touche un parallèle $\{r_1\}$ dont la longueur est $< \lambda$. Par conséquent $r_1 < \rho$, constante indépendante de L. Il vient $r_2 < \rho + L$ et le lemme 7 donne

$$\mathrm{Aire}\,(\sigma) \leq (\rho + L)L \leq F(L) + L^2$$

pour L assez grand si F est surlinéaire. On conclut que

$$Fill_{M_F}(L) \leq F(L) + L^2$$

pour L assez grand. $\blacksquare$

5 Remplissage homologique

5.1 Courants entiers

On utilise les courants entiers de Federer, [F], chapitre 4.1. Un *courant normal* de dimension k sur une variété riemannienne M est une fonctionnelle continue sur l'espace des formes différentielles de degré k sur M muni de la norme

$$\| \omega \|_{L^\infty(M)} + \| d\omega \|_{L^\infty(M)}.$$

Le bord d'un courant c est défini par dualité,

$$\partial c(\omega) = c(d\omega).$$

Un courant entier `(integral current)` est un courant normal qui est dans l'adhérence des chaînes entières, i.e. des combinaisons à coefficients entiers de courants d'intégration sur des simplexes lipschitziens. La *masse* d'un courant c est

$$\mathbf{M}(c) = \sup\{c(\omega)\,;\, \| \omega \|_{L^\infty} \leq 1\}.$$

Un *cycle entier* est un courant entier dont le bord est nul. **Dans la suite, les cycles seront toujours entiers et de dimension 1**. Les courbes fermées sont des exemples de cycles, et leur masse coïncide avec leur longueur. Par extension, on appellera souvent longueur la masse des courants entiers de dimension 1.

L'homologie du complexe des courants entiers coïncide avec l'homologie à coefficients entiers de la variété ([F], chapitre 4.4). Pour une surface M difféomorphe à $\mathbf{R}^2$, $H_1(M,\mathbf{Z}) = H_2(M,\mathbf{Z}) = 0$. Il en résulte que chaque cycle σ borde exactement un courant entier de dimension 2. La masse de ce courant s'appelle *l'aire de remplissage* de σ, et est notée $\mathrm{Aire^h}\,(\sigma)$. La *fonction de remplissage homologique* est définie comme suit. Pour $L > 0$,

$$Fill^h_M(L) = \sup\{\mathrm{Aire^h}\,(\sigma)\,;\, \sigma\,\text{cycle de masse } \leq L\}.$$

Remarque 8 *Lorsque M est difféomorphe à $\mathbf{R}^2$ et σ est le courant d'intégration le long d'une courbe fermée simple γ,* $\mathrm{Aire^h}\,(\sigma) = \mathrm{Aire}\,(\gamma)$. *Par conséquent, il y a peu de risque de confusion, et on abrègera indûment aire de remplissage homologique par aire de remplissage.*

De ce fait, il resulte aussi que $Fill^h \geq Fill$ pour toute surface difféomorphe à $\mathbf{R}^2$.

Enfin, dans la surface M_F, l'aire de remplissage homologique du parallèle de longueur L est égale à l'aire du disque bordé par ce parallèle, soit $F(L)$. Par conséquent, si σ est un cycle qui maximise l'aire de remplissage homologique parmi les cycles de longueur $\leq L$, alors $\mathrm{Aire^h}\,(\sigma) \geq F(L)$.

Remarque 9 Lien avec le profil isopérimétrique. *Soit M une surface riemannienne d'aire infinie. Appelons* profil isopérimétrique pour les domaines avec multiplicités *de M la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par*

$$I^m(a) = \inf\{\mathrm{Long}\,(\partial c\,;\, c \text{ courant de masse } a\}.$$

Noter que dans la définition du profil isopérimétrique authentique I (voir [BP]), on se limite aux domaines sans multiplicité, i.e. aux courants c tels que $i_c \in \{0,1\}$, donc $I^m \geq I$. Posons

$$I^m(\geq a) = \inf\{I^m(b)\,;\, b \geq a\}.$$

Alors $I^m(\geq)$ est la fonction réciproque de $Fill^h$.

En effet, pour tous $L > 0$, $a > 0$,

$$\begin{aligned} a \geq Fill^h(L) &\Leftrightarrow \text{ pour tout courant entier } c, \quad M(\partial c) < L \Rightarrow M(c) \leq a \\ &\Leftrightarrow \text{ pour tout courant entier } c, \quad M(c) > a \Rightarrow M(\partial c) \geq L \\ &\Leftrightarrow L \leq I^m(\geq a). \end{aligned}$$

5.2 Résultats généraux

De la théorie de la mesure géométrique, on va utiliser un théorème de structure et une propriété de la norme du bord pour les courants entiers de dimension maximale, un théorème de compacité et un théorème de régularité.

Proposition 10 ([F], chapitre 4.5). *Soit M une variété riemannienne orientée de dimension n et c un courant entier de dimension n. Il existe une fonction mesurable $i_c : M \to \mathbf{Z}$ à valeurs entières telle que pour toute n-forme ω sur M,*

$$c(\omega) = \int_M i_c \omega.$$

En particulier, la masse de c vaut

$$\mathbf{M}(c) = \parallel i_c \parallel_{L^1} := \int_M |i_c| \, dvol.$$

Lemme 11 ([P2], remarque 15). *Soit M une variété riemannienne orientée de dimension n et c un courant entier de dimension n. Notons $|c|$ le courant tel que*

$$i_{|c|} = |i_c|.$$

Alors

$$\mathbf{M}(|c|) = \mathbf{M}(c) \quad et \quad \mathbf{M}(\partial|c|) \leq \mathbf{M}(\partial c).$$

Proposition 12 ([Fl]). *Soit M une variété riemannienne, K une partie compacte de M, $C > 0$. L'ensemble des courants entiers c à support dans K (i.e. qui s'annulent sur les formes différentielles dont le support ne rencontre pas K) et tels que $\mathbf{M}(c) + \mathbf{M}(\partial c) \leq C$ est compact. De plus la masse est continue et la masse du bord semi-continue.*

Proposition 13 ([A]). *Soit M une surface riemannienne de classe C^∞. Soit c un courant entier de dimension 2 dont le bord a une masse minimum parmi tous les courants de même masse. Alors ∂c est une sous-variété compacte de courbure géodésique constante, de classe C^∞.*

6 Existence de cycles extrémaux

Lemme 14 *Soit $M = (\mathbf{R}^2, dr^2 + f(r)^2 \, d\theta^2)$ une surface de révolution telle que f soit croissante. Soit σ un cycle de longueur L contenue dans le disque $\{r \leq R\}$. Alors l'aire de remplissage de σ satisfait*

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma) \leq R\,L.$$

Preuve. On utilise le cône de sommet l'origine : c'est, dans le cas particulier où $r_1 = 0$, l'anneau géodésique apparaissant dans la preuve du lemme 7, où on a montré que pour les arcs lipschitziens de longueur L, la masse du cône est majorée par RL. On prolonge aux chaînes entières par linéarité, puis aux courants entiers par densité, cela donne l'inégalité annoncée. ■

Lemme 15 *Soit F une fonction telle que*

- $\lim_{L \to +\infty} F'(L) = +\infty.$

Alors la fonction de remplissage homologique de la surface M_F est finie.

Preuve. Soit σ un cycle de longueur $\leq L$. Alors σ est la somme de cycles σ_i tels que le support de chaque σ_i soit connexe. En effet, on prend pour σ_i les restrictions de σ à des voisinages des composantes connexes de son support. Notons R_i le maximum de la fonction r sur le support de σ_i. Montrons que si R_i est grand, σ_i contribue à l'aire de remplissage de σ au plus par un terme quadratique en sa longueur. Si $R_i > L$ et si σ_i n'est pas homotope à zéro dans M_F privée de l'origine, alors la projection de σ_i sur le parallèle $\{r = R_i - L\}$ est surjective et diminue les longueurs, donc $L \geq \mathrm{Long}\,(\sigma_i) \geq f(R_i - L)$. Comme f tend vers $+\infty$, cela se traduit par une majoration de la forme $R_i \leq \rho_0(L)$. Si σ_i est homotope à zéro dans M_F privée de l'origine, alors σ_i se relève au revêtement universel de la bande $\{R_i - L \leq r \leq R_i\}$. Par hypothèse, F' tend vers $+\infty$ donc f'/f tend vers 0. Il vient

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{f(R)}{f(R-L)} = 1.$$

Par conséquent, la bande est d'autant plus proche d'une bande euclidienne que R_i est grand. Il existe donc $\rho_1(L) > \rho_0(L)$ tel que

$$R > \rho_1(L) \Rightarrow \frac{f(R)}{f(R-L)} < 2.$$

Alors dans la bande la métrique de révolution est encadrée par une métrique euclidienne,

$$\frac{1}{4}(dr^2 + f(R_i)^2\, d\theta^2) \leq dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2 \leq dr^2 + f(R_i)^2\, d\theta^2$$

D'après l'inégalité isopérimétrique euclidienne

$$\mathrm{Aire^h}_{\,eucl}(\sigma_i) \leq \frac{1}{4\pi}\mathrm{Long}_{\,eucl}(\sigma_i)^2,$$

si $R_i > \rho_1(L)$, l'aire de remplissage de σ_i est au plus égale à $\mathrm{Long}\,(\sigma_i)^2/\pi$. On remplit les composantes telles que $R_i \leq \rho_1(L)$ par un cône. Avec le lemme 14, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire^h}\,(\sigma) &\leq \sum_{R_i\leq\rho_1(L)} \rho_1(L)\mathrm{Long}\,(\sigma_i) + \sum_{R_i>\rho_1(L)} \frac{1}{\pi}\mathrm{Long}\,(\sigma_i)^2 \\ &\leq L\rho_1(L) + \frac{1}{\pi}L^2\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que le carré d'une somme est plus grand que la somme des carrés. ■

Définition 16 (M. Ritoré [R]). *On appelle* onduloïde *sur une surface de révolution une courbe fermée simple qui est transverse à tous les méridiens* $\{\theta = \text{const.}\}$. *On appelle* feuille *une courbe fermée simple homotope à zéro dans le complémentaire de l'origine, et symétrique par rapport à un méridien.*

Proposition 17 *Soit F une fonction telle que*

- $\mathrm{liminf}_{L\to+\infty} \dfrac{F(L)}{L^2} > 1/4\pi.$
- $\lim_{L\to+\infty} F'(L) = +\infty.$

Alors pour L assez grand, dans la surface M_F, il existe un cycle qui maximise l'aire de remplissage parmi tous les cycles de longueur $\leq L$. Ce cycle est une somme finie d'onduloïdes et de feuilles à courbure géodésique constante, deux à deux disjointes. Chacune est extrémale pour le remplissage, i.e. maximise l'aire de remplissage parmi les cycles de même longueur ou de longueur inférieure.

