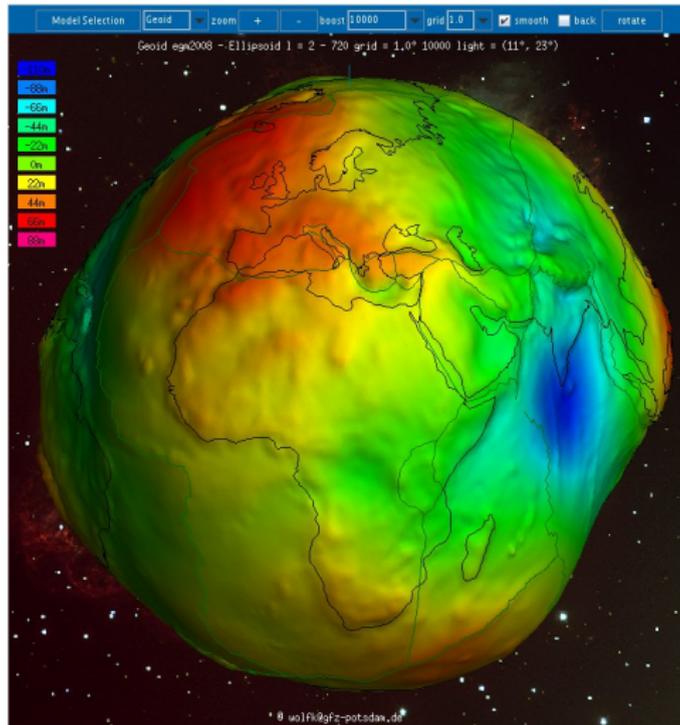


La Figure de la Terre

P. Pansu, Université Paris-Sud

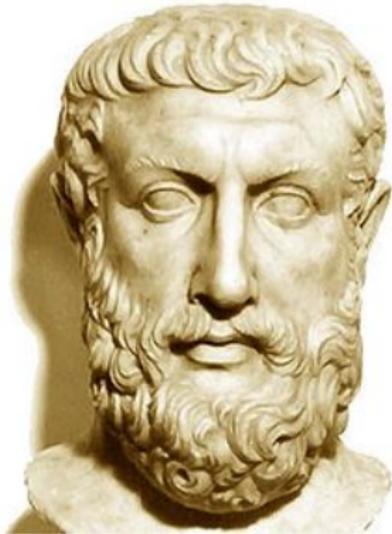
12 octobre 2013

La Terre est-elle ronde ?
La Terre est-elle un ellipsoïde ?
La Terre est un peu cabossée
Un jour, une brève



La Terre est-elle ronde ?
La Terre est-elle un ellipsoïde ?
La Terre est un peu cabossée
Un jour, une brève

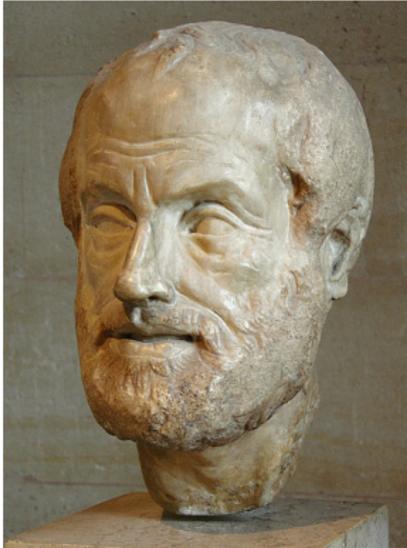
La Terre est sphérique
La méthode d'Eratosthène
La Terre ne serait plus ronde ?



Parménide d'Elée (Italie)

En occident, Terre sphérique = école pythagoricienne (VIe siècle avant J.C.) ?

Attesté : Parménide (vers 470 avant J.C.). La Terre est sphérique et flotte librement dans le vide.



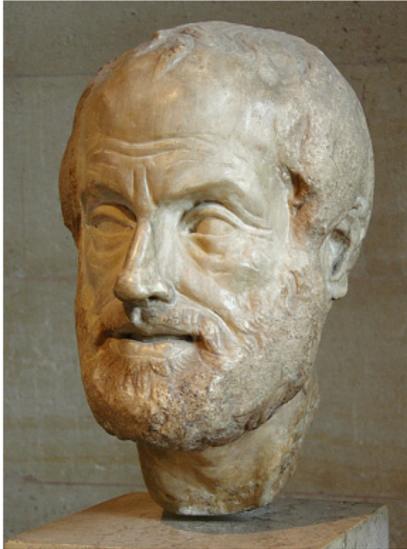
Aristote de Stagire (Macédoine)

En occident, Terre sphérique = école pythagoricienne (VI^e siècle avant J.C.) ?

