Feuille d'exercices n°3 : Réseaux électriques, résistance équivalente, et identité du temps de transport.

Exercice 1. [Un professeur mouillé ?] Chaque jour, un professeur londonien se rend a son bureau le matin, et revient à sa maison le soir (home, sweet home). Le professeur dispose d'un stock important de n parapluies, dont certains sont à sa maison et les autres à son bureau. Lorsqu'il pleut, le professeur prend un parapluie et le transporte avec lui. S'il ne pleut pas en revanche, il ne prend pas de parapluie, si bien que le nombre de parapluies à la maison et au bureau varie avec le temps. On notera X_t le nombre de parapluies stockés à sa maison au matin du jour $t \in \mathbb{N}$. On supposera que les épisodes de pluie sont indépendants entre le matin et le soir, et d'un jour à l'autre également, et qu'ils adviennent avec probabilité $p \in (0,1)$.

1. Préciser l'espace d'état de la chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et dessiner sur cet espace d'état les transitions de la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$.
2. Construire un réseau dont la marche aléatoire associée est cette chaîne de Markov, et déterminer son unique mesure de probabilité stationnaire.

Correction. *L'espace d'état est $V = \{0, 1, \dots, n\}$ et il compte $n+1$ éléments. Concernant les probabilités de transition, on commence par les deux cas du bord :*

$$P(0,0) = 1-p, P(0,1) = p; \quad P(n,n-1) = p(1-p), P(n,n) = 1-p(1-p).$$

et pour $i \in \{1,\dots,n-1\}$

$$P(i,i+1) = P(i,i-1) = p(1-p), P(i,i) = 1-2p(1-p)$$

Pour trouver les conductances, on commence par calculer $\pi(i)$ au moyen de l'équation de réversibilité :

$$\pi(i)P(i,i+1) = \pi(i+1)P(i+1,i),$$

On obtient, après calculs :

$$\pi(0) = \frac{c(0)}{\sum_{0\le i\le n} c(i)} = \frac{1-p}{n+1-p} \text{ et } \pi(i) = \frac{1}{n+1-p}$$

Puis on en déduit les conductances par $c(i,j) = \pi(i)P(i,j)$ (cours) :

$$c(0,0) = \frac{(1-p)^2}{n+1-p}; \quad c(n,n) = \frac{1-p(1-p)}{n+1-p}; \quad c(i,i) = \frac{1-2p(1-p)}{n+1-p} \text{ si } i \in \{1,\dots,n\}$$

en enfin

$$c(i,i+1) = c(i+1,i) = \frac{p(1-p)}{n+1-p}$$

Notons qu'on peut multiplier toutes ces quantités par une même constante, sans changer la marche aléatoire sur le réseau. Multiplions par $\frac{n+1-p}{p(1-p)}$ par exemple : cela donne le jeu de conductances suivant :

$$\tilde{c}(i,i+1) = c(i+1,i) = 1$$

puis

$$\tilde{c}(0,0) = \frac{(1-p)}{p}; \quad \tilde{c}(n,n) = \frac{1}{p(1-p)} - 1; \quad \tilde{c}(i,i) = \frac{1}{p(1-p)} - 2$$

Après on peut se demander ici pourquoi la chaine est réversible (hormis le fait que l'énoncé le suggérait, quelle est l'intuition dans ce cas ?). L'idée de base est que dans un graphe sans cycle, on peut toujours résoudre de proche en proche l'équation de réversibilité.

Il est intéressant de réfléchir aux deux cas limites $p \to 0$ et $p \to 1$ (on ne peut pas mettre $p = 0$ ou $p = 1$ car alors la chaine limite est deterministe) en observant le comportement de π en 0 dans les deux cas.

Une autre question intéressante concernant cet exercice est la fraction du temps où le professeur se retrouve mouillé dans ses déplacements, lorsqu'on fait tendre $t \to \infty$ à nombre de parapluies n fixé.