Preuve. On montre que pour L assez grand, il existe $\rho(L) > 0$ tel que pour tout cycle σ de longueur $\leq L$, alors il existe un cycle σ' de longueur $\leq L$, contenu dans le disque $\{r \leq \rho(L)\}$, tel que $\mathrm{Aire^h}\,(\sigma') \geq \mathrm{Aire^h}\,(\sigma)$.

Par hypothèse, il existe $L_0 > 0$ et $\lambda > 1$ tel que

$$L > L_0 \Rightarrow \frac{F(L)}{L^2} > \frac{\lambda^2}{4\pi}.$$

On fixe une fois pour toutes un tel L.

Soit σ un cycle de longueur $\leq L$ dans M_F, bordant un courant c. Par densité, on peut supposer que σ est une combinaison à coefficients entiers d'arcs lipschitziens, de sorte que la fonction i_c est localement constante en dehors du support de σ. D'après le lemme 15, la masse de c est majorée a priori par A qui ne dépend que de L. D'après le lemme 11, on peut supposer que la fonction i_c est à valeurs positives ou nulles. Pour construire σ', on va enlever la partie du cycle σ qui se trouve à distance $> \rho_1$ de l'origine et on la remplace par un parallèle $\{r = \rho_2\}$. Il s'agit de choisir les constantes ρ_1 et ρ_2.

Comme dans la preuve du lemme 15, notons ρ_0 le rayon maximum d'une boule centrée à l'origine qui puisse contenir une courbe de longueur $\leq L$, non homotope à zéro dans M privée de l'origine.

Comme f et F' tendent vers l'infini, il existe $\rho_0' > \rho_0 + L$ tel que

$$R > \rho_0' \Rightarrow \frac{f(R)}{f(R-L)} < \lambda.$$

Il existe $\rho_0'' > 0$ tel que

$$\int_0^{\rho_0''} 2\pi f(r)\, dr = A.$$

Alors dans tout intervalle $[a,b]$ de largeur $b-a > \rho_0'' + L$, il existe r_0 tel que le parallèle $\{r = r_0\}$ ne rencontre pas le support de c. En effet, l'ensemble E des valeurs de $r \in [a,b]$ telles que le parallèle correspondant coupe le support de σ est de longueur au plus L. Si $r \notin E$, alors la fonction i_c est constante le long du parallèle. Si elle ne s'annule jamais, elle vaut au moins 1, donc

$$\int_{([a,b]\setminus E)} i_c\, f(r)\, dr \leq \int_{([a,b]\setminus E)} i_c\, f(r)\, dr \leq \mathbf{M}(c) \leq A.$$

Comme f est croissante,

$$\int_{([a,b]\setminus E)} i_c\, f(r)\, dr \geq \int_0^{\mathrm{Long}\,(([a,b]\setminus E))} i_c\, f(r)\, dr > A,$$

contradiction. On choisit donc $\rho_1 \in [\rho_0', \rho_0' + \rho_0'' + L]$ tel que le parallèle correspondant ne coupe pas c.

Ce parallèle partage σ en des cycles σ_+ et σ_- et c en des courants c_+ et c_+ tels que $\partial c_+ = \sigma_+$ et $\partial c_- = \sigma_-$. On choisit ρ_2 de sorte que

$$2\pi f(\rho_2) = \mathrm{Long}\,(\sigma_+).$$

Alors $\sigma' = \sigma_- + \{r = \rho_2\}$ a même longueur que σ. Le cycle σ' borde le courant c' tel que

$$i_{c'} = \chi_{\{r<\rho_1\}} i_c + \chi_{\{r<\rho_2\}}$$

où χ_B désigne la fonction caractéristique de $B \subset M$. Comme $i_c \geq 0$, la masse de c' vaut

$$\mathbf{M}(c') = \int_{\{r<\rho_1\}} i_c + \int_0^{\rho_2} 2\pi f(r)\, dr = \mathbf{M}(c_-) + F(\mathrm{Long}\,(\sigma_+)).$$

Chaque composante σ_i de $\partial c_+ = \sigma_+$ est homotope à zéro dans un anneau dont la métrique diffère au plus d'un facteur λ^2 d'une métrique euclidienne. Par conséquent

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}\,(\sigma_i) \leq \frac{\lambda^2}{4\pi} \mathrm{Long}\,(\sigma_i)^2$$

donc

$$\mathbf{M}(c_+) = \mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}\,\sigma_+ \leq \frac{\lambda^2}{4\pi} \mathrm{Long}\,(\sigma_+)^2 < F(\mathrm{Long}\,(\sigma_+))$$

donc

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma') = \mathbf{M}(c') > M(c) = \mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma).$$

Soit c_j une suite maximisante de courants, i.e.

$$\mathrm{Long}(\partial c_j) \leq L, \quad \lim \mathbf{M}(c_j) = Fill^h_{M_F}(L).$$

La suite des courants modifiés c'_j est encore maximisante et reste dans un compact fixé. D'après le théorème de compacité 12, il existe une sous-suite convergente, sa limite est un courant c tel que

$$\mathrm{Long}(\partial c) \leq L, \quad \mathbf{M}(c) = Fill^h_{M_F}(L).$$

Montrons que $\mathrm{Long}(\partial c)$ est minimum parmi tous les courants de masse égale à $Fill^h_{M_F}(L)$. Sinon, il existe un courant c' de même masse mais dont le bord est strictement plus court. Soit ψ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M_F défini par

$$\psi_t(r, \theta) = (e^t r, \theta).$$

Alors pour $t > 0$, ψ_t augmente strictement la masse de tous les courants de dimension 2. Or pour tout cycle σ, la fonction $t \mapsto \mathrm{Long}(\psi_t(\sigma))$ est continue. Par conséquent, il existe $t > 0$ tel que $\mathrm{Long}(\psi_t(\partial c')) \leq \mathrm{Long}(\partial c) \leq L$ mais $\mathbf{M}(\psi_t(c')) > \mathbf{M}(c)$, contradiction.

Du théorème de régularité 13, il résulte que ∂c est une variété compacte lisse, i.e. une collection finie de courbes fermées simples lisses disjointes. L'équation d'Euler-Lagrange donne que la courbure géodésique est constante, voir le lemme 26.

Chaque composante connexe du support de ∂c est le bord topologique d'un unique disque d_i. Notons c_i le courant d'intégration sur d_i muni de l'orientation induite par M, et $C = \sum c_i$. Alors ∂C ne diffère de ∂c que par les orientations, i.e. il existe des signes $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que $\partial c = \sum \epsilon_i \partial c_i$. Par unicité du courant de bord donné, $c = \sum \epsilon_i c_i$, donc $\mathrm{Long}(\partial C) = \mathrm{Long}(\partial c)$ et $\mathbf{M}(C) \geq \mathbf{M}(c)$ avec égalité seulement si tous les ϵ_i valent 1. La propriété extrémale de c entraîne que $C = c$. De plus, elle entraîne que chaque courbe ∂c_i maximise l'aire de remplissage parmi les cycles de longueur $\leq \mathrm{Long}(\partial c_i)$.

La dernière assertion concernant les onduloïdes résulte du lemme suivant. ∎

Lemme 18 *Soit $M = (\mathbf{R}^2, dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2)$ une surface de révolution telle que f est croissante. Soit γ une courbe fermée simple à courbure géodésique constante dans M. Alors γ est ou bien une onduloïde, ou bien une feuille. Si γ est une feuille, alors*

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\gamma) \leq \mathrm{Long}(\gamma)^2.$$

Si γ est une onduloïde,

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\gamma) \leq \mathrm{aire}(B) + \mathrm{Long}(\gamma)^2$$

où B est la plus grande boule centrée à l'origine ne rencontrant pas γ.

Preuve. Soit γ une courbe à courbure géodésique constante. Les méridiens (courbes à θ constant) et les parallèles ont une courbure géodésique constante. Par conséquent si γ est tangente en un point à un méridien (resp. un parallèle), elle a un contact non dégénéré avec lui. Autrement dit, le long de γ, les fonctions $s \mapsto \theta(s)$ et $s \mapsto r(s)$ ont des points critiques non dégénérés. De plus, aux points critiques de θ, la courbure géodésique vaut

$$\kappa_\gamma = \frac{dr}{ds}\frac{d^2\theta}{ds^2} f(r).$$

Entre deux points critiques successifs de θ (par exemple un maximum local et un minimum local), le signe de $\theta'' = \frac{d^2\theta}{ds^2}$ change donc le sens de variation de r change. Cela signifie qu'entre deux changements de sens de variation de r, il y a au plus un extremum local de θ.

Quitte à changer d'origines et de sens de parcours, on peut supposer qu'en $s = 0$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) > 0$, $r'(0) = 0$ est $r(0)$ est le maximum de r sur γ. Soit $s_1 > 0$ le premier zéro de r'. Les méridiennes $\{\theta = 0\}$ et $\{\theta = \theta(s_1)\}$ sont des axes de symétrie de la courbe γ, donc $\theta(s) = -\theta(-s)$ et $\theta(s_1+s)-\theta(s_1) = \theta(s_1)-\theta(s_1-s)$ pour tout s. De même, $r(-s) = r(s)$ et $r(s_1-s) = r(s_1+s)$.

