7- Le théorème du soufflet
Une activité pour le collège

Bien des branches des mathématiques sont nées de problèmes concrets et très anciens, puis ont suivi un chemin qui leur est propre, conduisant à des ponts inattendus entre disciplines. Pour illustrer ce propos, Etienne Ghys s'est fait conteur et prestidigitateur, et nous invite à fabriquer des polyèdres déformables.

Les polyèdres connus des collégiens, dont toutes les faces sont rigides (les faces des polyèdres, pas les faces des collégiens), sont eux-mêmes rigides. C'est normal, les polyèdres étudiés dans les programmes sont convexes et Cauchy a démontré que tout polyèdre convexe est rigide. Il a fallu attendre la fin du $20^{\text{ème}}$ siècle pour que les mathématiciens découvrent un polyèdre aux faces rigides qui soit flexible. Construire le patron d'un tel polyèdre exige soin et précision.

1. Dessiner le patron et réaliser un polyèdre flexible (collège)

Le patron du flexidron de Steffen (tel est son nom) se compose de quatorze triangles et présente un axe de symétrie. Le modèle de patron est donné en ANNEXE.
Le mathématicien Etienne Ghys nous indique que les longueurs des côtés, dans une unité de notre choix, doivent être 5, 10, 11, 12 et 17.
Pour que ton patron tienne dans une feuille de papier standard, il te faut choisir des mesures en centimètres proportionnelles à ces données. Complète le tableau de proportionnalité ci-dessous.

Côté	a	b	c	d	e
Unité « Ghys »	5	10	11	12	17
En centimètres	3,5				

Prends une feuille de papier un peu rigide (Canson ou mieux, bristol) et construis soigneusement, à l'aide du compas, le patron avec les mesures que tu viens de calculer pour a, b, c, d et e. Ensuite, il te faut marquer soigneusement les plis « vallée » qui sont en pointillés sur le modèle et dans l'autre sens les plis « montagne » qui sont en traits pleins. Fais jouer les plis avant de coller. Colle ensuite très soigneusement les languettes, dans l'ordre indiqué par les numéros que nous avons fait figurer.

Le polyèdre non convexe ainsi fabriqué se déforme (un peu) sous la pression des doigts.

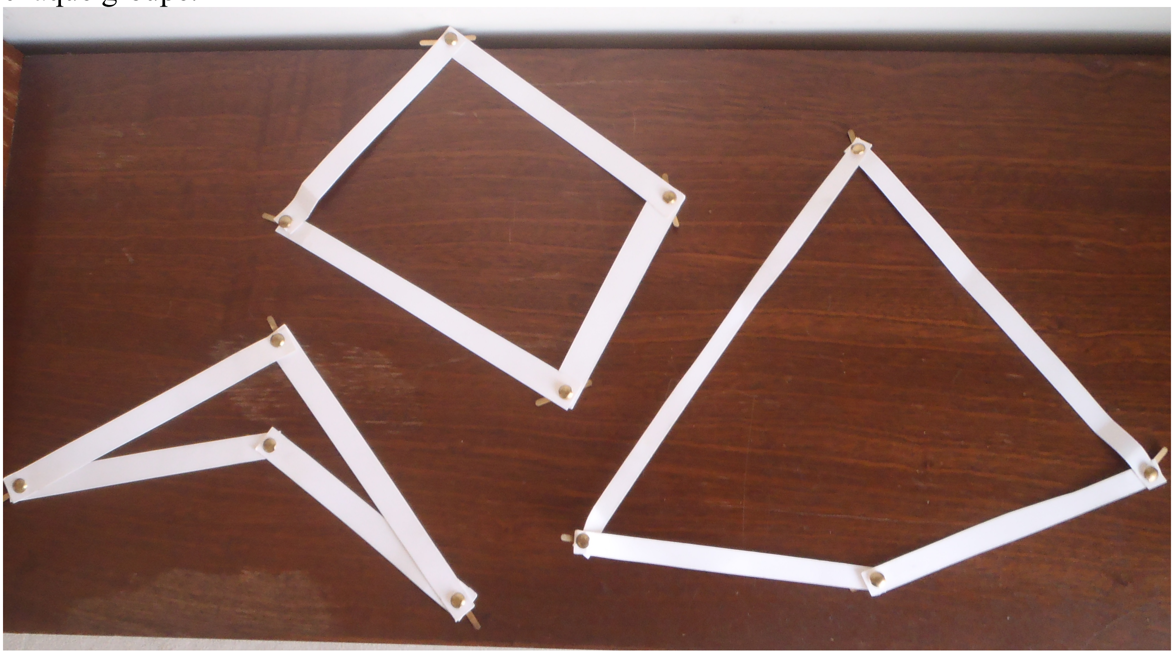
2. Aire des polygones dans le plan (collège)

Quel serait l'analogue du problème des polyèdres flexibles dans le plan ? Ce serait d'étudier des polygones dont on pourrait changer la forme (les angles, par exemple) sans changer les longueurs des côtés.
Pour le triangle, c'est raté. Un triangle de côtés donnés n'est pas déformable.
Il est facile de vérifier qu'un quadrilatère dont les côtés sont donnés est toujours flexible.
Cela se vérifie expérimentalement à l'aide de bandes de papier et d'attaches parisiennes.
Cela se voit aussi en dessinant plusieurs quadrilatères non superposables ayant pourtant les mêmes

mesures de côtés.
Le théorème du soufflet affirme que le volume d'un polyèdre flexible reste constant. Dans le plan, son analogue devient un problème concernant les polygones : l'aire d'un polygone varie t-elle lorsqu'on déforme le polygone ?

Voici une proposition d'activité de classe à réaliser en groupes.