Attesté : Parménide (vers 470 avant J.C.). La Terre est sphérique et flotte librement dans le vide.

Aristote (IV^e siècle) argumente : ombre de la Terre sur la Lune, apparition de nouvelles étoiles lorsqu'on se déplace vers le nord ou le sud. Il donne une valeur trop élevée du rayon terrestre (Eudoxe ?), qu'Archimède (III^e siècle) diminue.

Eratosthène (III/II^e siècle) donne une valeur du rayon qui diffère de peu de la vraie.



Aristote de Stagire (Macédoine)

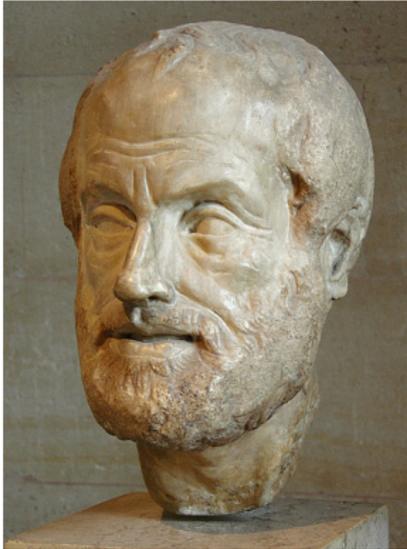
En occident, Terre sphérique = école pythagoricienne (VI^e siècle avant J.C.) ?

Attesté : Parménide (vers 470 avant J.C.). La Terre est sphérique et flotte librement dans le vide.

Aristote (IV^e siècle) argumente : ombre de la Terre sur la Lune, apparition de nouvelles étoiles lorsqu'on se déplace vers le nord ou le sud. Il donne une valeur trop élevée du rayon terrestre (Eudoxe ?), qu'Archimède (III^e siècle) diminue.

Eratosthène (III/II^e siècle) donne une valeur du rayon qui diffère de peu de la vraie.

Question. Et dans d'autres cultures ? Inde ? Chine ?



Aristote de Stagire (Macédoine)

En occident, Terre sphérique = école pythagoricienne (VI^e siècle avant J.C.) ?

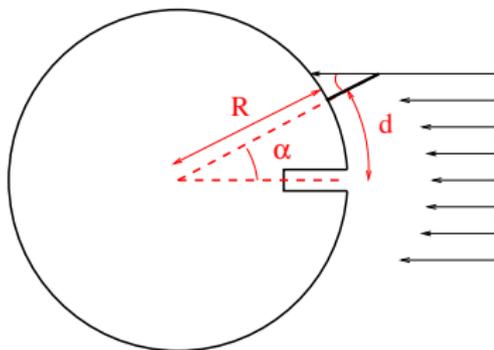
Attesté : Parménide (vers 470 avant J.C.). La Terre est sphérique et flotte librement dans le vide.

Aristote (IV^e siècle) argumente : ombre de la Terre sur la Lune, apparition de nouvelles étoiles lorsqu'on se déplace vers le nord ou le sud. Il donne une valeur trop élevée du rayon terrestre (Eudoxe ?), qu'Archimède (III^e siècle) diminue.

Eratosthène (III/II^e siècle) donne une valeur du rayon qui diffère de peu de la vraie.

Question. Et dans d'autres cultures ? Inde ? Chine ?

Réponse. Pas de documents anciens à ce sujet.



Le raisonnement d'Eratosthène

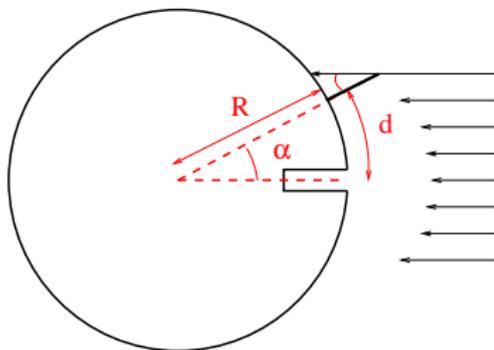


Eratosthène de Cyrène (Lybie)

Le jour du solstice, soleil au zénith à Syène (Assouan, Egypte), $\alpha = 7,2$ degrés au dessous du zénith à Alexandrie (sur le même méridien). Une évaluation de la distance $d = 5000$ stades (= 787 km) entre Syène et Alexandrie donne

$$R = \frac{d}{\alpha} = 40000 \text{ stades} (= 6300 \text{ km}).$$

La même méthode sera utilisée jusqu'au XIXème siècle.