Exercice 2. Soit deux réels $p, q \in]0,1[$ tels que $p + q = 1$. On considère la marche aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ biaisée[1] sur le graphe induit par $\mathbb{Z}$ sur $\{0, 1, \ldots, n\}$, de matrice de transition :

$$P(x,y) = p\mathbf{1}_{\{y=x+1\}} + q\mathbf{1}_{\{y=x-1\}} \text{ si } x \in \{1,\ldots,n-1\}, y \in \{0,\ldots,n\}$$

On rappelle que $\tau_x = \min\{t \geq 0 : X_t = x\}$ désigne le temps d'atteinte de x. On pose $h(x) = \mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ pour $x \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Calculer $h(x)$ à l'aide de la méthode utilisée pour résoudre la ruine du joueur (dite méthode à un pas).
2. Construire un réseau dont la marche aléatoire associée est la chaîne de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$
3. Soit $x \in \{1, \ldots, n-1\}$. Calculer les résistances équivalentes $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)$ et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow n)$ dans ce réseau.
4. Interpréter $\mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ comme la tension au sommet x dans ce réseau électrique pour des valeurs des tensions aux bornes que l'on précisera, et retrouver la valeur de $h(x)$.

Correction. *Pour la méthode classique, le système d'équations est :*

$$h(x) = ph(x+1) + qh(x-1), \quad x \in \{1, \ldots, n-1\}$$

et $h(0) = 0, h(1) = 1$. On s'attend avoir $h(x)$ fonction croissante de p, avec bien sûr $h(x) = x/n$ dans le cas $p = q = 1/2$; vérifions-le.

D'abord, le polynôme caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{q}{p}$ dont les deux racines sont $\{1, \frac{q}{p}\}$ donc, dans le cas $q \neq p$ où les deux racines sont distinctes on peut écrire : $h(x) = a + b(\frac{q}{p})^x$; les données des conditions au bord donnent un système 2×2 :

$$\begin{cases} a + b & = 0 \\ a + b(\frac{q}{p})^n & = 1 \end{cases}$$

ce qui implique $b((\frac{q}{p})^n - 1) = 1$ et donne finalement :

$$h(x) = \frac{(\frac{q}{p})^x - 1}{(\frac{q}{p})^n - 1}.$$

1. on dit que la marche est biaisée lorsque p et q sont distincts de $1/2$, heuristiquement cela signifie qu'il existe une direction privilégiée pour la marche aléatoire

On vérifie que les valeurs en $x = 0$ et $x = n$ correspondent bien au résultat attendu.

Deux méthodes pour trouver le réseau (presque équivalentes il est vrai) :

1. *ou bien on commence par calculer π de proche en proche grace a l'équation de reversibilité, comme fait à l'exercice précédent, puis on pose $c(x, y) = \pi(x)P(x, y)$.*
2. *ou bien on observe que l'on doit avoir*

$$c(x+1, x+2)/p = c(x, x+1)/q$$

   par définition des probabilités de transition locales a partir de i, ce qui donne $c(x, x+1) = (p/q)^x c(0, 1)$, et quitte à choisir $c(0, 1) = 1$, $c(x, x+1) = (p/q)^x$ tout simplement; dans ce cas on retrouve π via la formule $\pi(x) = c(x)/\sum_{i=0}^{n} c(x)$.

Dans la suite on travaille avec les conductances $c(x, x+1) = (p/q)^x$, c'est-à-dire avec les résistances $r(x, x+1) = (q/p)^x$. On calcule maintenant les résistances équivalentes demandées

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) = \sum_{y=0}^{x-1} (\frac{q}{p})^y = \frac{(\frac{q}{p})^x - 1}{\frac{q}{p} - 1}$$

puis

$$\mathcal{R}(x \leftrightarrow n) = \sum_{y=x}^{n-1} (\frac{q}{p})^y = (\frac{q}{p})^x \frac{(\frac{q}{p})^{n-x} - 1}{\frac{q}{p} - 1} = \frac{(\frac{q}{p})^n - (\frac{q}{p})^x}{\frac{q}{p} - 1}$$