Supposons que θ' s'annule dans l'intervalle $[0, s_1]$. Elle ne le fait qu'une fois. Par conséquent $\theta'(s_1) < 0$. Montrons que si $\theta(s_1) \neq 0$, alors γ a un point double. Si $\theta(s_1) < 0$, alors, comme $\theta'(0) > 0$, il existe $t \in]0, s_1[$ tel que $\theta(t) = 0$. Alors $r(t) = r(-t)$ et $\theta(t) = 0 = \theta(-t)$ donc γ possède un point double. Si $\theta(s_1) > 0$, alors $\theta(2s_1) = 2\theta(s_1) > \theta(s_1)$. Comme $\theta'(s_1) < 0$, il existe $t \in]0, s_1[$ tel que $\theta(s_1 + t) = \theta(s_1)$. Alors $r(s_1 + t) = r(s_1 - t)$ et $\theta(s_1 + t) = 0 = \theta(s_1 - t)$ donc γ possède à nouveau un point double.

Si $\theta(s_1) = 0$, alors γ a pour période $2s_1$ et γ est homotope à zéro dans M privée de l'origine, symétrique par rapport au méridien $\{\theta = 0\}$, c'est une feuille.

Reste le cas où θ' ne s'annule pas dans l'intervalle $[0, s_1]$. Par symétrie, elle ne s'annule jamais, et γ est une onduloïde.

Les estimations d'aires de remplissage proviennent du lemme 14, sachant que l'indice vaut 0 pour les feuilles et ± 1 pour les onduloïdes. ∎

Remarque 19 *Sous les hypothèses de la proposition 17, pour L assez grand,*

$$Fill^h_{M_F}(L) = \max\{\sum_i Fill_{M_F}(L_i)\,;\, L = \sum_i L_i\}.$$

En effet, les courants extrémaux sont des combinaisons à coefficients positifs de disques. ∎
Il résulte de cette expression que la fonction $Fill^h_{M_F}$ est suradditive.

7 Estimations a priori

Proposition 20 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞. On suppose que la dérivée F' est* strictement surlinéaire*, i.e.*

$$\lim_{L\to+\infty} F'(L)/L = +\infty.$$

Soit γ une onduloïde dans la surface M_F. On suppose γ extrémale pour le remplissage (i.e. parmi les courbes de longueur $\leq$ Long(γ), γ maximise l'aire de remplissage). Notons

$$r_1(\gamma) = \min_\gamma r \quad et \quad r_2(\gamma) = \max_\gamma r.$$

Alors le rapport

$$\frac{r_2(\gamma) - r_1(\gamma)}{f(r_1(\gamma))}$$

tend vers 0 lorsque $r_1(\gamma)$ tend vers $+\infty$.

Preuve. On raisonne par l'absurde. Soit γ_j une suite d'onduloïdes optimales pour le remplissage, telles que $r_j = r_1(\gamma_j)$ tend vers $+\infty$. On suppose que pour tout j,

$$\frac{r_2(\gamma_j) - r_j}{f(r_j)} \geq \epsilon > 0.$$

On paramètre γ_j par l'abscisse curviligne de sorte que $\gamma_j(0)$ soit sur le parallèle $\{r = r_j\}$. On considère l'anneau de révolution $A_j = \{r \geq r_j\}$. En faisant le changement de coordonnée $\rho = \dfrac{r - r_j}{f(r_j)}$, on voit que l'anneau A_j est homothétique du cylindre $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ muni de la métrique

$$g_j = d\rho^2 + e_j(\rho)\, d\theta^2$$

où $e_j(\rho) = f(r_j + \rho f(r_j))/f(r_j)$.

Montrons que les fonctions e_j convergent uniformément sur les compacts vers la constante 1. Soit $\rho > 0$. Alors

$$\begin{aligned}
\log(\frac{e_j(\rho)}{e_j(0)}) &= \log(\frac{f_j(r_j+\rho f(r_j))}{f(r_j)}) \\
&= \int_{r_j}^{r_j+\rho f(r_j)} \frac{f'(r)}{f(r)}\,dr \\
&\leq \rho f(r_j) \max_{r\geq r_j} \frac{f'(r)}{f(r)} \\
&= \rho f(r_j) \max_{r\geq r_j} \frac{1}{F'(2\pi f(r))} \\
&\leq \frac{\rho}{2\pi} \max_{r\geq r_j} \frac{2\pi f(r)}{F'(2\pi f(r))} \\
&= \frac{\rho}{2\pi} \max_{L\geq 2\pi f(r_j)} \frac{L}{F'(L)}
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 par hypothèse.

Les courbes

$$\gamma'_j : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, \quad s \mapsto \gamma_j(sf(r_j))$$

sont paramétrées par leur abscisse curviligne relative à la métrique g_j. Les applications γ'_j étant uniformément lipschitziennes, on peut supposer qu'elles convergent uniformément sur les compacts vers une courbe γ_∞. Celle-ci est localement optimale pour le remplissage dans le cylindre plat, donc elle se relève au demi-plan $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, ou bien en un arc de cercle dont l'intérieur est tourné vers les ρ négatifs, ou bien en un segment de droite. La courbe limite passe par un point du bord de l'anneau et est symétrique par rapport au méridien qui passe par ce point, donc se projette nécessairement sur un arc du parallèle $\{\rho = 0\}$.

Soit $[a_j, b_j]$ le plus grand intervalle de $\mathbf{R}$ dont l'image par γ'_j est contenue dans $[0, \epsilon] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. Considérons la courbe γ''_j obtenue en remplaçant dans γ'_j l'arc $\gamma'_j[a_j, b_j]$ par l'arc de parallèle reliant $\gamma'_j(a_j)$ à $\gamma'_j(b_j)$. Cette courbe a une aire de remplissage plus grande que γ'_j, donc doit être plus longue. En particulier,

$$b_j - a_j = \mathrm{Long}_{\,g_j}\gamma'_j[a_j, b_j]$$

est inférieur à la longueur (pour la métrique g_j du parallèle $\{\rho = \epsilon\}$, qui tend vers 2π. Par conséquent, les suites a_j et b_j sont bornées, et γ'_j converge uniformément vers γ_∞ sur $[a_j, b_j]$. En particulier, γ_∞ doit couper le parallèle $\{\rho = \epsilon\}$, donc ce ne peut être un arc du parallèle $\{\rho = 0\}$, contradiction. ∎

Lemme 21 (Voir [R]). *Soit $M = (\mathbf{R}^2, dr^2 + f(r)^2\,d\theta^2)$ une surface de révolution. On note*

$$\kappa(r,\theta) = \kappa(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}$$

la courbure géodésique du parallèle passant par le point (r,θ). Soit γ une courbe dans M, paramétrée par son abscisse curviligne. On note $\phi(s)$ l'angle au point $\gamma(s)$ entre le vecteur $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et la vitesse $\gamma'(s)$. Alors la courbure géodésique de γ est donnée par la formule

$$\kappa_\gamma = \frac{d\phi}{ds} + \kappa(\gamma(s))\cos(\phi(s)).$$

Proposition 22 *Soit M une surface de révolution. Soit γ une onduloïde de longueur L à courbure géodésique constante. On note K le maximum de la valeur absolue de la courbure géodésique des parallèles qui coupent γ. Alors*

- *La courbure géodésique de γ est majorée en valeur absolue par K.*

- *L'angle ϕ entre γ et les parallèles est majoré par KL.*
- *La distance entre les deux parallèles extrêmes qui touchent γ est majorée par $2KL^2$.*

Si de plus $M = M_F$ où la fonction $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ satisfait $\lim_{L\to+\infty} F'(L)/L = +\infty$, et si γ est extrémale pour le remplissage, alors le produit KL tend vers 0 et le rapport $2\pi f(r_1(\gamma))/L$ tend vers 1 lorsque $r_1(\gamma) = \min_{\gamma} r$ tend vers $+\infty$.

Preuve. Notons $dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2$ la métrique. On oriente γ comme les parallèles, dans le sens des θ croissants. Soit $[r_1, r_2]$ l'intervalle de variation de la fonction r sur γ. Comme γ est d'un seul côté du parallèle $\{r = r_1\}$ (resp $\{r = r_2\}$), sa courbure géodésique au point de tangence est plus petite (resp. plus grande) que celle de ce parallèle. Comme la courbure géodésique est supposée constante, il vient
$$\kappa(r_2) \leq \kappa_\gamma \leq \kappa(r_1)$$
d'où en particulier $|\kappa_\gamma| \leq K$.

Du lemme 21, il résulte que
$$|\frac{d\phi}{ds}| \leq K + |\kappa(r(s))\cos(\phi(s))| \leq 2K.$$
Comme ϕ prend la valeur 0, on en déduit la majoration uniforme
$$|\phi(s)| \leq KL$$
pour tout $s \in [0, L]$. Soit ρ la primitive de moyenne nulle de la fonction $\sin\phi$. Elle s'annule aussi, donc elle est à son tour majorée uniformément
$$|\rho(s)| \leq KL^2$$
pour tout $s \in [0, L]$. Enfin, $\frac{dr}{ds} = \sin\phi$, donc la différence $r(s) - \rho(s)$ est constante. La variation totale $r_2 - r_1$ est donc majorée par $2KL^2$.

Il reste à montrer que le produit KL tend vers 0 quand la courbe γ part à l'infini. Montrons d'abord que $Kf(r_1(\gamma))$ tend vers 0. On a
$$\begin{aligned}
2\pi K f(r_1(\gamma)) &= 2\pi f(r_1(\gamma)) \max_{r_1(\gamma)\leq r\leq r_2(\gamma)} \frac{1}{F'(2\pi f(r))} \\
&\leq 2\pi f(r_1(\gamma)) \max_{f(r)\geq f(r_1(\gamma))} \frac{1}{F'(2\pi f(r))} \\
&= 2\pi f(r_1(\gamma)) \max_{\ell\geq 2\pi f(r_1(\gamma))} \frac{1}{F'(\ell)} \\
&\leq \max_{\ell\geq 2\pi f(r_1(\gamma))} \frac{\ell}{F'(\ell)}
\end{aligned}$$
qui tend vers 0 lorsque $r_1(\gamma)$ tend vers l'infini.