Le raisonnement d'Eratosthène



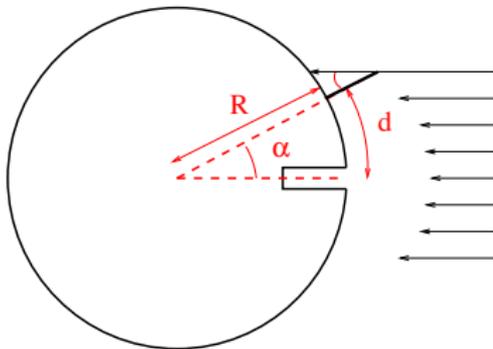
Eratosthène de Cyrène (Lybie)

Le jour du solstice, soleil au zénith à Syène (Assouan, Egypte), $\alpha = 7,2$ degrés au dessous du zénith à Alexandrie (sur le même méridien). Une évaluation de la distance $d = 5000$ stades (= 787 km) entre Syène et Alexandrie donne

$$R = \frac{d}{\alpha} = 40000 \text{ stades} (= 6300 \text{ km}).$$

La même méthode sera utilisée jusqu'au XIX^{ème} siècle.

Question. Cette valeur du rayon terrestre sera t'elle adoptée par la postérité ?



Le raisonnement d'Eratosthène



Eratosthène de Cyrène (Lybie)

Le jour du solstice, soleil au zénith à Syène (Assouan, Egypte), $\alpha = 7,2$ degrés au dessous du zénith à Alexandrie (sur le même méridien). Une évaluation de la distance $d = 5000$ stades (= 787 km) entre Syène et Alexandrie donne

$$R = \frac{d}{\alpha} = 40000 \text{ stades} (= 6300 \text{ km}).$$

La même méthode sera utilisée jusqu'au XIXème siècle.

Question. Cette valeur du rayon terrestre sera t'elle adoptée par la postérité ?

Réponse. NON. C'est une valeur bien inférieure, calculée au siècle suivant par Posidonius d'Apamée (Syrie).

En Chine, au VIII^{ème} siècle après J.-C., Yi Xing (moine bouddhiste formé à l'astronomie indienne) mesure le méridien à diverses latitudes avec une bonne précision et constate des variations.

En occident, en 1672, Jean Richer constate qu'une horloge exacte à Paris se met à retarder de 2 mn 30 s par jour quand on la transporte à Cayenne.



Huygens et Newton s'attachent à en donner une explication. Pesanteur apparente plus faible, en raison de la force centrifuge.

En Chine, au VIII^{ème} siècle après J.-C., Yi Xing (moine bouddhiste formé à l'astronomie indienne) mesure le méridien à diverses latitudes avec une bonne précision et constate des variations.

En occident, en 1672, Jean Richer constate qu'une horloge exacte à Paris se met à retarder de 2 mn 30 s par jour quand on la transporte à Cayenne.



Huygens et Newton s'attachent à en donner une explication. Pesanteur apparente plus faible, en raison de la force centrifuge.

Question. Qu'est ce que Richer allait faire à Cayenne ?

En Chine, au VIII^{ème} siècle après J.-C., Yi Xing (moine bouddhiste formé à l'astronomie indienne) mesure le méridien à diverses latitudes avec une bonne précision et constate des variations.

En occident, en 1672, Jean Richer constate qu'une horloge exacte à Paris se met à retarder de 2 mn 30 s par jour quand on la transporte à Cayenne.



Huygens et Newton s'attachent à en donner une explication. Pesanteur apparente plus faible, en raison de la force centrifuge.

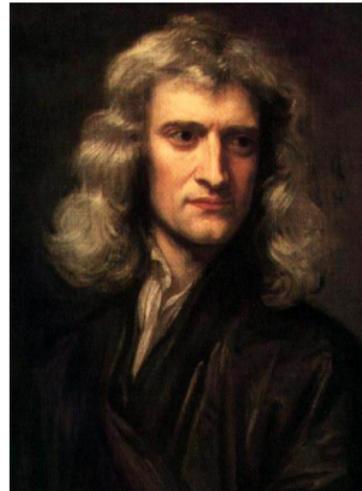
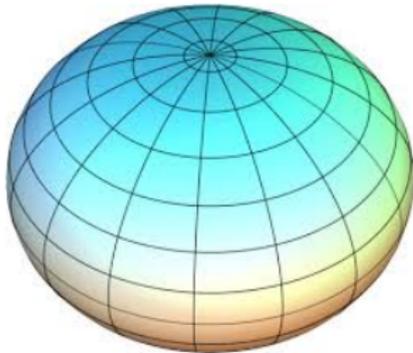
Question. Qu'est ce que Richer allait faire à Cayenne ?