Maintenant $W(x) = \mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0)$ est la tension en x dans le réseau électrique précisé lorsque $W(0) = 0$, et $W(n) = 1$; à ce moment la on peut simplement dire que le réseau de sommets $0, x, n$ et d'areêtes $\{0, x\}$ et $\{x, n\}$ de conductances respectives $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)$ et $\mathcal{R}(x \leftrightarrow n)$ sont équivalents dans le sens où les tensions (definies par leurs valeurs aux bords en 0 et en n) coïncident en x, puis en déduire la valeur de la tension voulue en x Détaillons ceci :

$$W(0) - W(x) = \mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) I(\vec{0x})$$
$$W(x) - W(n) = \mathcal{R}(x \leftrightarrow n) I(\vec{xn})$$

mais la loi des noeuds assure que $I(\vec{0x}) = I(\vec{xn})$ une quantité simplement notée I dans la suite. Ainsi :

$$-W(x) = W(0) - W(x) = \mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) I$$
$$-1 = W(0) - W(n) = (\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(x \leftrightarrow n)) I$$

ce qui donne :

$$W(x) = \frac{\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)}{\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(x \leftrightarrow n)}$$

On aboutit bien dans les deux cas au même résultat, et on évalue ensuite cette quantité comme suit :

$$\mathbb{P}_x(\tau_n < \tau_0) = \frac{\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x)}{\mathcal{R}(0 \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(x \leftrightarrow n)} = \frac{(\frac{q}{p})^x - 1}{(\frac{q}{p})^n - 1}$$

Dans ce cas il est plus compliqué de raisonner par la méthode dite à un pas qu'à l'aidedes conductances. Neanmoins, des lors qu'on modifie localement quelques transitions, il est plus commode d'utiliser la méthode des conductances.

Dans ce cas de figure, il est certes plus compliqué de travailler avec les conductances, car la résolution du système obtenu à l'aide de la méthode à un pas était immédiate. Néanmoins, les méthodes de transformation des réseaux sont robustes au petits changements locaux (si je modifier une conductance par exemple) ; c'est bcp moins clair pour le système d'équations.

Exercice 3. On considère le graphe induit par l'ensemble de sommets $V = \{0,1,2\}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$, soit un carré de côté 2. Chacune des arêtes est munie d'une résistance unité.

1. Calculer en exploitant les symétries du graphe et au moyen de réductions successives du réseau l'extension harmonique de la fonction $f : V \to \mathbb{R}$ avec $f((0,0)) = 0$ et $f((2,2)) = 1$.
2. Calculer aussi la résistance équivalente $\mathcal{R}((0,0),(2,2))$ dans ce réseau.

Correction. *Il s'agit de se ramener à une suite de résistances en série en mettant à profit les symétries du modèle. On remarque tout d'abord que tous les sommets sur les mêmes diagonales (définies par rapport aux deux sommets de référence, c'est-à-dire comme les sommets de même norme* 1*) ont même potentiel ; on peut donc identifier ces sommets ; on se retrouve avec les sommets* $\{0,1,2,3,4\}$ *numérotés par norme* ℓ^1*. Pour des raisons de symétrie, on se limite aux seuls sommets* $\{0,1,2\}$ *et l'on note que le potentiel en* 0 *vaut* 0 *et en* 2 *vaut* $1/2$ *(par symétrie). Il suffit donc de trouver le potentiel en* 1*. Les résistances associées aux deux arêtes* $\{0,1\}$ *et* $\{1,2\}$ *sont respectivement* $1/2$ *et* $1/4$*. Le potentiel en* 1 *vaut donc*

$$\frac{0 \times 1/4 + 1/2 \times 1/2}{1/2 + 1/4} = \frac{1}{3}.$$

(On peut aussi repasser aux conductances pour avoir exactement la définition d'une fonction harmonique). Les sommets de norme 3 ont potentiel $2/3$ *par symétrie du modèle. Calculons l'intensité du courant en* $a = (2,2)$ *:*

$$\|I\| = \sum_x I(\vec{ax}) = 2 \cdot 1/3$$

donc la résistance équivalente entre $z = (0,0)$ *et* $a = (2,2)$ *vaut alors*

$$\mathcal{R}(a \leftrightarrow z) = \frac{U(a) - U(z)}{\|I\|} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Exercice 4. Reprendre l'exercice 3 avec le carré de côté 3 cette fois.

