4- La restauration de vieux films
Une activité pour primaire, collège, lycée

Les appareils photos, les images numériques font partie de notre quotidien. Mais au fait, « numérique » vient de « nombre » : comment associer des nombres aux images? Et quelle est l'utilité de numériser ainsi les images ?

Intéressons nous aux images noir et blanc pour une première approche.
Une image numérique noir et blanc est une grille rectangulaire divisée en carrés (les pixels). A chaque carré, on associe un nombre entier qui indique le caractère plus ou moins sombre du carré, du blanc au noir, en passant par tous les gris. Ce nombre est appelé niveau de gris et varie entre 0 et 255 en général.

1- Niveaux de gris
Pour comprendre le principe de la numérisation, voici un petit coloriage à proposer.

Sur du papier quadrillé à petits carreaux, trace un rectangle de 12 carreaux sur 8 carreaux (le côté de 12 carreaux étant horizontal). Repère les lignes par des nombres de 1 à 8 et les colonnes par des lettres de A à L.
Le nombre 0 désigne une case blanche. Le nombre 1 une case grisée (au crayon à papier). Le nombre 2 correspond à une case noire (au feutre)
Les cases B1, C2, D4, E2, F1, K3 sont de niveau 2, les cases C1, E1, C3, D3, E3, F4, F5, F6, F7, F8, G4, G5, H4, H5, I4, I5, J4, J5, J6, K7, L6 sont de niveau 1 et le reste des cases de niveau 0. Fais apparaître l'image ainsi « numérisée » dans ton rectangle.

Avec 256 niveaux de gris au lieu de 3 dans cet exemple, et beaucoup plus de pixels, c'est ainsi qu'on décrit une image noir et blanc. Une image noir et blanc est ainsi donnée par le tableau des nombres (les niveaux de gris) associés à chacun des carreaux (les pixels).

2- Des images au film
Un film est un ensemble d'images qui, quand elles se succèdent rapidement reconstituent l'impression du mouvement. En général, il faut 24 images pour une seconde de film. Calcule combien d'images contient un film d'une heure et demie.

Si chacune de ces images est traduite par un tableau de nombres, on voit bien qu'il y a là un grand nombre de données que seul un ordinateur peut traiter. L'intérêt de cette numérisation est de permettre la conservation des images et leur transformation, ce que permettaient mal les procédés chimiques d'impression de la pellicule des débuts du cinéma.

3- Des nombres aux moyennes
Les vieux films en noir et blanc sont souvent abîmés. Par exemple, une image peut être devenue globalement plus sombre que celles qui la précèdent et la suivent. D'où un effet de clignotement, qui peut se corriger grâce aux mathématiques. L'idée est simple : pour chaque pixel de chaque image, on modifie son niveau de gris en le comparant à celui qu'il avait dans les dix images précédentes et les dix suivantes. Mais, en corrigeant un niveau de gris, il faut éviter de changer la nature de l'image. Ce qui se fait en conservant le rang de niveau de gris

de chaque pixel de l'image : le pixel le plus sombre doit rester le plus sombre une fois l'image corrigée.
Pour faire cette correction, les mathématiciens ont dû utiliser une notion de moyenne originale, qui s'apparente à la moyenne harmonique des géomètres.
C'est l'occasion de revenir avec nos élèves sur la moyenne arithmétique et de les initier aux moyennes géométriques et harmoniques, notions à la portée des collégiens de troisième et des lycéens.
Cette activité travaille sur des nombres a et b positifs

a) moyenne arithmétique de 2 nombres

a et b étant deux nombres positifs, leur moyenne arithmétique m est définie par $m = \frac{a+b}{2}$
Elle intervient dans le domaine familier des notes.