Réponse. Il était parti mesurer la distance de la Terre à mars et au Soleil.

1687 : Newton prédit qu'une masse fluide en rotation prend la forme d'un ellipsoïde de révolution oblate : figure formée par une ellipse qui tourne autour de son plus petit axe.

Il donne une valeur de l'aplatissement
(la différence relative des deux axes)

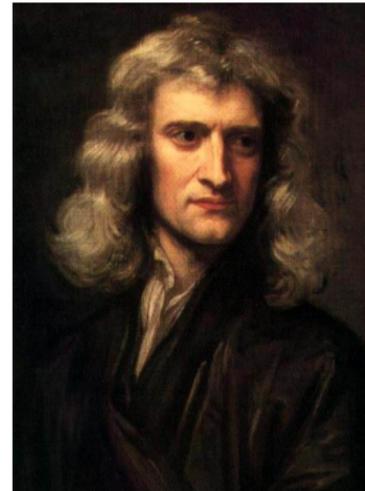
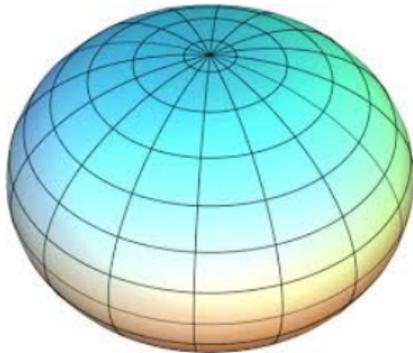
$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{230}.$$



1687 : Newton prédit qu'une masse fluide en rotation prend la forme d'un ellipsoïde de révolution oblate : figure formée par une ellipse qui tourne autour de son plus petit axe.

Il donne une valeur de l'aplatissement
(la différence relative des deux axes)

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{230}.$$

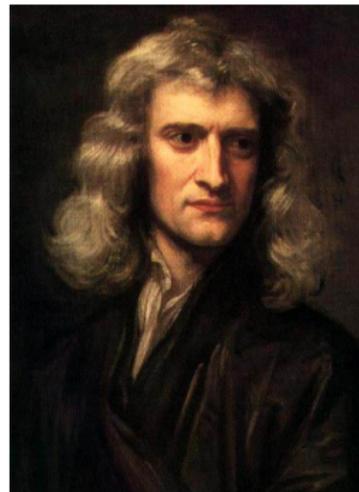
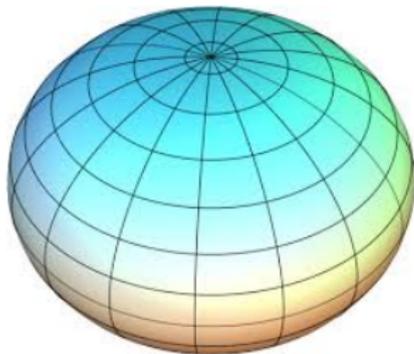


Question. Peut-on vraiment considérer la Terre comme fluide ?

1687 : Newton prédit qu'une masse fluide en rotation prend la forme d'un ellipsoïde de révolution oblate : figure formée par une ellipse qui tourne autour de son plus petit axe.

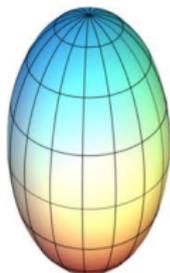
Il donne une valeur de l'aplatissement
(la différence relative des deux axes)

$$\frac{a - b}{a} = \frac{1}{230}.$$



Question. Peut-on vraiment considérer la Terre comme fluide ?

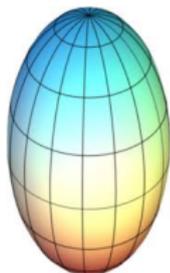
Réponse. OUI. Aux échelles de temps géologiques, les roches coulent.



En France, les mesures de Picard (1670) et Cassini (1718) semblent indiquer le contraire : la Terre serait plutôt en forme de cigare ?

1735 : l'Académie des Sciences lance deux expéditions, en Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius) et en Equateur (Bodin, Bouguer, La Condamine, Jussieu). Une aventure incroyable ! (lire Le Procès des Etoiles, de F. Trystram).

Résultat : la Terre est aplatie, aplatissement $\frac{1}{178}$.