Correction. *La stratégie est la même que pour le carré de côté 2, avec des calculs un peu plus compliqués. On a une symétrie orthogonale par rapport à l'axe* $x + y = 3$*, et donc les sommets qui sont en correspondance via cette symmétrie (à savoir les sommets de coordonnées* (x, y) *et* $(3 - y, 3 - x)$*) ont des potentiels qui somment à* 1 *; en particulier les sommets sur cet axe sont en correspondance avec eux-mêmes et leurs potentiels somment à* 1*, donc leur potentiel vaut* $1/2$ *; on s'intéresse désormais aux sommets* (x, y) *avec* $0 < x + y < 3$*. Il y a 5 tels sommets et parmi ceux-ci, on a deux paires de sommet qui se correspondent par la symétrie orthogonale d'axe* $x = y$ *:* $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *mais aussi* $(2,0)$ *et* $(0,2)$*. Ces sommets ont même potentiel ; on peut donc les identifier ; il reste donc 3 inconnues à déterminer qui sont les potentiels de ces 3 sommets (*$A = (1,0)$*,* $B = (1,2)$ *et* $C = (1,2)$*après identification.*

On montre que le potentiel en A vaut

$$\frac{\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2}+1}=\frac{7}{26}$$

puis le potentiel en B :

$$\frac{\frac{7}{26}\cdot 1\cdot+\frac{1}{2}\cdot 2}{1+2}=\frac{11}{26}$$

et enfin le potentiel en C :

$$\frac{\frac{7}{26}\cdot 1\cdot+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+1}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$$

La seule valeur du potentiel en A suffit à calculer la résistance équivalente (et il semble que c'est plus simple que de réduire tout le système à l'aide des règles de réduction, ce qui est une autre possibilité).

$$\mathcal{R}(a\leftrightarrow z)=\frac{W(a)-W(z)}{I(a)}=\frac{1}{\frac{7}{26}+\frac{7}{26}}=\frac{13}{7}$$

d'oú l'on tire aussi que

$$\mathbb{P}_a(\tau_a^+>\tau_z)=\frac{\mathcal{C}(a\leftrightarrow z)}{c(a)}=\frac{\frac{7}{13}}{2}=\frac{7}{26}$$

Et aussi

$$t_{a\leftrightarrow z}=\mathbb{E}_a[\tau_z]+\mathbb{E}_z[\tau_a]=\mathcal{R}(a\leftrightarrow z)c_G=\frac{13}{7}\cdot 48=\frac{624}{7}\simeq 89,14$$

d'où

$$\mathbb{E}_a[\tau_z]=44.57$$

Voila qui est surprenamment long !

Exercice 5. [Transformation Δ-Y] On considère sur l'ensemble de sommets {1,2,3} deux structures de graphes :

— le triangle tout d'abord, et on note alors c_{ij} la conductance de l'arête $\{i,j\}$

— le graphe en forme de Y si l'on ajoute un sommet annexe au milieu (le point d'intersection des trois branches du Y), et on note alors c_i la conductance de l'arête qui relie le sommet annexe à i

On cherche à déterminer les relations liant $\{c_1,c_2,c_3\}$ d'une part et $\{c_{12},c_{13},c_{23}\}$ d'autre part, pour que les deux graphes soient "équivalents".

1. En choisissant pour $\{a,z\}$ les trois couples possibles, et en exprimant que les fonctions hamoniques associées ont même valeur en l'unique point libre, prouver que

$$c_1c_{23}=c_2c_{13}=c_3c_{12}$$

2. Pour déterminer la valeur commune λ de ces 3 produits, exprimer la conductance entre les sommets $\mathcal{C}(1\leftrightarrow\{2,3\}),\mathcal{C}(2\leftrightarrow\{1,3\}),\mathcal{C}(3\leftrightarrow\{1,2\})$ et en déduire les relations :

$$\lambda=\frac{c_1c_2c_3}{c_1+c_2+c_3}=c_{12}c_{13}+c_{12}c_{23}+c_{13}c_{23}$$

Correction. *On a en prenant l'addition modulo 3, pour tout* $i \in \{1,2,3\}$

$$\frac{c_i}{c_{i+1}} = \frac{c_{i-1,i+1}}{c_{i,i+2}}.$$

Il s'ensuit que $c_i c_{i-1,i+1}$ *est une quantité constante (en la variable* $i \in \{1,2,3\}$*), notons* λ *cette constante. On observe que*