Montrons que $\max\phi$ tend vers 0. On peut supposer que la fonction ϕ atteint son maximum en $s = 0$. Comme $|\frac{d\phi}{ds}| \leq 2K$, si $0 \leq s \leq \frac{\phi(0)}{2K}$, alors
$$0 \leq \phi(0) - 2Ks \leq \phi(s) \leq \phi(0) \leq \frac{\pi}{2}$$
d'où
$$\sin(\phi(0) - 2Ks) \leq \sin\phi(s).$$
En intégrant, il vient
$$\frac{1}{2K}(\cos(\phi(0) - 2Ks) - \cos(\phi(0)) \leq r(s) - r(0).$$

En particulier, pour $s = \frac{\phi(0)}{2K}$,

$$(1 - \cos(\phi(0)) \leq 2Kf(r_1(\gamma))\frac{r_2(\gamma) - r_1(\gamma)}{f(r_1(\gamma))}$$

tend vers 0, d'après la proposition 20. On sait déjà (voir la preuve de la proposition 20) que sur l'anneau contenant γ la métrique de révolution est à distance bornée de la métrique produit $dr^2 + f(r_1(\gamma))^2\, d\theta^2$. Si l'angle ϕ est partout petit, la projection de γ sur le parallèle $\{r = r_1(\gamma)\}$ est presque isométrique, donc le rapport $2\pi f(r_1(\gamma))/L$ tend vers 1. En particulier, KL tend vers 0. ∎

8 Unicité des courbes à courbure moyenne constante

8.1 Isolement quantitatif des parallèles

Proposition 23 *Soit $M = (\mathbf{R}^2, dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2)$ une surface de révolution. On note G la courbure de Gauss et κ la courbure géodésique des parallèles. Soit γ une onduloïde à courbure géodésique constante dans M, de longueur L. Soit A l'anneau de révolution contenant γ. On suppose que*

$$\max_A(-G - \kappa^2) + 8\pi^2(\max_A \kappa)^2 < \frac{4\pi^2}{L^2}.$$

Alors γ est un parallèle.

Preuve. On garde les notations du lemme 21. On note r_0 la valeur moyenne sur l'intervalle $[0, L]$ de la fonction $s \mapsto r(s)$, et

$$\rho(s) = r(s) - r_0.$$

Alors ρ est de moyenne nulle et $\frac{d\rho}{ds} = \sin(\phi(s))$. Par hypothèse, la courbure géodésique $s \mapsto \frac{d\phi}{ds} + \kappa(\gamma(s))\cos(\phi(s))$ est constante, donc son produit avec ρ a une intégrale nulle. Après intégration par parties, cela s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^L \kappa(r(s))\cos(\phi(s))\rho(s)\, ds &= -\int_0^L \frac{d\phi(s)}{ds}\rho(s)\, ds && (1) \\ &= \int_0^L \phi(s)\sin(\phi(s))\, ds. && (2) \end{aligned}$$

Ecrivons, pour r voisin de r_0,

$$\kappa(r) = \kappa(r_0) + (r - r_0)h(r - r_0)$$

où

$$h(t) = \int_0^1 \frac{d\kappa}{dr}(r_0 + tu)\, du.$$

Comme $\kappa(r_0)\rho$ est de moyenne nulle, le terme dominant dans le premier membre de l'égalité (1) est

$$\int_0^L h(\rho(s))\rho(s)^2\, ds.$$

Le terme dominant dans le second membre de l'égalité (2) est

$$\int_0^L \sin\phi(s)^2\, ds = \int_0^L \frac{d\rho}{ds}(s)^2\, ds.$$

On regroupe ces deux termes. L'égalité (2) devient

$$\int_0^L (\frac{d\rho}{ds}(s)^2 - h(\rho(s))\rho(s)^2)\, ds \quad = \quad \int_0^L (\sin\phi(s)(\sin\phi(s) - \phi(s)) + (\cos(\phi(s)) - 1)\kappa(r(s))\rho(s))\, ds.$$

Notons k un majorant de la fonction $\frac{dk}{dr}$ sur l'anneau A. Alors k majore aussi la fonction h. La plus petite valeur propre non nulle du Laplacien sur un cercle de longueur L vaut $\frac{4\pi^2}{L^2}$. Par conséquent, pour toute fonction ρ de moyenne nulle,

$$\int_0^L (\frac{d\rho}{ds}(s)^2 - \frac{4\pi^2}{L^2}\rho(s)^2)\,ds \geq 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned}\int_0^L (\frac{d\rho}{ds}(s)^2 - h(\rho(s))\rho(s)^2)\,ds &\geq (1-\frac{L^2k}{4\pi^2})\int_0^L (\frac{d\rho}{ds})^2\,ds \\ &= (1-\frac{L^2k}{4\pi^2})\int_0^L \sin\phi(s)^2\,ds.\end{aligned}$$

D'autre part, comme γ est une onduloïde, $|\phi| \leq \frac{\pi}{2}$ et on peut utiliser les majorations

$$1-\cos(\phi)^2 \leq \sin(\phi)^2, \quad \phi - \sin(\phi) \leq |\sin\phi|^3.$$

Notons K un majorant de la fonction κ sur l'anneau A. Avec le lemme 22, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^L (\sin\phi(s)(\sin\phi(s)-\phi(s)) &+ (\cos(\phi(s))-1)\kappa(r(s))\rho(s))\,ds \\ &\leq \int_0^L \sin\phi(s)^2(\sin\phi(s)^2 + K|\rho(s)|)\,ds \\ &\leq 2K^2L^2\int_0^L \sin\phi(s)^2\,ds.\end{aligned}$$

L'équation (3) entraîne donc l'inégalité

$$(1-\frac{L^2k}{4\pi^2})\int_0^L \sin\phi(s)^2\,ds \leq 2K^2L^2\int_0^L \sin\phi(s)^2\,ds.$$

Si $(1-\frac{L^2k}{4\pi^2}) > 2K^2L^2$, ceci n'est possible que si $\sin\phi$ est identiquement nulle, i.e. si γ est un parallèle.

L'expression de la dérivée

$$\frac{d\kappa}{dr} = \frac{f''f - f'^2}{f^2} = -G - \kappa^2.$$

montre que l'inégalité $(1-\frac{L^2k}{4\pi^2}) > 2K^2L^2$ résulte de l'hypothèse sur la courbure de Gauss. ∎

Corollaire 24 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞. On fait les hypothèses suivantes.*

1. *La dérivée $F'(L)$ est* surlinéaire,

$$\lim_{L\to+\infty} F'(L)/L = +\infty.$$

2.
$$\mathrm{limsup}_{L\to+\infty}\frac{L^3F''(L)}{F'(L)^3} < 4\pi^2.$$

Alors il existe $\rho > 0$ tel que toute onduloïde dans la surface M_F extrémale pour le remplissage, est ou bien un parallèle, ou bien contenue dans la boule de rayon ρ.

Preuve. Par hypothèse, il existe L_0 et $\epsilon > 0$ tel que pour $L > L_0$,

$$\frac{L^3F''(L)}{F'(L)^3} < (1+\epsilon)^{-2}4\pi^2 - 8\pi^2\epsilon.$$

Comme $F'(L)/L$ tend vers l'infini, $F(L)/L^2$ tend aussi vers l'infini, donc on peut supposer que

$$L > L_0 \Rightarrow F(L) > 2\,L^2.$$

Soit γ une onduloïde extrémale dans M_F. Notons L sa longueur, $A = \{r_1 \le r \le r_2\}$ l'anneau de révolution qui la contient, $K = \max_{\gamma} \kappa$ le maximum de la courbure géodésique des parallèles dans A. D'après la proposition 22, il existe ρ_1 tel que

$$r_1 > \rho_1 \Rightarrow (KL)^2 < \epsilon, \quad L < (1+\epsilon)2\pi f(r_1) \quad \text{et} \quad 2\pi f(r_1) > L_0.$$

D'après la proposition 2, la courbure de Gauss vaut

$$G(r) = \frac{2\pi f(r)F''(2\pi f(r)) - F'(2\pi f(r))}{F'(2\pi f(r))^3}$$

d'où

$$-G(r) - \kappa(r)^2 = -\frac{2\pi f(r)F''(2\pi f(r))}{F'(2\pi f(r))^3}$$

donc

$$L^2(\max_A -G - \kappa^2 + 8\pi^2(\max_A \kappa)^2) \le L^2 \max_{\ell \ge 2\pi f(r_1)} \frac{\ell F''(\ell)}{F'(\ell)^3} + 8\pi^2(KL)^2.$$

Si $r_1 > \rho_1$,

$$\max_{\ell \ge 2\pi f(r_1)} \frac{\ell^3 F''(\ell)}{F'(\ell)^3} < (1+\epsilon)^{-2}4\pi^2 - 8\pi^2\epsilon$$

donc

$$L^2(\max_A -G - \kappa^2 + (8\pi^2 \max_A \kappa)^2) < 4\pi^2.$$

D'après la proposition 23, γ est un parallèle.

Autrement dit, si γ n'est pas un parallèle, alors $r_1(\gamma) \le \rho_1$. Le lemme 18 donne

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\gamma) \le F(2\pi f(\rho_1)) + L^2.$$

Comme γ doit être plus performante sur le plan du remplissage que le parallèle de longueur L, nécessairement

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\gamma) \ge F(L) > 2\,L^2.$$

Cela entraîne que

$$L^2 < F(2\pi f(\rho_1))$$

et donc que γ est contenue dans la boule de rayon $\rho = \rho_1 + \sqrt{F(2\pi f(\rho_1))}$. ∎

8.2 Preuve du théorème 2

Soit F une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème 2. Quitte à modifier F sur un intervalle borné, on peut supposer que $F' > 0$ partout et $F(L) = L^2/4\pi$ pour L assez petit. On peut donc construire la surface de révolution M_F. D'après la proposition 17, il existe L_0 tel que pour tout $L > L_0$, il existe dans la surface M_F un cycle σ de longueur $\le L$ et d'aire de remplissage égale à $Fill^h_{M_F}(L)$. Ce cycle est une réunion disjointe d'onduloïdes et de feuilles à courbure géodésique constante. Chacune des composantes est extrémale pour le remplissage.