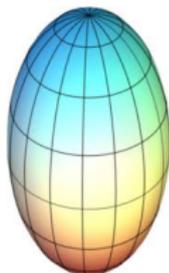
En France, les mesures de Picard (1670) et Cassini (1718) semblent indiquer le contraire : la Terre serait plutôt en forme de cigare ?

1735 : l'Académie des Sciences lance deux expéditions, en Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius) et en Equateur (Bodin, Bouguer, La Condamine, Jussieu). Une aventure incroyable ! (lire Le Procès des Etoiles, de F. Trystram).

Résultat : la Terre est aplatie, aplatissement $\frac{1}{178}$.

Mesures incompatibles avec la théorie : au cours du XVIIIème siècle, controverses et travaux intenses.

Fin XVIIIème siècle : Laplace recoupe les données (géométrie, gravimétrie, précession des équinoxes) et tranche pour $\frac{1}{300}$. Ce sont les mesures de Laponie qui sont erronées. D'où des expéditions supplémentaires, sous la Révolution (Delambre, Méchain), puis encore au début du XXème siècle.



En France, les mesures de Picard (1670) et Cassini (1718) semblent indiquer le contraire : la Terre serait plutôt en forme de cigare ?

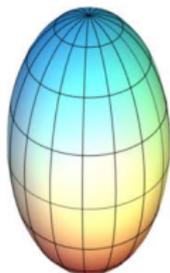
1735 : l'Académie des Sciences lance deux expéditions, en Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius) et en Equateur (Bodin, Bouguer, La Condamine, Jussieu). Une aventure incroyable ! (lire Le Procès des Etoiles, de F. Trystram).

Résultat : la Terre est aplatie, aplatissement $\frac{1}{178}$.

Mesures incompatibles avec la théorie : au cours du XVIIIème siècle, controverses et travaux intenses.

Fin XVIIIème siècle : Laplace recoupe les données (géométrie, gravimétrie, précession des équinoxes) et tranche pour $\frac{1}{300}$. Ce sont les mesures de Laponie qui sont erronées. D'où des expéditions supplémentaires, sous la Révolution (Delambre, Méchain), puis encore au début du XXème siècle.

Question. Les autres planètes sont elles aplaties ?



En France, les mesures de Picard (1670) et Cassini (1718) semblent indiquer le contraire : la Terre serait plutôt en forme de cigare ?

1735 : l'Académie des Sciences lance deux expéditions, en Laponie (Maupertuis, Clairaut, Celsius) et en Equateur (Bodin, Bouguer, La Condamine, Jussieu). Une aventure incroyable ! (lire Le Procès des Etoiles, de F. Trystram).

Résultat : la Terre est aplatie, aplatissement $\frac{1}{178}$.

Mesures incompatibles avec la théorie : au cours du XVIIIème siècle, controverses et travaux intenses.

Fin XVIIIème siècle : Laplace recoupe les données (géométrie, gravimétrie, précession des équinoxes) et tranche pour $\frac{1}{300}$. Ce sont les mesures de Laponie qui sont erronées. D'où des expéditions supplémentaires, sous la Révolution (Delambre, Méchain), puis encore au début du XXème siècle.

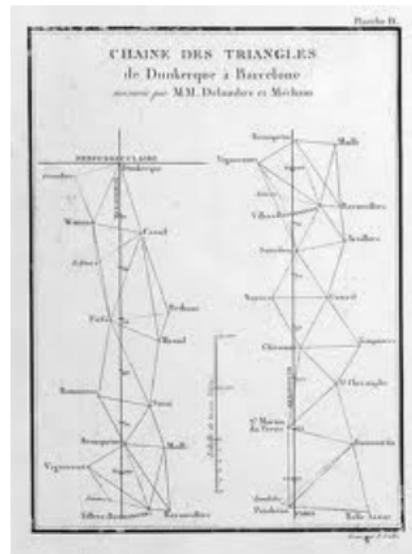
Question. Les autres planètes sont elles aplaties ?

Réponse. OUI. Jupiter a un aplatissement de $\frac{1}{10}$.

Suivant une idée de G. Frisius (XVII^{ème} siècle), pour mesurer de longues distances, on triangule.



On mesure à la toise une distance de l'ordre de 10 km entre deux points élevés, puis on mesure des angles. Ensuite, on utilise des formules de trigonométrie plane (Pythagore...) et leurs analogues sphériques (Abu Nasr Mansur) pour calculer les longueurs de tous les côtés.