$$\frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2+c_3}} = c_{12} + c_{13}$$

ce qui implique :

$$\frac{c_1(c_2+c_3)}{c_1+c_2+c_3} = c_{12} + c_{13}$$

puis, par permutations des coordonnées et sommation :

$$\frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1+c_2+c_3} = c_{12} + c_{13} + c_{23} \tag{6}$$

On en déduit comme suit l'expression de λ *en fonction de* c_1, c_2 *et* c_3*.*

$$\frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1+c_2+c_3} = \lambda\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) = \lambda\left(\frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1c_2c_3}\right)$$

donne

$$\lambda = \frac{c_1c_2c_3}{c_1+c_2+c_3}$$

Pour obtenir l'expression de λ *en fonction de* c_{12}, c_{13} *et* c_{23} *maintenant, reprenant l'équation 6 ci-dessus, on peut obtenir aussi*

$$\begin{aligned}
c_{12} + c_{13} + c_{23} &= \frac{c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3}{c_1+c_2+c_3} \\
&= \frac{\frac{\lambda^2}{c_{23}c_{13}} + \frac{\lambda^2}{c_{23}c_{12}} + \frac{\lambda^2}{c_{13}c_{23}}}{\frac{\lambda}{c_{23}} + \frac{\lambda}{c_{13}} + \frac{\lambda}{c_{12}}} \\
&= \lambda \frac{\frac{c_{12}+c_{13}+c_{23}}{c_{12}c_{13}c_{23}}}{\frac{c_{12}c_{13}+c_{12}c_{23}+c_{13}c_{23}}{c_{12}c_{13}c_{23}}} \\
&= \lambda \frac{c_{12}+c_{13}+c_{23}}{c_{12}c_{13}+c_{12}c_{23}+c_{13}c_{23}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lambda = c_{12}c_{13} + c_{12}c_{23} + c_{13}c_{23}$$

Exercice 7. Reprendre l'exercice 3 avec le carré de côté 4 cette fois (plus délicat, nécessite la transformation Δ-Y de l'exercice 5, ainsi qu'une calculatrice).

Correction.

Exercice 8. [Temps de transport dans le n-cycle] On considère le n-cycle, c'est-à-dire le graphe de sommets $\{0, 1 \ldots, n-1\}$ où deux sommets forment une arête si $y - x \equiv 1$ modulo n ou $y - x \equiv -1$ modulo n, et on pose $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur le n-cycle.

1. Calculer $\mathbb{E}_k[\tau_0]$ à l'aide de l'identité du temps de transport.

2. Faire le lien avec la question 5 de l'exercice sur la ruine du joueur ; on rappelle qu'on avait obtenu que $\mathbb{E}_k[\tau_{\{0,n\}}] = k(n-k)$, avec $\tau_{\{0,n\}} = \min\{t \in \mathbb{N}, X_t \in \{0,n\}\}$.

Correction. *Puisque le n-cycle est un graphe transitif, l'identité du temps de transport fournit :*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_k[\tau_0] &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}_k[\tau_0] + \mathbb{E}_0[\tau_k]) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{R}(0 \leftrightarrow k)\, c_G \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}} 2n \\ &= k(n-k)\end{aligned}$$

Pour faire le lien avec l'exercice sur la ruine du joueur, il suffit d'observer que $\mathbb{E}_k(\tau_0)$ coincide avec $\tilde{\mathbb{E}}_k(\tau_0 \wedge \tau_n)$, où la seconde espérance est calculée sur le graphe de l'exercice **??**, *c'est-à-dire le graphe de sommets $\{0, \dots, n\}$ où une paire de sommets forme une arête ssi $|x-y| = 1$. Dans ce dernier graphe, si on identifie les sommets 0 et n avec le sommet 0 du premier graphe, alors les deux chaînes sont équivalentes jusqu'au premier temps d'atteinte de ce sommet.*

Exercice 9. [Temps de transport dans les chaînes de naissance et mort] Soit $\{G, c\}$ le réseau associé au graphe $V = \{0, \dots, n\}$ et

$$E = \{\{i, i+1\}, i \in \{0, \dots, n-1\}\} \cup \{\{i,i\}, i \in \{0, \dots, n\}\}$$

et on pose $c_{i,i+1} = \alpha_i$ et $c_{i,i} = \beta_i$.

1. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour la marche aléatoire sur ce réseau en fonction de la collection $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$ et $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$.

Soit la chaîne de Markov dite de naissance et mort, de matrice de transition P définie sur $V \times V$ par $P(i,j) = 0$ si $|i-j| \geq 2$ par : $p_i = P(i, i+1)$, $q_i = P(i,i)$ et $r_i = P(i, i-1)$

2. Exprimer le temps de transport $t_{0\leftrightarrow k}$ pour cette chaîne de Markov.
3. Soit $\delta \in \,]0,1[$. On pose $p_i = \delta$ et $r_i = 1-\delta$. Proposer des équivalents de $t_{0\leftrightarrow k}$ lorsque $n \to \infty$ a k fixé (on distinguera les cas $\delta < 1/2$, $\delta = 1/2$ et $\delta > 1/2$).

Correction. $t_{0\leftrightarrow k} = \mathcal{R}(0 \leftrightarrow k)c_G = (\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i^{-1})(2\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i + \sum_{i=0}^{n}\beta_i)$ *est le temps de transport entre 0 et k dans le premier réseau : ceci est une application directe de l'identité du temps de transport (on sera bien attentif à la définition de c_G, qui différencie les boucles des autres arêtes). On veut également calculer le temps de transport de la seconde chaîne de Markov. Pour cela on commence par noter que les deux chaînes sont égales si on a les identités :*

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{p_i}{r_i} : i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{q_0}{p_0} \text{ et } \frac{\beta_i}{\alpha_{i-1}} = \frac{q_i}{r_i} : i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Il nous suffit donc de poser :

$$\alpha_i = w_i\alpha_0 := (\prod_{1\leq j\leq i}\frac{p_j}{r_j})\alpha_0 : i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ et } \beta_0 = v_0\alpha_0 := \frac{q_0}{p_0}\alpha_0 \text{ et } \beta_i = v_i\alpha_0 := (\prod_{1\leq j\leq i}\frac{q_j}{r_j})\alpha_0 : i \in \{1, \dots,$$

On a donc des expressions de toutes les quantités en fonction de α_0 qui est un degré de liberté, ce qui est logique puisqu'on ne change pas la chaîne de Markov en multipliant toutes les conductances par une même constante. Ainsi

$$t_{0\leftrightarrow k} = (\sum_{i=0}^{k-1} w_i^{-1}) \cdot (2\sum_{i=0}^{n-1} w_i + \sum_{i=0}^{n} v_i)$$

On note que $p_i = \delta$ et $r_i = 1-\delta$ implique $q_i = 0$, et donc $w_i = \prod_{1\le j\le i} \frac{p_i}{r_i} = \prod_{1\le j\le i} \frac{\delta}{1-\delta} = (\frac{\delta}{1-\delta})^i$ tandis que $v_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, $v_i = \prod_{1\le j\le i} \frac{q_i}{r_i} = 0$. Au final, pour cette application :

$$t_{0\leftrightarrow k} = (\sum_{i=0}^{k-1} (\frac{\delta}{1-\delta})^{-i}) \cdot (2\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{\delta}{1-\delta})^i)$$

Dans le cas où $\delta/(1-\delta) < 1$, c'est-à-dire $\delta < 1/2$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{(\frac{1-\delta}{\delta})^k - 1}{\frac{1-\delta}{\delta} - 1} \cdot \frac{1-(\frac{\delta}{1-\delta})^k}{1-(\frac{\delta}{1-\delta})} &= 2 \cdot \frac{\delta(1-\delta)}{(1-2\delta)^2} \left((\frac{1-\delta}{\delta})^k - 1 \right) \left(1 - (\frac{\delta}{1-\delta})^n \right) \\ &= (2 + o_n(1)) \cdot \frac{\delta(1-\delta)}{(1-2\delta)^2} (\frac{1-\delta}{\delta})^k \end{aligned}$$