Soit $\lambda > 0$ la constante figurant dans l'hypothèse de suradditivité. D'après le corollaire 24, il existe ρ tel que la boule de rayon ρ contienne toutes les composantes du cycle extrémal σ qui sont des onduloïdes mais pas des parallèles. On peut supposer que la longueur du bord de la boule de rayon ρ est supérieure à λ. On décompose $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ où σ_1 est la somme des parallèles non contenus dans la boule de rayon ρ, σ_2 la somme des autres onduloïdes et σ_3 la somme des feuilles. Remarquer que chacun des σ_i est extrémal. On note $L_i = \mathbf{M}(\sigma_i)$. Comme σ_2 est contenu dans la boule de rayon ρ, le lemme 14 donne

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma_2) \leq \rho L_2.$$

Or, par extrémalité,

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma_2) \geq F(L_2).$$

Comme $F(L)/L$ tend vers l'infini, cela entraîne que L_2 est borné. D'après le lemme 18, $\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma_3)$ est majoré par la somme de carrés des longueurs des feuilles, donc par le carré de la somme. Par extrémalité

$$F(L_3) \leq \mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma_3) \leq L_3^2.$$

Comme $F(L)/L^2$ tend vers l'infini, cela entraîne à nouveau que L_3 est borné.

Si ℓ_j sont les longueurs des parallèles composant σ_1,

$$\mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma_1) \leq \sum F(\ell_j) \leq F(L_1)$$

car F est suradditive et $\ell_j \geq \lambda$ pour tout j. Par extrémalité de σ, il vient

$$F(L_1 + L_2 + L_3) \leq \mathrm{Aire}^{\mathrm{h}}(\sigma) \leq F(L_1) + \rho L_2 + L_3^2.$$

Si $L_2 + L_3 \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{F(L_1 + L_2 + L_3) - F(L_1)}{L_2 + L_3} \leq \frac{L_2 + L_3^2}{L_2 + L_3}.$$

Or le premier membre, minoré par la dérivée F', tend vers l'infini avec L_1, d'où une contradiction si L est grand. On conclut que si L est assez grand, le cycle extrémal n'est composé que de parallèles de longueur $> \lambda$. Par suradditivité, un seul parallèle suffit, d'où

$$Fill^h_{M_F}(L) = F(L).$$

Autrement dit, parmi tous les cycles de longueur $\leq L$, celui dont l'aire de remplissage est la plus grande est le parallèle de longueur L, et le courant qu'il borde est un disque. En particulier, parmi toutes les courbes de longueur $\leq L$, celle qui borde un disque d'aire maximale est le parallèle de longueur L, et le disque minimal qu'il borde est d'aire $F(L)$. On conclut que

$$Fill_{M_F}(L) = F(L). \blacksquare$$

Remarque 25 *Il résulte de la preuve que changer M_F sur une partie compacte ne change pas les cycles extrémaux de longueur assez grande, donc ne change $Fill^h$ que par une constante additive.*

9 Cornets de glace

Dans ce paragraphe, on donne deux interprétations géométriques de l'inéquation différentielle du second ordre (*).

9.1 Preuve de la proposition 1

On emprunte à [LS] l'expression de la variation seconde de l'aire et de la longueur.

Lemme 26 *Soit M une variété riemannienne, c un courant dont le bord est une hypersurface lisse. Soit c_t le courant dont le bord est obtenu en poussant ∂c le long de sa normale d'une distance égale à $t\phi + \frac{t^2}{2}\psi$, où ϕ et ψ sont des fonctions sur ∂c. Alors*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{M}(c_t)}{dt} \,|_{t=0} &= \int_{\partial c} \phi \\
\frac{\partial \mathbf{M}(\partial c_t)}{dt} \,|_{t=0} &= \int_{\partial c} H\phi \\
\frac{\partial^2 \mathbf{M}(c_t)}{dt^2} \,|_{t=0} &= \int_{\partial c} H\phi^2 + \psi \\
\frac{\partial^2 \mathbf{M}(\partial c_t)}{dt^2} \,|_{t=0} &= \int_{\partial c} |\nabla \phi|^2 + (H^2 - |B|^2 - Ricci)\phi^2 + H\psi,
\end{aligned}$$

où H désigne la courbure moyenne de ∂c, B sa seconde forme fondamentale, $Ricci$ la valeur de la courbure de Ricci de M sur le champ de vecteur unitaire normal.

Preuve. Voir [LS]. ∎

On voit qu'un courant c est un point critique de la masse parmi les courants de même masse du bord si et seulement si la courbure moyenne H est constante. Dans ce cas, pour toute famille à un paramètre c_t (et pas seulement pour celle utilisée dans le lemme 26),

$$\frac{d^2}{dt^2}(H\mathbf{M}(c_t) - \mathbf{M}(\partial c_t)) \,|_{t=0} = \int_{\partial c} -|\nabla \phi|^2 + (|B|^2 + Ricci)\phi^2$$

La stabilité sous contrainte, i.e. le fait que la variation seconde de la masse parmi les variations à masse du bord constante est négative ou nulle, se traduit comme suit : pour tout fonction ϕ d'intégrale nulle sur ∂c,

$$\int_{\partial c} -|\nabla \phi|^2 + (|B|^2 + Ricci)\phi^2 \leq 0.$$

Dans le cas d'un parallèle d'une surface de révolution, cela s'écrit

$$\int_{\partial c} -|\frac{d\phi}{d\theta}|^2 + (\kappa^2 + G)\phi^2 \leq 0$$

pour toute fonction ϕ périodique de période $2\pi f(r)$ et de moyenne nulle. Comme la courbure géodésique κ et la courbure de Gauss G sont indépendantes de θ, on peut intégrer par parties,

$$\langle 1, \phi \rangle = 0 \Rightarrow \langle (\Delta + (\kappa^2 + G))\phi, \phi \rangle \geq 0.$$

Sachant que la première valeur propre non nulle du Laplacien sur un cercle de longueur $2\pi f(r)$ vaut $f(r)^{-2}$, cette assertion est équivalente à l'inégalité

$$\kappa^2 + G \geq -f(r)^{-2}.$$

Dans le cas de la surface M_F, cette inégalité s'écrit

$$\frac{L^3 F''(L)}{F'(L)^3} \leq 4\pi^2$$

pour $L = 2\pi f(r)$. Ceci achève la preuve de la proposition 1. ∎

9.2 Surfaces plongées dans $\mathbf{R}^3$

Soit $M \subset \mathbf{R}^3$ une surface invariante par les rotations R_θ autour d'une droite D. Soit $r \mapsto m(r)$ un méridien paramétré par son abscisse curviligne. Alors

$$(r, \theta) \mapsto R_\theta(m(r))$$

est une paramétrisation de M, et (r, θ) sont les coordonnées polaires sur M. Notons $f(r)$ la distance du point $m(r)$ à la droite D. Alors la métrique induite est

$$dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2.$$

En coordonnées cartésiennes dans un plan contenant D, le méridien s'écrit $r \mapsto (z(r), f(r))$, donc

$$z'(r)^2 + f'(r)^2 = 1,$$

ce qui entraîne que $|f'(r)| \leq 1$ pour tout r. Inversement, si $|f'| \leq 1$, on reconstruit z en intégrant $r \mapsto \sqrt{1 - f'(r)^2}$, et on obtient un plongement isométrique de classe C^1 au moins de la métrique $dr^2 + f(r)^2\, d\theta^2$.

Lemme 27 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction telle que*

$$\lim_{L \to +\infty} F(L)/L = +\infty.$$

Si F satisfait l'inéquation (*), alors M_F se plonge isométriquement dans l'espace euclidien.

Preuve. Etant donné une fonction F, la condition de plongeabilité de la surface M_F est

$$F'(L) \geq \frac{L}{2\pi}.$$

En effet, si $L = 2\pi f(r)$, la proposition 2 donne $f'(r) = \dfrac{f(r)}{F'(2\pi f(r))} = \dfrac{L}{2\pi F(L)}$.

Posons

$$g(L) = F'(L)^{-2} - 4\pi^2 L^{-2}.$$

Alors

$$g'(L) = -2(F''(L)F'(L)^{-3} - 4\pi^2 L^{-3}) \geq 0$$

si F satisfait l'inéquation (*). La fonction g est donc croissante. Si $F(L)/L$ tend vers l'infini, alors la dérivée F' prend des valeurs arbitrairement grandes, donc g prend des valeurs arbitrairement petites. Par conséquent, $g \leq 0$, $F'(L) \geq L/2\pi$ et M_F se plonge isométriquement dans l'espace euclidien. ∎

9.3 Caractérisation des sphères centrées sur D

On résoud l'équation différentielle

$$\frac{L^3 F''(L)}{F'(L)^3} = 4\pi^2, \tag{$**$}$$

cas d'égalité de l'inéquation (*).

Si une surface de révolution M contient un anneau $A = \{r_1 \leq r \leq r_2\}$ isométrique à une portion de sphère ronde ou de plan, alors les champs de Killing de la sphère ou du plan donnent le long de chaque parallèle contenu dans A des directions le long desquelles la variation seconde de l'aire à longueur constante est nulle, donc l'identité $G + \kappa^2 = f^{-2}$ est satisfaite pour $r_1 \leq r \leq r_2$. Si $M = M_F$, alors nécessairement $\dfrac{L^3 F''(L)}{F'(L)^3} = 4\pi^2$ pour $2\pi f(r_1) \leq L \leq 2\pi f(r_2)$.

Réciproquement, sachant que si $L = 2\pi f(r)$,

$$\frac{LF''(L)}{F'(L)^3} = G + \kappa^2 = -\frac{f''}{f} + (\frac{f'}{f})^2,$$

l'équation (**) sur l'intervalle $[L_1, L_2]$ équivaut à

$$-f''f + f'^2 = 1 \quad \text{sur un intervalle} \quad [r_1, r_2].$$

Soient $\omega \neq 0$, ϕ des constantes. On constate que les fonctions

$$r \mapsto \omega^{-1}\sin(\omega r + \phi) \quad \text{et} \quad r \mapsto r + \phi$$

sont des solutions. Ce sont toutes les solutions f telles que $|f'| \leq 1$. En effet, étant donnés r_0, $y_0 \in \mathbf{R}$ et y_1 tel que $|y_1| \leq 1$, il existe dans cette famille une fonction f telle que $f(r_0) = y_0$ et $f'(r_0) = y_1$. Les fonctions z solutions de $z'^2 + f'^2 = 1$ s'écrivent alors

$$r \mapsto z_0 - \omega^{-1}\cos(\omega r + \phi) \quad \text{ou} \quad r \mapsto z_0,$$

les méridiens correspondants sont des segments de droites orthogonales à D ou des arcs de cercles centrés sur D. On conclut que M_F contient une portion de plan orthogonal à la droite D ou de sphère centrée sur D.