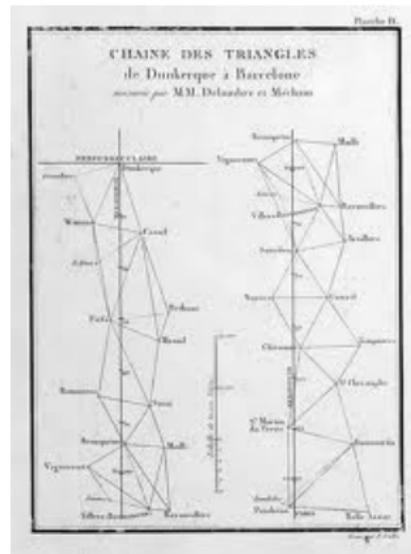


Suivant une idée de G. Frisius (XVII^{ème} siècle), pour mesurer de longues distances, on triangule.



On mesure à la toise une distance de l'ordre de 10 km entre deux points élevés, puis on mesure des angles. Ensuite, on utilise des formules de trigonométrie plane (Pythagore...) et leurs analogues sphériques (Abu Nasr Mansur) pour calculer les longueurs de tous les côtés.

Question. Mais si la Terre n'est pas sphérique, les calculs sont faux ?



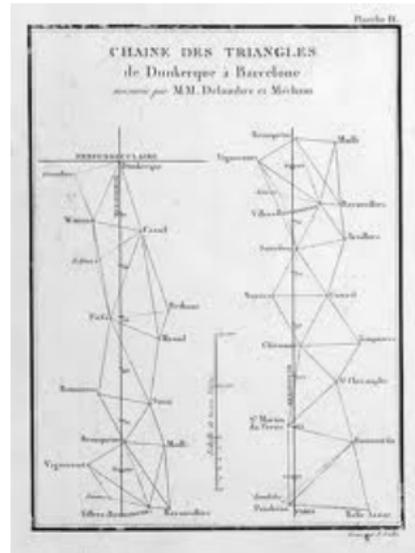
Suivant une idée de G. Frisius (XVII^{ème} siècle), pour mesurer de longues distances, on triangule.



On mesure à la toise une distance de l'ordre de 10 km entre deux points élevés, puis on mesure des angles. Ensuite, on utilise des formules de trigonométrie plane (Pythagore...) et leurs analogues sphériques (Abu Nasr Mansur) pour calculer les longueurs de tous les côtés.

Question. Mais si la Terre n'est pas sphérique, les calculs sont faux ?

Réponse. OUI. Mais la Terre est presque une sphère, Legendre a donné la formule pour faire la correction nécessaire.



1687 : Newton calcule l'aplatissement qu'aurait un ellipsoïde de révolution homogène en rotation.

1737 : Clairaut (alors en Laponie) montre qu'un ellipsoïde dont la densité est variable (strates ellipsoïdales) a un aplatissement $< \frac{1}{230}$ (contradictoire avec les mesures faites ultérieurement en Laponie).

1741 : MacLaurin démontre qu'un ellipsoïde de révolution homogène tournant est effectivement en équilibre.

1773 : D'Alembert : pour les vitesses de rotation faibles, il y a deux valeurs de l'aplatissement qui garantissent l'équilibre.

1687 : Newton calcule l'aplatissement qu'aurait un ellipsoïde de révolution homogène en rotation.

1737 : Clairaut (alors en Laponie) montre qu'un ellipsoïde dont la densité est variable (strates ellipsoïdales) a un aplatissement $< \frac{1}{230}$ (contradictoire avec les mesures faites ultérieurement en Laponie).

1741 : MacLaurin démontre qu'un ellipsoïde de révolution homogène tournant est effectivement en équilibre.

1773 : D'Alembert : pour les vitesses de rotation faibles, il y a deux valeurs de l'aplatissement qui garantissent l'équilibre.

Question. Une forme en équilibre possède t'elle forcément une symétrie de révolution ?

1687 : Newton calcule l'aplatissement qu'aurait un ellipsoïde de révolution homogène en rotation.

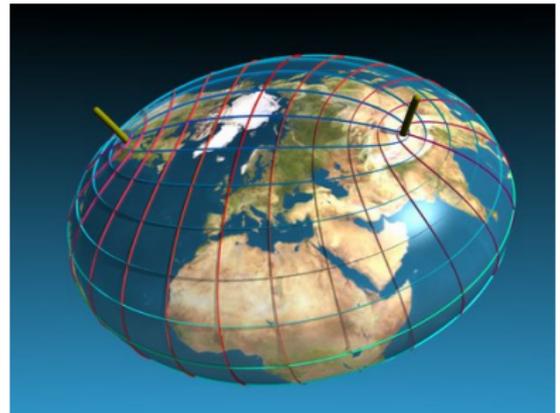
1737 : Clairaut (alors en Laponie) montre qu'un ellipsoïde dont la densité est variable (strates ellipsoïdales) a un aplatissement $< \frac{1}{230}$ (contradictoire avec les mesures faites ultérieurement en Laponie).