Sylvain a eu 9 à l'écrit et 14 à l'oral. Calcule la moyenne de ses deux notes. S'il avait eu la même moyenne mais avec la même note à l'oral et à l'écrit, quelle aurait été cette note ?
Et s'il avait eu 18 à l'oral, quelle note d'écrit lui aurait suffi pour avoir la même moyenne ? Les 2 copains de Sylvain ont eu la même moyenne que lui, avec des notes toutes différentes. Imagine les notes qu'ont pu avoir ses deux amis.

b) moyenne géométrique de 2 nombres

Nicolas a hérité d'un terrain rectangulaire qui mesure 36m sur 9m. Pour lui, cette aubaine est l'occasion de construire une maison. Toutefois, la forme allongée du terrain ne s'y prête pas. Sa sœur Pimprenelle, qui elle a hérité d'un champ carré situé dans le même village accepte de l'échanger avec le sien. En effet, les deux champs ont exactement la même surface. Combien mesure le côté du champ carré de Pimprenelle?

Plus généralement, si un rectangle de côtés a et b doit avoir la même aire qu'un carré de côté c, alors c est la moyenne géométrique de a et b.

c) moyenne harmonique de 2 nombres

- un piège classique

Une voiture effectue un trajet aller et retour Paris-Marseille (800 km). Sa vitesse moyenne à l'aller a été de 80km/h et sa vitesse moyenne au retour a été de 100 km/h. Quelle a été sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet ?

- la moyenne harmonique de 2 nombres a et b strictement positifs est le nombre m défini par $\frac{2}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Exprime *m* en fonction de *a* et *b*.
Calcule la moyenne harmonique de 80 et 100.

- Une voiture effectue un trajet aller et retour. Sa vitesse moyenne à l'aller a été de v_1 km/h et sa vitesse moyenne au retour a été de v_2 km/h. Démontre que sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est la moyenne harmonique de v_1 et v_2.

La notion de moyenne qui est utilisée dans les algorithmes de correction de contrastes d'images détériorées quand on restaure de vieux films s'inspire de la moyenne harmonique.

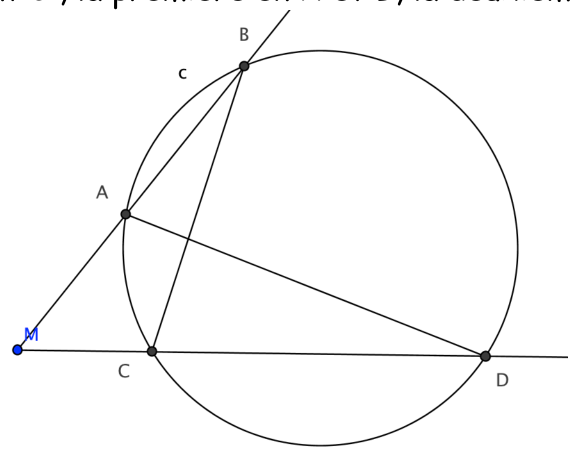
4- Interprétation géométrique de ces différentes moyennes

a) moyenne arithmétique

Marque sur une droite graduée le point A d'abscisse 9 et le point B d'abscisse 14. Marque le milieu M de [AB]. Quelle est l'abscisse de M ?

b) moyenne géométrique

Soit *C* un cercle et M un point situé à l'extérieur de *C*. Trace deux droites passant par M et coupant *C* , la première en A et B, la deuxième en C et D.