Préparer un quadrilatère articulé différent, avec bandes de papier et attaches parisiennes pour chaque groupe.



On relève les longueurs des côtés du quadrilatère du groupe. Chaque élève du groupe pose ensuite le quadrilatère sur une feuille de papier blanc en essayant d'enserrer la plus grande aire. Il retrace le quadrilatère sur sa feuille blanche et en calcule l'aire (en mesurant les longueurs nécessaires).

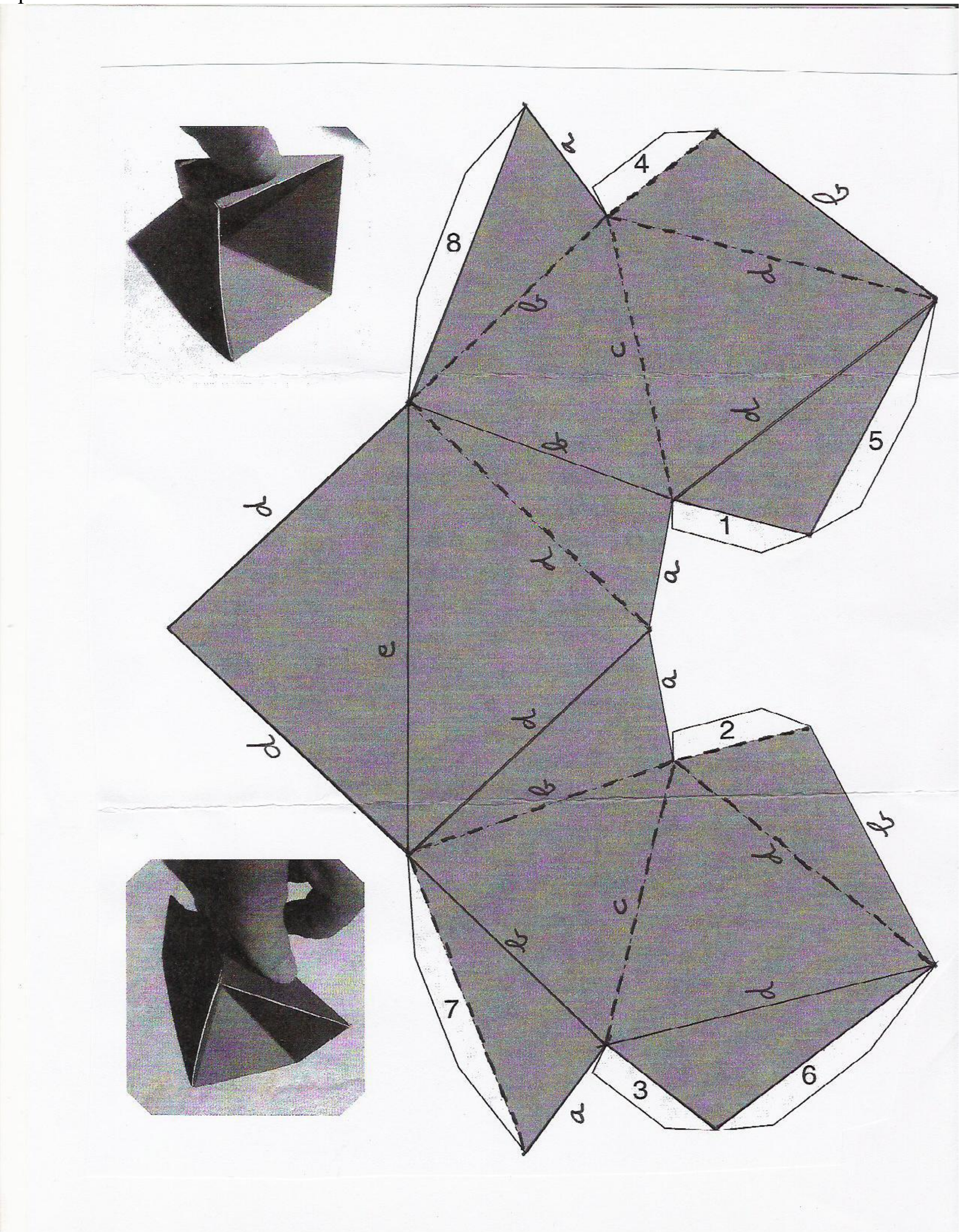
Le gagnant de chaque groupe est celui qui obtient la plus grande aire.
On s'intéresse à ce quadrilatère qui semble avoir la plus grande aire possible.
En mesurant ses angles, il y a quelque chose à remarquer !

Un théorème affirme que, lorsqu'on déforme un quadrilatère, l'aire est maximale lorsque le quadrilatère est inscrit dans un cercle. Dans la manipulation proposée, on peut remarquer que les angles opposés sont supplémentaires, ce qui est une caractérisation de l'inscriptibilité du quadrilatère dans un cercle. Cette propriété peut d'ailleurs se démontrer facilement dans un sens (si inscriptible, alors angles opposés supplémentaires), avec des outils de la classe de cinquième. La réciproque est plus délicate.

3. Exercice en prolongement : aire d'un quadrilatère d'une famille particulière

On s'intéresse à une famille de quadrilatères. Dans cette famille, ils ont toujours deux côtés qui mesurent 10 cm et deux côtés qui mesurent 5cm.
Dessine divers quadrilatères de la famille. Détermine l'aire maximale d'un quadrilatère de la famille et dessine deux quadrilatères différents dont l'aire atteint cette aire maximale.

ANNEXE : patron du polyèdre de Steffen
reproduit ici avec l’aimable autorisation d’ACL Editions



source : Hypercube n°57, Juin-Juillet 2004 Le flexidron de Steffen par Dominique Souder et Francis Dupuis