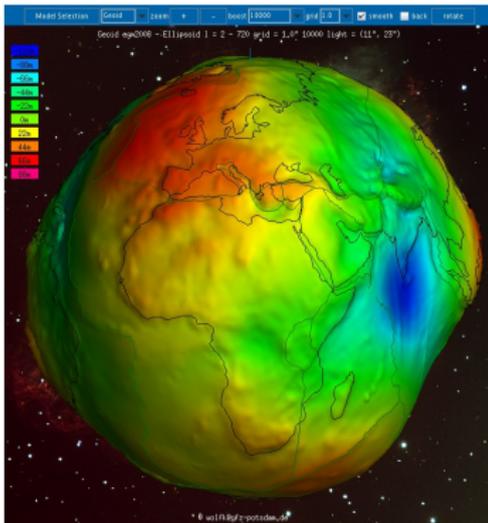
1741 : MacLaurin démontre qu'un ellipsoïde de révolution homogène tournant est effectivement en équilibre.

1773 : D'Alembert : pour les vitesses de rotation faibles, il y a deux valeurs de l'aplatissement qui garantissent l'équilibre.

Question. Une forme en équilibre possède-t-elle forcément une symétrie de révolution ?

Réponse. NON. 1834 : Jacobi démontre que certains ellipsoïdes homogènes qui ne possèdent pas la symétrie de révolution sont aussi en équilibre.



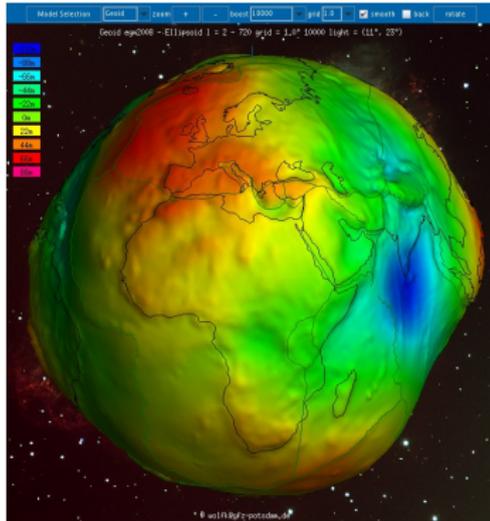


Géoïde : lieu des points à altitude zéro. Altitude zéro = équipotentielle (surface partout orthogonale au champ de pesanteur).

En première approximation : hauteur moyenne de l'océan, ou de l'eau dans un canal qui serait relié à l'océan.

Ellipsoïde de référence : Ellipsoïde de révolution conventionnel, voisin du géoïde.

Milieu du XX^{ème} siècle : Le géoïde ne diffère jamais de l'ellipsoïde de référence de plus de 100m, soit 1/100000^{ème} du rayon terrestre.



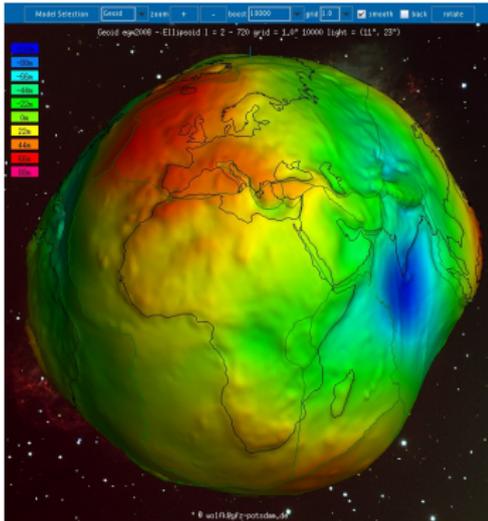
Géoïde : lieu des points à altitude zéro. Altitude zéro = équipotentielle (surface partout orthogonale au champ de pesanteur).

En première approximation : hauteur moyenne de l'océan, ou de l'eau dans un canal qui serait relié à l'océan.

Ellipsoïde de référence : Ellipsoïde de révolution conventionnel, voisin du géoïde.

Milieu du XX^{ème} siècle : Le géoïde ne diffère jamais de l'ellipsoïde de référence de plus de 100m, soit 1/100000^{ème} du rayon terrestre.

Question : Où se trouve le point de la Terre le plus éloigné du centre ?



Géoïde : lieu des points à altitude zéro.
Altitude zéro = équipotentielle (surface partout orthogonale au champ de pesanteur).

