8- A la recherche de la forme idéale
Une activité pour primaire, collège, lycée

Grégoire Allaire et François Jouve nous donnent un bref aperçu des méthodes surprenantes utilisées de nos jours pour dessiner des pièces mécaniques : les programmes d'ordinateur ajustent spontanément le nombre de trous et fabriquent le nombre de barres idéal sans qu'on le leur demande. Nous allons développer une analogie avec une situation plus simple, qui illustre l'expression mystérieuse « deviner la bonne topologie ».

Nous vous proposons d'étudier un problème où on cherche à rendre la plus petite possible la longueur d'une configuration de fils. Cette situation est utilisable en classe, dès l'école primaire pour la partie manipulations physiques. Dans toute cette activité, les triangles considérés ne seront « pas trop obtus », c'est-à-dire avec des angles strictement inférieurs à 120°. Une partie des résultats énoncés ici n'est plus vraie dans le cas contraire.

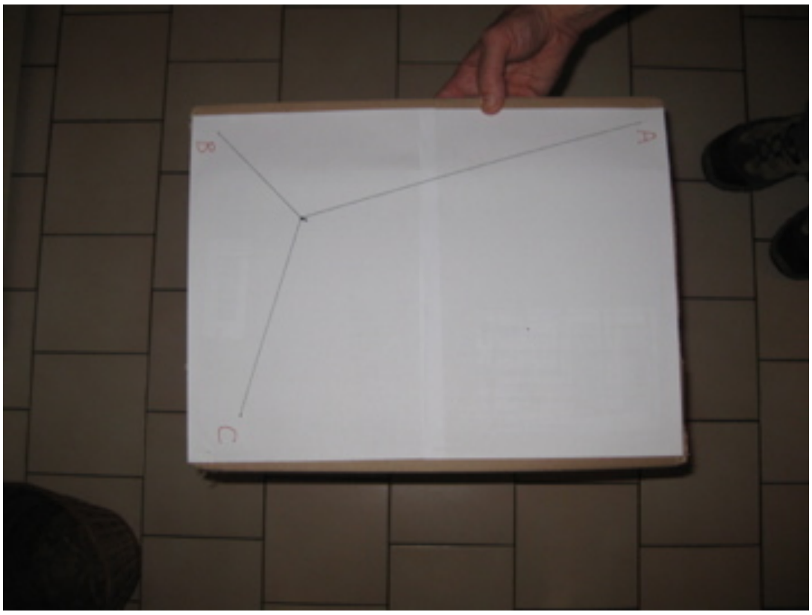
Avec trois poids, avec trois points

1. Equilibre entre 3 poids

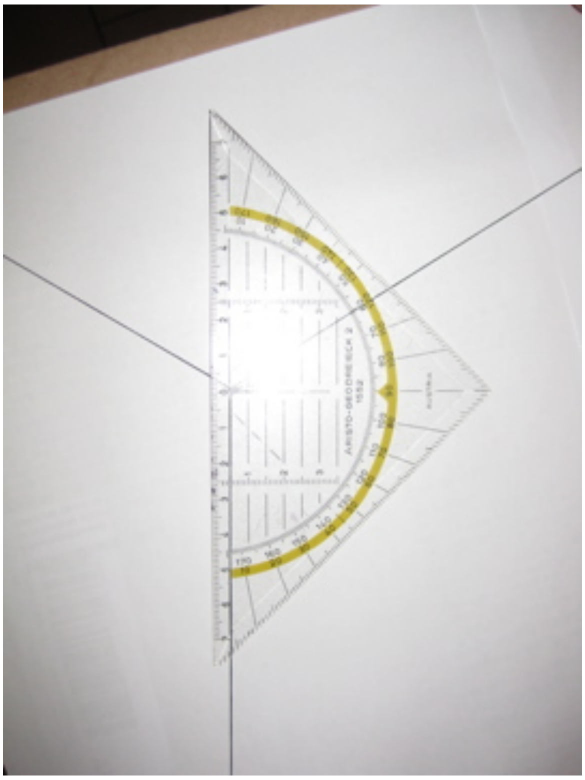
Prendre une plaque de carton assez solide, le couvercle d'une boîte à chaussures par exemple. Trois élèves, Aïcha, Bruno et Claire, percent chacun un trou, de façon à former un triangle qui ne possède aucune propriété particulière, le plus grand possible, mais pas trop obtus quand même. Prendre trois poids identiques, trois gros écrous, par exemple. Chaque élève suspend son poids à une morceau de fil résistant, et passe son fil dans un trou, de bas en haut. On noue les trois fils ensemble. Un élève soulève le carton, le secoue bien et laisse les poids et les fils trouver leur position d'équilibre. Voit on quelque chose de remarquable dans la configuration des fils au-dessus du carton ?