9.4 Interprétation de l'inéquation (*)

Proposition 28 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction de classe C^∞. On fait les hypothèses suivantes.*

- *$F(0) = 0$, $F''(0) = 1/2\pi$ et F se prolonge en une fonction paire, de classe C^∞, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.*
- *Pour tout $L \geq 0$, $F'(L) \geq L/2\pi$.*
- *Pour tout $L \geq 0$,*

$$\frac{L^3F''(L)}{F'(L)^3} \leq 4\pi^2. \tag{$*$}$$

Alors M_F est isométrique au bord de la réunion d'une famille de boules centrées sur une droite D.

Inversement, soit $M \subset \mathbf{R}^3$ une surface de révolution d'axe D. On suppose que

1. *M est de classe C^∞,*
2. *la projection de M sur un plan orthogonal à D est injective,*
3. *la projection d'un méridien sur D est une bijection sur une demi-droite.*

   Alors M (privée d'un voisinage de l'origine) est isométrique à une surface M_F et pour tout $L > 0$, $F'(L) \geq L/2\pi$.

   Si de plus

4. *M est le bord de la réunion d'une famille de boules centrées sur D,*

alors pour tout $L > 0$, $\frac{L^3F''(L)}{F'(L)^3} \leq 4\pi^2$.

Définition 29 *Une surface de révolution qui satisfait les conditions 2, 3 et 4 s'appelle un* cornet de glace.

Preuve. D'après la proposition 2 et le lemme 27, les deux premières conditions permettent de construire la surface M_F et de la plonger dans l'espace euclidien.

Il reste à montrer que dans un plan contenant D, le méridien de M_F borde une réunion de disques centrés sur D. Soit $r \mapsto ((z(r), f(r)),\ f \geq 0$, une paramétrisation du méridien par son abscisse curviligne. Comme $z'(r)^2 + f'(r)^2 = 1$ pour tout r, $z'z'' + f'f'' = 0$, si bien que la courbure au point $(z(r), f(r))$ peut s'écrire

$$z'f'' - f'z'' = \frac{f''}{z'}.$$

Pour chaque r, notons c_r le cercle tangent au méridien au point $(z(r), f(r))$ et centré sur D, i.e. le cercle de centre $(\frac{zz' + ff'}{z'}(r), 0)$ et de rayon $\frac{f}{z'}(r)$. Soit $s \mapsto (\zeta(s), \phi(s))$ la paramétrisation de ce cercle par son abscisse curviligne, telle que $(\zeta(r), \phi(r)) = (z(r), f(r))$ et $(\zeta'(r), \phi'(r)) = (z'(r), f'(r))$. D'après le paragraphe 9.3

$$-\phi''\phi + \phi'^2 \equiv 1.$$

L'inéquation (*) qui s'écrit

$$-f''f + f'^2 \leq 1$$

entraîne que $f''(r) \geq \phi''(r)$. Cela signifie qu'au point de contact, la courbure du méridien est supérieure à celle (négative) du cercle c_r. En particulier, le méridien reste à l'extérieur du disque d_r bordé par c_r.

Notons B la réunion des disques d_r et R la région bordée par la réunion du méridien et de son symétrique par rapport à D. On vient de montrer que $B \subset R$. Inversement, soit p un point de R dont la deuxième coordonnée est positive ou nulle, soit δ la distance de p au bord de R. Alors le cercle $\tilde{c}_p$ de centre p et de rayon δ est tangent au bord de R en un point q. Nécessairement, la deuxième coordonnée de q est positive ou nulle, donc $q = (z(r), f(r))$ est sur le méridien. Alors le cercle $\tilde{c}_p$ est contenu dans le disque d_r, donc $p \in B$. On a donc montré que $B = R$, donc la surface M_F borde une réunion de boules centrées sur D.

Inversement, soit B une réunion de boules centrées sur D, dont le bord M est lisse et se projette difféomorphiquement sur un plan orthogonal à D. Alors le méridien paramétré par son abscisse curviligne s'écrit $r \mapsto ((z(r), f(r))$ où f varie de 0 à $+\infty$ et $f' > 0$. Le bord est donc isométrique à la surface M_F où F, définie par l'équation

$$2\pi \int_0^r f(t)\,dt = F(2\pi f(r)),$$

est de classe C^∞. On a vu au lemme 27 que l'inégalité $F'(L) \geq L/2\pi$ est automatiquement satisfaite.

Soit $t \mapsto n(t) = (z(r), f(r)) + t(f'(r), -z'(r))$ la normale au point $(z(r), f(r))$ au méridien. Pour tout $t > 0$ assez petit, $n(t) \in B$ donc il existe un disque β_t centré sur D contenant $n(t)$ mais ne rencontrant pas le méridien. Lorsque t tend vers 0, la tangente au bord du disque près de $n(t)$ doit converger vers la tangente au méridien en $n(0)$, donc β_t converge vers le disque d_r. On conclut que pour tout r, le disque d_r est d'un seul côté du méridien, ce qui se traduit par l'inéquation

$$-f''f + f'^2 \leq 1. \blacksquare$$

Remarque. Il est facile de construire des cornets de glace dont la courbure change de signe une infinité de fois. En effet, soit β_i une suite de boules centrées sur D, telle que β_{i+1} contienne au moins la moitié de β_i, mais ne rencontre pas $\beta_{i-1} \setminus \beta_i$. Soit M le bord de la réunion des β_i. La partie lisse de M est à courbure positive. Pour lisser M, on insère d'abord des congés `(filets)`, par exemple des portions de tores de révolution, à courbure négative. La surface obtenue contient des morceaux de courbure alternativement positive (tendant vers zéro) et négative (de valeur absolue arbitrairement grande), voir figure 1. Ensuite, on approche la fonction f, qui est seulement C^1, par une fonction lisse.

Figure 1

9.5 Cornet de glace associé à une surface de révolution

Définition 30 *Soit M une surface de révolution plongée dans l'espace euclidien, d'axe de révolution D. On suppose que M coupe D en un seul point P et est contenue dans le demi-espace bordé par le plan orthogonal à D passant par P. On note D_+ la demi-droite issue de P située du même côté que M. Soit B la réunion des boules centrées sur D_+ et ne rencontrant pas M. Le bord de B s'appelle* le cornet de glace associé à M.

Lemme 31 *Soit $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction lisse. Pour n entier, $n \geq 2$, on note*

$$u_n = \inf_{L \geq n} \frac{2\pi F'(L)}{L}$$

et

$$v_n = \frac{(1 - u_{[n/2]}^{-2})}{\pi u_n (1 - u_n^{-2})(1 - 2u_{[n/2]}^{-2})}.$$

On suppose que la série $\sum n/u_n$ est convergente. Soit $\tilde{M}$ le cornet de glace associé à la surface M_F. Alors $\tilde{M}$ est la surface de révolution associée à une fonction $\tilde{F}$ telle que la différence $F - \tilde{F}$ admette une limite finie ℓ. De plus, la vitesse de convergence est contrôlée par la suite v_n : pour tout $L > 2$,

$$|\ell - F(L) + \tilde{F}(L))| \leq \sum_{n=[(L-3)/4]}^{+\infty} 16n\, v_n.$$

Preuve. On décrit d'abord comment obtenir la surface $\tilde{M}$ à partir de M_F. Si $r \mapsto m(r) = (z(r), f(r))$ est une paramétrisation d'un méridien m de M_F par son abscisse curviligne, notons

$$E = \{r \geq 0\,;\, (z(r), f(r)) \in \tilde{M}\}.$$

On va montrer que $\tilde{M}$ s'obtient à partir de M_F en remplaçant une famille dénombrable d'anneaux (correspondant aux intervalles de $\mathbf{R}_+ \setminus E$) par des anneaux prélevés sur des sphères centrées sur D et tangentes à M_F le long d'au moins deux parallèles.

Etant donné un point $(z, 0) \in D$, notons $\delta(z)$ la distance de $(z, 0)$ au méridien m. Par définition, les points de contact du cercle c_z de centre $(z, 0)$ et de m sont dans $\tilde{M}$. Notons

$$E_z = \{r \geq 0\,;\, (z(r), f(r)) \in c_z\}.$$

Montrons que E est contenu dans la réunion des E_z lorsque z décrit $\mathbf{R}_+$. Si $r \in E$, alors $m(r)$ est limite d'une suite de points p_i telle que chaque p_i est contenu dans un disque $\tilde{d}_i$ centré sur D et disjoint de m. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que $\tilde{d_i}$ converge vers un disque $\tilde{d}$ centré en un point $(z,0)$ de D. Comme $m(r)$ est dans l'adhérence de $\tilde{d}$, nécessairement $\tilde{d}$ est le plus grand disque de centre $(z,0)$ disjoint de m, donc $\tilde{d} = d_z$, et $r \in E_z$.

Montrons que si $z_1 < z_2$, alors $E_{z_1} < E_{z_2}$. En effet, notons d_z le disque ouvert bordé par c_z. Alors le méridien m ne rentre pas dans $d_{z_1} \cup d_{z_2}$. Notons z_3 l'abscisse commune des deux points d'intersection de c_{z_1} et c_{z_2}. Si $r_1 \in E_{z_1}$ et $r_2 \in E_{z_2}$, alors

$$m(r_1) \in c_{z_1} \setminus d_{z_2} \quad \text{et} \quad m(r_2) \in c_{z_2} \setminus d_{z_1}$$

donc

$$z(r_1) \leq z_3 \leq z(r_2).$$

Comme la fonction $r \mapsto z(r)$ est croissante, on en déduit que $r_1 \leq r_2$. Si $r_1 = r_2$, alors la courbe m passe par le point d'intersection de deux cercles distincts tout en restant à l'extérieur des deux disques. Cela entraîne que son vecteur vitesse est nul, contradiction. On conclut que $r_1 < r_2$.

Montrons que chaque intervalle de $\mathbf{R}_+ \setminus E$ est borné. Comme $F'(L)/L$ tend vers l'infini, f' tend vers zéro. Par conséquent, lorsque z est grand, la distance $\delta(z)$ du point $(z,0)$ au méridien est petite devant z. Par conséquent, l'ensemble E_z est situé à distance de l'ordre de z l'origine. En particulier, E est non borné, et son complémentaire ne contient aucun intervalle non borné.