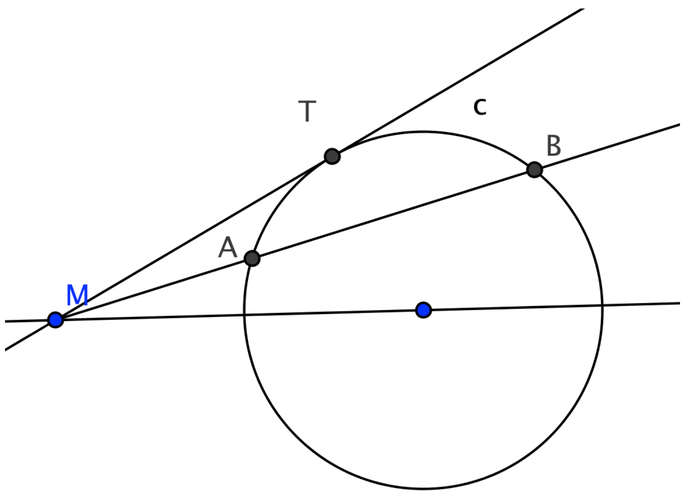


a) Démontre que les triangles MBC et MAD ont les mêmes angles.
b) De ce fait, ces deux triangles sont un agrandissement l'un de l'autre (ils sont « semblables ») et les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.
Place dans la deuxième ligne du tableau les noms des côtés qui se correspondent.

Triangle MBC	MB	MC	BC
Triangle MAD			

c) Utilise la proportionnalité ci-dessus pour montrer que MA×MB=MC×MD
Ainsi le produit des longueurs MA×MB est le même pour toutes les demi-droites issues de M et coupant le cercle *C* .(la valeur obtenue s'appelle la *puissance* du point M par rapport à *C*).

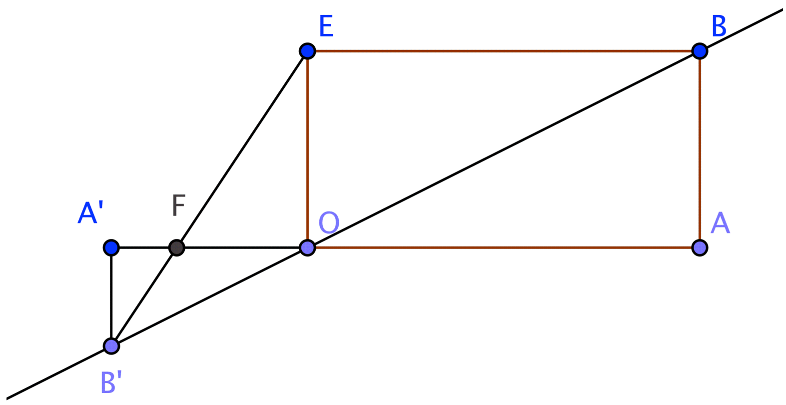
d) Lorsque la demi-droite issue de M est tangente en T au cercle *C,* on peut la voir comme un cas particulier dans lequel les points A et B sont confondus et les longueurs MA et MB égales (et valant toutes les deux MT).



Complète l'égalité MT^2= × .
Utilise cette propriété pour construire géométriquement un segment dont la mesure soit la moyenne géométrique de 4 et 9.

c) moyenne harmonique

Soient a et a' deux longueurs dont on cherche à représenter géométriquement la moyenne harmonique.
Soit [OA] un segment de longueur a et A' le point de la demi-droite [AO) tel que OA'= a' .Tracer la droite d perpendiculaire à [AA'] en A et la droite d' perpendiculaire à [AA'] en A'. Choisir un point B sur d. (OB) coupe d' en B'.
Construire E, quatrième sommet du rectangle OABE, et F, point d'intersection de (EB') avec (AA').
En utilisant la propriété de Thalès dans deux paires de triangles bien choisis de la figure, trouve deux quotients différents égaux à $\frac{A'B'}{AB}$ (cela aide de ne pas oublier que AB=EO).
Combine les égalités écrites pour démontrer que : $\frac{1}{OA}+\frac{1}{OA'}=\frac{1}{OF}$
Explique pourquoi la moyenne harmonique de a et a' est la moitié de OF.



Cette figure est utilisée en optique géométrique. Elle permet de construire l'image A'B' de l'objet AB par un dispositif optique (lentille,...) placé en O et de distance focale OF.

Des enseignants qui souhaiteraient approfondir l'étude des différentes moyennes trouveront en se rendant sur la page :
http://www.math.u-psud.fr/~pansu/explosion_continue_en_classe.html
des propositions concernant l'ordre dans lequel sont rangées les trois moyennes.