la manip proposée

On voit que les trois fils font des angles de 120° entre eux à leur point de jonction. Un cache (feuille avec une découpe circulaire) posé sur le carton et cachant les trous rend la symétrie de la figure au voisinage du nœud plus visible.



le carton, vu du dessus…


et la vérification au rapporteur

2. Equilibre et longueur de ficelles

La physique nous dit que la position d'équilibre des poids minimise l'énergie potentielle du système, Cet équilibre est atteint quand la somme des altitudes des trois poids est minimale. Ce qui veut dire que la longueur totale des ficelles situées sous le carton est maximale. La longueur totale de ficelle visible au-dessus du carton est alors minimale. Le problème devient donc un problème géométrique. Joindre trois points A, B et C en minimisant la longueur totale des segments qui les relient.

Voici une proposition d'activité d'exploration utilisant le logiciel Geogebra.

Trace un triangle ABC.
Construis un point M libre que tu places à l'intérieur du triangle. Trace les segments MA, MB, MC et calcule la longueur l = MA+MB+MC. Définis aussi les angles α=AMB, β=BMC et γ=AMC
Observe le nombre l lorsque M se promène dans le triangle ABC.
Essaie de placer M pour que l soit le plus petit possible. Observe alors les mesures des 3 angles α, β et γ. Remarques-tu quelque chose ?

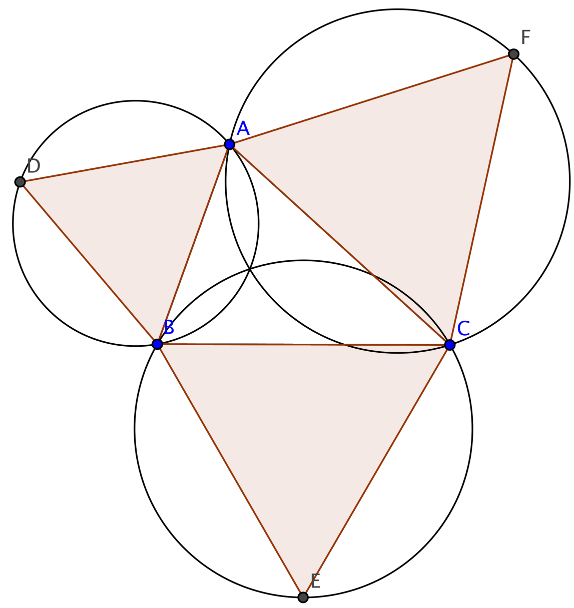
Les mathématiciens ont prouvé que l est minimal quand les trois angles mesurent 120°.

Etant donné un triangle ABC, le point M tel que MA+MB+MC soit minimal porte le nom de point de Fermat ou de point de Torricelli du triangle. C'est le point qui voit chaque côté sous un angle de 120°.