Soit $]r_1, r_2[$ une composante connexe de $\mathbf{R}_+ \setminus E$. Montrons que r_1 et r_2 sont dans le même E_z. Par définition, r_1 et r_2 sont dans E donc il existe z_1 et z_2 tels que $]r_1 \in E_{z_1}$ et $r_2 \in E_{z_2}$. Si $z_1 < z_2$, on choisit $z_3 \in]z_1, z_2[$. Alors $E_{z_3} \subset]r_1, r_2[$, contradiction. On conclut que $z_1 = z_2$. Géométriquement, cela signifie que si on retire à M_F l'anneau correspondant à $r_1 < r < r_2$, on peut le remplacer par un anneau prélevé sur une sphère centrée sur D et tangentes à M_F le long des deux parallèles $\{r = r_1\}$ et $\{r = r_2\}$. En faisant cela pour chacun des intervalles de $\mathbf{R}_+ \setminus E$, on obtient $\tilde{M}$.

On passe maintenant à des estimations d'aires.

Notons a l'un des anneaux constituant $M_F \setminus \tilde{M}$ et $\tilde{a}$ l'anneau correspondant de $\tilde{M} \setminus M_F$. Notons L_1 et L_2 les longueurs des composantes du bords de a. Notons δ le rayon de la sphère S qui porte $\tilde{a}$ et ψ la latitude du bord le plus court de a, de sorte que $L_1 = 2\pi\delta\cos\psi$. Enfin, notons ρ la distance maximum d'un point de a au centre de S (voir figure 2).

Figure 2

Comme la fonction f est croissante, a et $\tilde{a}$ ont même projection sur un plan orthogonal à la droite D. Le théorème de Thalès donne

$$\frac{\rho}{\delta} \leq \frac{L_2}{L_1}.$$

L'aire de $\tilde{a}$ est majorée par $2\pi\delta^2\sin\psi$. Il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{aire}\,(a) - \mathrm{aire}\,(\tilde{a}) &= \mathrm{aire}\,(\tilde{a})(\frac{\mathrm{aire}\,(a)}{\mathrm{aire}\,(\tilde{a})} - 1) \\
&\leq 2\pi\delta^2\sin\psi((\frac{\rho}{\delta})^2 - 1) \\
&\leq 2\pi\delta^2\sin\psi((\frac{L_2}{L_1})^2 - 1) \\
&= (L_2^2 - L_1^2)\frac{\sin\psi}{2\pi\cos^2\psi} \\
&\leq (L_2 - L_1)L_2\frac{\sin\psi}{\pi\cos^2\psi}
\end{aligned}$$

Comme $\tan\psi$ est la pente du méridien au bord inférieur $\{r = r_1\}$ de a,

$$\sin\psi = f'(r_1) = \frac{L_1}{2\pi F'(L_1)}$$

d'où

$$0 \leq \mathrm{aire}\,(a) - \mathrm{aire}\,(\tilde{a}) \leq (L_2 - L_1)\frac{L_2}{\pi}\frac{L_1}{2\pi F'(L_1)}\frac{1}{1 - (\frac{L_1}{2\pi F'(L_1)})^2}.$$

Comme

$$\frac{L_2}{L_1} \leq \frac{1}{\cos\psi} \leq \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{L_1}{2\pi F'(L_1)})^2}} \leq (1 - u_{[L_1]}^{-2})^{-1/2},$$

on peut choisir une suite ℓ_j telle que pour tout j,

1. le parallèle de longueur ℓ_j de M_F est aussi dans $\tilde{M}$.

2. $2(1 - u_{[\ell_j]}^{-2})^{1/2} \leq \dfrac{[\ell_{j+1}]}{[\ell_j]} \leq 2$;

Ici $[\ell_j]$ désigne la partie entière de ℓ_j. Posons

$$A_j = F(\ell_{j+1}) - F(\ell_j) - (\tilde{F}(\ell_{j+1}) - \tilde{F}(\ell_j))$$

et montrons que la série $\sum_j A_j$ est convergente. A_j est la somme des termes $\mathrm{aire}\,(a) - \mathrm{aire}\,(\tilde{a})$ correspondant aux anneaux dont les composantes du bord ont des longueurs comprises entre ℓ_j et ℓ_{j+1}. Pour chacun de ces anneaux, on peut majorer L_2 par ℓ_{j+1} et $\dfrac{L_1}{2\pi F'(L_1)}$ par $1/u_{[\ell_j]}$. De plus, la somme des termes $L_2 - L_1$ correspondant à ces anneaux est majorée par $\ell_{j+1} - \ell_j \leq 2[\ell_j]$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
A_j &\leq 2[\ell_j]\frac{\ell_{j+1}}{\pi}\frac{1}{u_{[\ell_i]}}\frac{1}{1 - u_{[\ell_j]}^{-2}} \\
&\leq \frac{2[\ell_j]([\ell_j] + 1)}{\pi u_{[\ell_j]}(1 - u_{[\ell_j]}^{-2})}.
\end{aligned}$$

Posons

$$v_n = \frac{(1 - u_{[n/2]}^{-2})}{\pi u_n(1 - u_n^{-2})(1 - 2u_{[n/2]}^{-2})}$$

et montrons que

$$A_j \leq \sum_{n=[\ell_{j-1}]+1}^{[\ell_j]} 8n\, v_n.$$

Notons $m = [\ell_j]$, $p = [\ell_{j-1}]$ et $m/p = \tau$, de sorte que

$$2\sqrt{1-u_p^{-2}} \leq \tau \leq 2.$$

Comme la suite u_n est croissante, v_n est décroissante donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{m} 8n\, v_n &\geq 8v_m \sum_{n=p+1}^{m} n \\ &= 4v_m(m(m+1)-p(p+1)).\end{aligned}$$

On majore

$$\begin{aligned}p(p+1) &= \frac{m(m+\tau)}{\tau^2} \\ &\leq \frac{m(m+2)}{\tau^2} \\ &\leq \frac{2m(m+1)}{\tau^2}\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}m(m+1)-p(p+1) &\leq m(m+1)(1-\frac{2}{\tau^2}) \\ &\leq m(m+1)\frac{1-2u_p^{-2}}{2(1-u_p^{-2})}.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{n=p+1}^{m} 8n\, v_n &\geq 4v_m m(m+1)\frac{1-2u_p^{-2}}{2(1-u_p^{-2})} \\ &= \frac{2m(m+1)}{\pi u_m(1-u_m^{-2})}\,\frac{(1-u_{[n/2]}^{-2})}{(1-2u_{[n/2]}^{-2})}\,\frac{1-2u_p^{-2}}{1-u_p^{-2}} \\ &\geq \frac{2m(m+1)}{\pi u_m(1-u_m^{-2})} \\ &= \frac{2[\ell_j]([\ell_j]+1)}{\pi u_{[\ell_j]}(1-u_{[\ell_j]}^{-2})} \\ &\geq A_j\end{aligned}$$

car $p \geq m/2$. Comme la série $\sum_n v_n$ est convergente, on conclut que la série $\sum_j A_j$ est convergente.

Soient $L < L'$ tels que les parallèles de longueurs L et L' de M_F soient communs avec $\tilde{M}$. Alors

$$|F(L') - \tilde{F}(L') - (F(L) - \tilde{F}(L))| \leq \sum_{j=j(L)}^{+\infty} A_j$$

où $j(L')$ est l'indice tel que $\ell_{j-1} \leq L < \ell_j$. Cet indice tend vers l'infini avec L, donc la différence tend vers 0 lorsque L tend vers l'infini.

Cette propriété s'étend au cas où l'un des parallèles de longueur L ou L' tombe dans un anneau a de $M \setminus \tilde{M}$, car l'aire de a et celle de $\tilde{a}$ tendent vers 0 quand L tend l'infini. En effet,

$$\mathrm{aire}\,(a) \leq (\frac{L_2}{L_1})^2 \mathrm{aire}\,(\tilde{a})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\cos^2\psi} 2\pi\delta^2 \sin\psi \\
&= \frac{L_1^2}{2\pi}\frac{\sin\psi}{\cos^4\psi} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{2\pi u_n(1-u_n^{-2})^2} \\
&\leq \frac{(n+1)^2(1-u_n^{-2})}{2\pi u_n(1-u_n^{-2})(1-2u_n^{-2})} \\
&\leq \frac{(n+1)^2}{2} v_n \\
&\leq n(n+1)v_n
\end{aligned}
$$

où $n = [L_1]$. Il vient, pour tous $L < L'$,

$$|F(L') - \tilde{F}(L') - (F(L) - \tilde{F}(L))| \leq \sum_{n=n(L)}^{+\infty} 4n\, v_n + 2w_{n(L)}$$

où

$$w_n = \sup_{m\geq n} m(m+1)v_m$$

et $n(L) = [\ell_{j(L)}] \geq (L-1)/2$. Cette quantité tend vers 0 lorsque L tend vers l'infini. En effet, posant $p = [m/2]$, on a

$$p(p+1) \leq \frac{m(m+2)}{4} \leq \frac{m(m+1)}{2}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{m} 4n\, v_n &\geq 2v_m(m(m+1) - p(p+1)) \\
&\geq v_m m(m+1).
\end{aligned}
$$

soit

$$w_n \leq \sum_{k=[n/2]}^{+\infty} 4k\, v_k.$$

Cela prouve que la fonction $F - \tilde{F}$ admet une limite finie ℓ. et que

$$|\ell - F(L) + \tilde{F}(L))| \leq \sum_{n=[(L-3)/4]}^{+\infty} 16n\, v_n. \blacksquare$$

10 ϵ-cornets

10.1 Définitions

Définition 32 *Soit $\epsilon \in]0,1]$. Dans le plan euclidien, on se donne une droite D et un point P de D. On appelle ϵ-*cercle *de centre P et de rayon δ la courbe, symétrique par rapport à la droite D, dont une moitié est paramétrée, en coordonnées cartésiennes d'origine P et ayant D pour premier axe, par $s \mapsto (z(s), f(s))$, où*

$$f(s) = \delta\sin(\epsilon s/\delta), \quad z(s) = \int_{\pi\delta/2\epsilon}^{s} \sqrt{1 - f'(s)^2}\, ds, \quad \textit{et} \quad s \in [0, \pi\delta/\epsilon].$$

*Le domaine bordé par un ϵ-cercle s'appelle un ϵ-*disque.