En première approximation : hauteur moyenne de l'océan, ou de l'eau dans un canal qui serait relié à l'océan.

Ellipsoïde de référence : Ellipsoïde de révolution conventionnel, voisin du géoïde.

Milieu du XX^{ème} siècle : Le géoïde ne diffère jamais de l'ellipsoïde de référence de plus de 100m, soit 1/100000^{ème} du rayon terrestre.

Question : Où se trouve le point de la Terre le plus éloigné du centre ?

Réponse : Au sommet du volcan Chimborazo, en Equateur.

Fin du XXème siècle :

- 1 Mise en évidence de la dérive des continents : l'Atlantique s'élargit de 2,5cm par an.
- 2 Les bosses et creux du géoïde
 - reflètent les fonds marins,
 - renseignent sur la composition du sous-sol profond
- 3 L'observation du niveau de l'océan (télémètre embarqué sur un satellite) fait apparaître les courants, les variations de température, de salinité de la mer.

Pour cela, il faut mesurer latitudes, longitudes et altitudes au cm près.

Fin du XXème siècle :

- 1 Mise en évidence de la dérive des continents : l'Atlantique s'élargit de 2,5cm par an.
- 2 Les bosses et creux du géoïde
 - reflètent les fonds marins,
 - renseignent sur la composition du sous-sol profond
- 3 L'observation du niveau de l'océan (télémètre embarqué sur un satellite) fait apparaître les courants, les variations de température, de salinité de la mer.

Pour cela, il faut mesurer latitudes, longitudes et altitudes au cm près.

Question : Comment mesurer la Terre avec une telle précision ?

Fin du XXème siècle :

- 1 Mise en évidence de la dérive des continents : l'Atlantique s'élargit de 2,5cm par an.
- 2 Les bosses et creux du géoïde
 - reflètent les fonds marins,
 - renseignent sur la composition du sous-sol profond
- 3 L'observation du niveau de l'océan (télémètre embarqué sur un satellite) fait apparaître les courants, les variations de température, de salinité de la mer.

Pour cela, il faut mesurer latitudes, longitudes et altitudes au cm près.

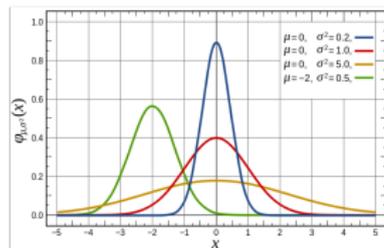
Question : Comment mesurer la Terre avec une telle précision ?

Réponse : Observation des trajectoires des satellites.

- ① Aux XVIIIème et XIXème siècles, la géodésie a été un consommateur massif de calculs.
Pour cartographier le royaume de Hanovre, Gauss aurait effectué lui-même 1 million de calculs à la main. Pour cela, il invente un algorithme de **résolution des systèmes d'équations linéaires** comme

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 4y = 5 \end{cases} .$$

- ② La géodésie s'est interrogée sur les moyens de réduire les erreurs de mesure. Moteur pour le développement du **calcul des probabilités** (approximation par la loi normale, Laplace 1810), et première utilisation de la **méthode statistique** (Laplace 1818).



- ③ Pour savoir quelles corrections faire dans les calculs de géodésie pour prendre en compte la figure de la Terre, C.-L. Gauss a inventé la notion de **courbure des surfaces**, qui l'a conduit à la **géométrie non euclidienne** (Bolyai, Lobatchevski).

J'ai appris tout cela dans les brèves suivantes : <http://mpt2013.fr/>

- ① 22 janvier : Géoïde, ellipsoïde et autres mots compliqués (E. Ghys)
- ② 20 février : Querelle franco-anglaise autour de la forme de la Terre (E. Ghys)
- ③ 6 mai : Des poires en rotation (F. Chambat, E. Ghys)
- ④ 13 mai : Alexis Clairaut, 300 ans d'un mathématicien ou d'un géophysicien ? (F. Chambat)
- ⑤ 10 mai : Mesurer la Terre : Gauss et la théorie des surfaces (R. Tazzioli)
- ⑥ 15 juillet : Des triangles pour se repérer sur Terre (F. Chambat, E. Ghys)
- ⑦ 19 juillet : Des triangles pour vérifier la gravitation universelle (F. Chambat, E. Ghys)
- ⑧ 2 septembre : De solides marées (F. Chambat, E. Ghys)
- ⑨ 5 septembre : La Terre a du potentiel (B. Philippe)
- ⑩ 12 septembre : Un repère pour référencer les déformations de la Terre (X. Collilieux)