3. Une construction du point de Torricelli

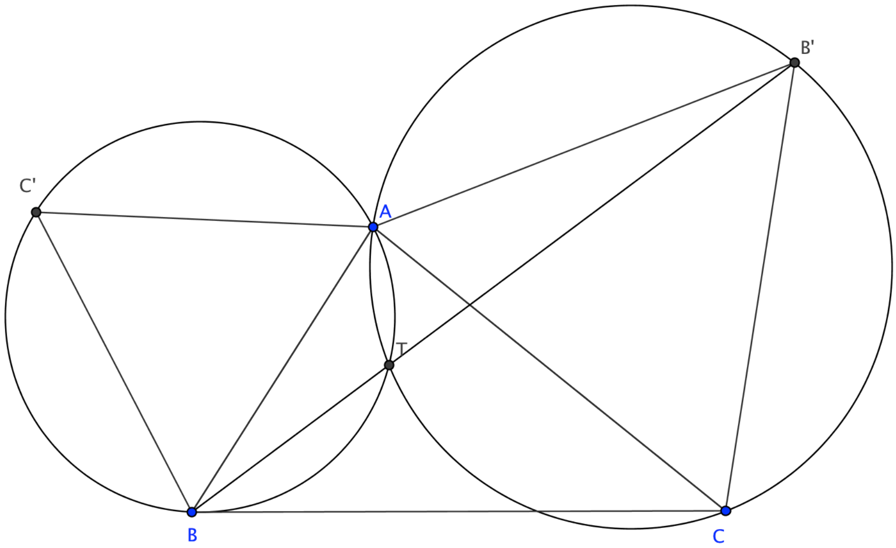
Cette construction peut être réalisée sur papier ou avec un logiciel de construction géométrique

Trace un triangle ABC. dont tous les angles soient plus petits que 120
Construis C' tel que le triangle AC'B soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à AC'B.
Construis B' tel que le triangle AB'C soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à AB'C.
Construis A' tel que le triangle BA'C soit équilatéral et à l'extérieur de ABC. Trace le cercle circonscrit à BA'C.
Que vois tu ?



4. Une autre construction du point de Torricelli

Reprenons la figure ci-dessus, avec deux des cercles circonscrits et T leur point d'intersection.
On peut démontrer l'alignement des points B, T et B' avec des outils de la classe de troisième.



En effet, l'angle B'TA mesure 60° (angle inscrit interceptant le même arc que ACB') et l'angle ATB mesure 120° (angle inscrit interceptant un angle au centre de 360 – 120 = 240°).
Cela fournit une construction simple du point de Torricelli comme point d'intersection de (BB') et (CC') ou de (BB') et (AA') ou de (CC') et (AA').

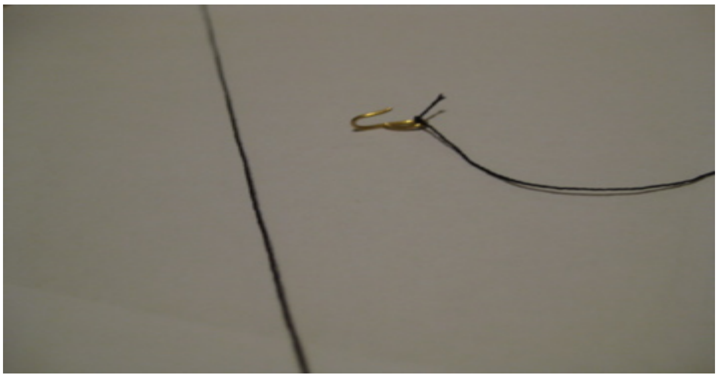
5. Des démonstrations

Il est sans doute frustrant pour un enseignant de mathématiques de ne pas disposer de démonstration du théorème énoncé ci-dessus à la fin du paragraphe 2. Nous vous indiquons deux pistes, utilisables avec des élèves qui seraient vraiment très motivés…
*Pour une démonstration **purement géométrique**, on consultera avec profit l'article de Wikipedia :*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_de_Fermat
qui donne une jolie démonstration utilisant le théorème de Viviani ainsi qu'une démonstration utilisant les rotations.
*Pour une démonstration accessible en TS, et utilisant les **nombres complexes**, on peut se rendre sur la page :* http://www.math.u-psud.fr/~pansu/explosion_continue_en_classe.html