Remarque. Remarquer que lorsque δ varie, les courbes obtenues sont homothétiques l'une de l'autre.

La figure 3 représente les ϵ-cercles centrés à l'origine, de rayon 1, pour $\epsilon = 1$ (c'est un cercle), $\epsilon = 3/4$ et $\epsilon = 1/2$ respectivement.

Figure 3

Définition 33 *Soit* $a \in]0,1]$. *Dans l'espace euclidien, on se donne une droite* D *et un point* P *de* D. *On appelle* ϵ-sphère *de centre* P *et de rayon* δ *la surface engendrée par la rotation autour de la droite* D *d'un* ϵ*-cercle de rayon* δ *et de centre* P*, relatif à la droite* D.

Une surface de révolution M *d'axe* D *est appelée* ϵ-cornet *si*

- *la projection de* M *sur un plan orthogonal à* D *est injective,*
- *la projection d'un méridien sur* D *est une bijection sur une demi-droite* D_+*,*
- M *borde la réunion d'une famille de* ϵ*-sphères relatives à* D.

Remarque. Si $\epsilon = 1$, on retrouve la notion de cornet de glace.

Lemme 34 *Soit* $F : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ *une fonction lisse. Pour* n *entier, on note*

$$u_n = \inf_{L \geq n} \frac{2\pi F'(L)}{L}.$$

On suppose que la série $\sum n/u_n$ *est convergente, et que la suite* n^2/u_n *tend vers* 0. *Soit* $\epsilon \in]0,1]$. *Soit* $\tilde{M}_\epsilon$ *le* ϵ*-cornet associé à la surface* M_F : $\tilde{M}_\epsilon$ *est le bord de la réunion des* ϵ*-boules centrées sur* D_+ *ne rencontrant pas* M_F. *Alors* $\tilde{M}_\epsilon$ *est la surface de révolution associée à une fonction* $\tilde{F}_\epsilon$ *telle que* $F - \tilde{F}_\epsilon$ *admette une limite finie.*

De plus, $\tilde{F}_\epsilon$ *est de classe* C^1, $\lim_{L\to\infty} \frac{\tilde{F}'_\epsilon(L)}{L} = +\infty$ *et l'inéquation différentielle*

$$\frac{L^3 \tilde{F}''_\epsilon(L)}{\tilde{F}'_\epsilon(L)^3} \leq 4\pi^2\epsilon^2$$

est vraie au sens des distributions.

Preuve. La preuve est la même que celle du lemme 31. La seule propriété fine des cercles qui est utilisée est le fait que les projections sur D de $c_{z_1} \setminus d_{z_2}$ et $c_{z_2} \setminus d_{z_1}$ sont des intervalles disjoints. Cette propriété reste vraie pour les ϵ-cercles.

Le méridien $\tilde{m}_\epsilon$ de la surface $\tilde{M}_\epsilon$ s'obtient en retirant à celui de M_F un nombre dénombrable d'intervalles et en les remplaçant par des arcs de ϵ-cercles ayant mêmes tangentes aux extrémités. Par conséquent, la courbe $\tilde{m}_\epsilon$ est de classe C^1. Il en est donc de même de la coordonnée $\tilde{f}_\epsilon$, et donc de la fonction $\tilde{F}_\epsilon$. Comme les ϵ-disques sont convexes, sur chaque arc de ϵ-cercle contenu dans $\tilde{m}_\epsilon$, la fonction $\tilde{f}'_\epsilon$ est décroissante, donc encadrée par ses valeurs aux extrémités de l'arc. Autrement dit, la dérivée $\tilde{f}'_\epsilon$ est encadrée par f', donc tend vers 0, ce qui se traduit par le fait que $\tilde{F}'_\epsilon(L)/L$ tend vers l'infini. Enfin, f_ϵ est localement la borne supérieure d'une famille de fonctions qui satisfont l'équation différentielle

$$-ff'' + f'^2 = \epsilon^2.$$

Elle satisfait donc

$$-ff'' + f'^2 \leq \epsilon^2$$

au sens des distributions. Comme F'' dépend linéairement de f'', l'inéquation différentielle pour $\tilde{F}_\epsilon$ s'en déduit. ∎

10.2 Preuve du théorème 3

Soit F une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème 3. Soit λ la constante figurant dans l'hypothèse de suradditivité pour F. Soit $\epsilon = 1/2$ et $\epsilon' = 3/4$. Soit $M_{\tilde{F}_\epsilon}$ le ϵ-cornet associé à M_F. D'après le lemme 34, $F - \tilde{F}_\epsilon$ admet une limite finie $\ell \geq 0$. Cette limite est la somme des termes aire (a) − aire $(\tilde{a})$ pour tous les anneaux de $M_F \setminus M_{\tilde{F}_\epsilon}$. Si $\ell = 0$, alors $M_F = M_{\tilde{F}_\epsilon}$ est un ϵ-cornet, auquel le théorème 2 s'applique, et M_F convient. Sinon, il existe $\lambda' > \lambda$ tel que

$$L > \lambda' \Rightarrow |\ell - F(L) + \tilde{F}_\epsilon(L)| \leq \frac{\ell}{4},$$

i.e.

$$F(L) - \frac{5\ell}{4} \leq \tilde{F}_\epsilon(L) \leq F(L) - \frac{3\ell}{4}.$$

La fonction $\tilde{F}_\epsilon$ est de classe C^1 et satisfait l'inégalité différentielle

$$\frac{L^3 \tilde{F}''_\epsilon(L)}{\tilde{F}'_\epsilon(L)^3} \leq 4\pi^2\epsilon^2$$

au sens des distributions. Soit G une approximation lisse de $\tilde{F}_\epsilon$, suffisamment proche pour que

$$\frac{L^3 G''(L)}{G'(L)^3} \leq 4\pi^2\epsilon'^2,$$

$$\lim_{L\to\infty} \frac{G'(L)}{L} = +\infty,$$

$$\lim_{L\to\infty} \tilde{F}_\epsilon(L) - G(L) \quad \text{existe,}$$

et

$$|G(L) - \tilde{F}_\epsilon(L)| \leq \frac{\ell}{12} \quad \text{pour tout } L > \lambda'.$$

Alors pour tout $L > \lambda'$,

$$F(L) - \frac{4\ell}{3} \leq G(L) \leq F(L) - \frac{2\ell}{3}.$$

Cela entraîne que G est suradditive. En effet, pour L, $L' > \lambda'$,

$$\begin{aligned} G(L+L') &\geq F(L+L') - \frac{4\ell}{3} \\ &\geq F(L) + F(L') - \frac{4\ell}{3} \\ &\geq G(L) + G(L'). \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème 3 à la surface $M = M_G$: il existe λ'' tel que pour $L > \lambda''$, $Fill_M(L) = Fill^h_M(L) = G(L)$ et $F - G$ a une limite finie. La remarque 25 permet de modifier M sur une partie bornée, en ayant pour seul résultat de d'ajouter une constante à $Fill^h_M$ pour L grand. On ajuste alors cette constante pour que la limite de $F - Fill^h_M$ soit nulle. ∎

References

[A] F. ALMGREN, *Existence and regularity of solutions to elliptic variational problems with constraints.* Mem. Amer. Math. Soc. **4**, (1976).

[B] B. BOWDITCH, *A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one.* Michigan. J. Math. **42**, 103 – 107 (1995).

[BC] I. BENJAMINI, J. CAO, *A new isoperimetric theorem for surfaces of variable curvature.* Duke Math. J. **85**, 359 – 396 (1996).

[BH] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non positive curvature.* Grundlehren **319**, Berlin: Springer-Verlag (1999).

[BP] C. BAVARD, P. PANSU, *Sur le volume minimal de* $\mathbf{R}^2$. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. Paris **19**, 479 – 490(1986).

[F] H. FEDERER, *Geometric measure theory.* Classics in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag (1996).

[Fl] W. FLEMING, *Flat chains over a finite coefficient group.* Trans. Amer. Math. Soc. **121**, 160 – 186 (1966).

[G1] M. GROMOV, *Hyperbolic groups.* Essays in group theory, Publ. Math. Sci. Res. Inst. **8**, 75 – 263 (1987).

[G2] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups.* In "Geometric Group Theory", ed. G. Niblo and M. Roller, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[HHM] M. HOWARD, M. HUTCHINGS, F. MORGAN, *The isoperimetric problem on surfaces of revolution of decreasing Gauss curvature.* Trans. Amer. Math. Soc. **352**, 4889 – 4909 (2000).

[LS] H.B. LAWSON, J. SIMONS, *On stable currents and their applications to global problems in real and complex geometry.* Ann. of Math. **98**, 427 – 450 (1973).

[O] A. Yu. OLSHANSKII, *Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequalities* Intern. J. Algebra Comput. **1**, 281 – 289 (1991).

[Pa] P. PAPASOGLU, *On the sub-quadratic isoperimetric inequality.* Charney, Ruth (ed.) et al., Geometric group theory. Proceedings of a special research quarter at The Ohio State University, Columbus, OH, USA., spring 1992. Berlin: de Gruyter. Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **3**, 149 – 157 (1995).

[P1] P. PANSU, *Sur la régularité du profil isopérimétrique des surfaces riemanniennes compactes.* Ann. Inst. Fourier **48**, 247 – 264 (1998).

[P2] P. PANSU, *Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d'équilibre des cristaux.* ESAIM/COCV **4**, 631 – 667 (1999).

[R] M. RITORÉ, *Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces.* To appear in Comm. Anal. Geom.

[T] P. TOPPING, *Mean curvature flow and geometric inequalities.* J. Reine und Angew. Math. **503**, 47 – 61 (1998).

Renata Grimaldi
Dipartimento di Matematica ed Appl.
Facolta di Ingegneria

Vialle delle Scienze - 90128 Palermo (Italia)
grimaldi@ipamat.math.unipa.it

Pierre Pansu
Laboratoire de Mathématique d'Orsay
UMR 8628 du C.N.R.S.
Bâtiment 425
Université Paris-Sud - 91405 Orsay (France)
Pierre.Pansu@math.u-psud.fr
http://www.math.u-psud.fr/~pansu