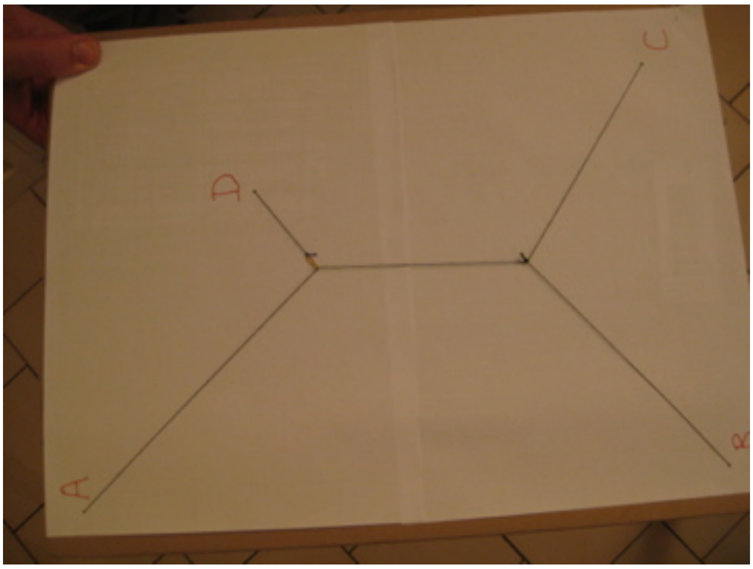
Avec quatre poids, avec quatre points

1. Equilibre entre 4 poids

Cette manipulation prolonge celle proposée au début du paragraphe précédent.
Reprenons le carton et ses trois trous, avec les ficelles et les poids d'Aïcha, Bruno et Claire.
David fait un quatrième trou, il prend un quatrième poids, attaché à une quatrième ficelle, qu'il fait passer dans son trou. Il attache un petit crochet en fil de fer mince à sa ficelle, et s'en sert pour accrocher sa ficelle à l'une des ficelles déjà en place. Que voit on à l'équilibre ? On mesure soigneusement les longueurs des ficelles visibles sur le carton, et on additionne leurs longueurs. On recommence en attachant la ficelle de David successivement aux deux autres fils. Dans quel cas obtient on la plus petite somme des longueurs? David doit-il s'accrocher au fil d'Aïcha, de Bruno ou de Claire ?



A l'équilibre, on voit deux points (le nœud, le crochet) où trois ficelles se rejoignent en faisant des angles de 120°. Pour savoir à qui s'accrocher, il faut faire les trois expériences et comparer. Il n'y a pas de moyen général de savoir à l'avance quel score sera le plus bas.



avec quatre points, en raccrochant David au fil d'Aïcha…

2. Le problème de Steiner

Etant donnés 4 points du plan, il s'agit de les relier par des ficelles, de sorte que la longueur totale de ficelle utilisée soit la plus courte possible. La physique nous dit que ce problème est relié à celui des 4 poids: l'énergie potentielle du système de 4 poids est une fonction affine de la longueur totale de ficelle visible sur le carton.

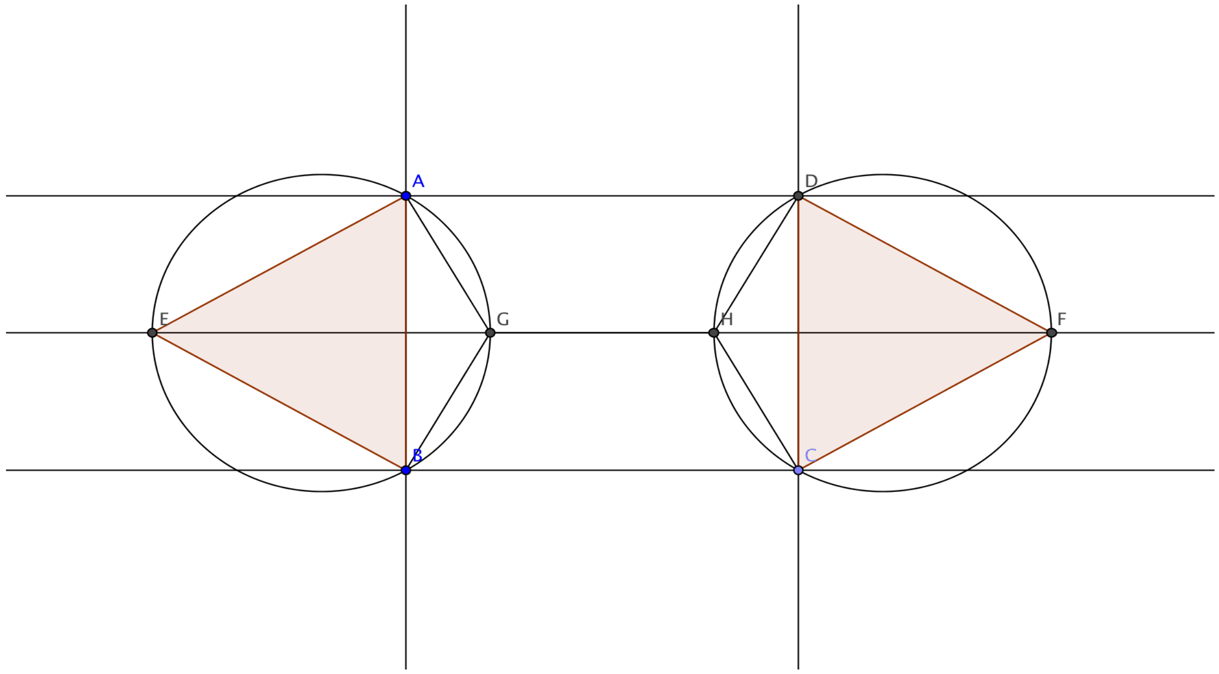
On peut réfléchir au problème de Steiner sans faire la manipulation des poids. Etant donné un quadrilatère ABCD, comment joindre les quatre points A, B, C et D par des fils en minimisant la longueur totale de ces fils.

Ce problème, en se limitant au cas où ABCD est un rectangle, peut être l'objet d'une exploration de groupe en classe. Choisir les dimensions du rectangle, par exemple 20 cm sur 15 cm.
Diviser la classe en groupe. On peut orienter les élèves vers des solutions symétriques. Chaque groupe mesure et calcule la longueur totale des segments tracés pour le point M de la solution qu'il a imaginée.

L'activité être réalisée sur papier ou bien avec un logiciel de construction géométrique.

3. Une construction dans le cas du rectangle

Comment construire une solution qui respecte l'observation faite avec les poids : les ficelles font des angles de 120° entre elles ? Une astuce analogue à celle utilisée pour construire le point de Torricelli peut nous en donner l'idée.



La configuration optimale est toujours en forme de personnage (un tronc, 4 membres), mais le sens du corps (quels points d'accrochage joueront le rôle de mains ou de pieds) bascule lorsqu'on déplace les points d'accrochage. Par exemple, lorsqu'on part d'un carré et qu'on le déforme en rectangle de deux façons différentes. La topologie, dans cette situation, c'est l'information sur qui est main et qui est pied. D'autre part, la configuration optimale adopte des angles bien particuliers, c'est l'aspect plus proprement géométrique du problème. La physique (les poids) résout le problème géométrique pour chaque topologie fixée. C'est un peu l'esprit de la méthode proposée par Hadamard pour les problèmes étudiés par G. Allaire et F. Jouve, avec la même limitation de topologie fixée. Reste à trouver la topologie idéale. Les méthodes récentes résolvent les deux problèmes simultanément, de façon assez miraculeuse.

Et avec un grand nombre de points d'accrochage ?

On sait que la solution a toujours l'aspect d'un arbre trivalent : une racine qui se divise en deux branches, qui se subdivisent à leur tour en deux branches, etc.. Mais il y a de multiples façons d'accrocher un arbre à un ensemble de N points du plan (lorsque N=4, il y en avait 2 seulement). Autrement dit, un très grand nombre de topologies possibles (un nombre exponentiel en N). Pour N un peu grand, aucun programme d'ordinateur ne peut les explorer toutes en temps à échelle humaine.