Dans le cas où $\delta/(1-\delta) = 1$, c'est-à-dire $\delta = 1/2$, on obtient :

$$2 \cdot k \cdot n$$

Enfin, dans le cas où $\delta/(1-\delta) > 1$, c'est-à-dire $\delta > 1/2$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} 2 \cdot \frac{1-(\frac{1-\delta}{\delta})^k}{1-(\frac{1-\delta}{\delta})} \cdot \frac{(\frac{\delta}{1-\delta})^{n+1} - 1}{\frac{\delta}{1-\delta} - 1} &= 2 \cdot \frac{\delta(1-\delta)}{(2\delta-1)^2} \cdot (1 - (\frac{1-\delta}{\delta})^k) \cdot ((\frac{\delta}{1-\delta})^n - 1) \\ &= (2 + o_n(1)) \cdot \frac{\delta(1-\delta)}{(2\delta-1)^2} \cdot (1 - (\frac{1-\delta}{\delta})^k) \cdot (\frac{\delta}{1-\delta})^n \end{aligned}$$

Ici, les $o(1)$ sont lorsque $n \to \infty$ à k fixé. On pourrait aussi étudier les cas où k dépend de n. On note donc que lorsque $\delta < 1/2$, on converge vers une constante qui dépend de façon exponentielle de k, tandis que lorsque $\delta > 1/2$, on croît exponentiellement en n la taille de l'espace d'état.

Exercice 10. Soit $x, a, z \in V^3$ trois sommets d'un réseau $\{G, c\}$. On veut montrer que

$$\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a) = \frac{\mathcal{R}(a \leftrightarrow x) - \mathcal{R}(x \leftrightarrow x) + \mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}{2\mathcal{R}(a \leftrightarrow z)}$$

1. On rappelle la notation $\tau_{a,z} = \tau_a + \tau_z \circ \theta_{\tau_a}$. Montrer qu'on a l'identité trajectorielle suivante :
$$\tau_{a,z} = \tau_z + \mathbf{1}_{\tau_z < \tau_a} \tau_{a,z} \circ \theta_{\tau_z}.$$
2. En déduire :
$$\mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] = t_{x\leftrightarrow z} + \mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
3. En déduire :
$$t_{x\leftrightarrow a} + t_{a\leftrightarrow z} - t_{x\leftrightarrow z} = 2\mathbb{P}_z(\tau_z < \tau_a)\, t_{a\leftrightarrow z}.$$
4. Conclure.

Correction. *On procède à une simple disjonction de cas*

$$\begin{aligned} \tau_{a,z} &= \tau_{a,z}(\mathbf{1}_{\tau_z > \tau_a} + \mathbf{1}_{\tau_z < \tau_a}) \\ &= \tau_z \mathbf{1}_{\tau_z > \tau_a} + (\tau_z + \tau_{a,z} \circ \theta_{\tau_z}) \mathbf{1}_{\tau_z < \tau_a} \\ &= \tau_z + \mathbf{1}_{\tau_z < \tau_a} \tau_{a,z} \circ \theta_{\tau_z} \end{aligned}$$

Il suit de la propriété de Markov forte en prenant l'espérance que

$$\mathbb{E}_x[\tau_{a,z}] = \mathbb{E}_x[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_{a,z}]\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a).$$

d'où

$$\mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] = (\mathbb{E}_x[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_x]) + \mathbb{E}_z[\tau_{a,z}]\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a) = t_{x\leftrightarrow z} + t_{a\leftrightarrow z}\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a)$$

Mais alors, en ajoutant aux deux membres $\mathbb{E}_z[\tau_x]$, on obtient, par application du lemme cyclique :

$$\begin{aligned}
t_{x\leftrightarrow a} + t_{a\leftrightarrow z} + t_{z\leftrightarrow x} &= \mathbb{E}_x[\tau_a] + \mathbb{E}_a[\tau_x] + \mathbb{E}_a[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_a] + \mathbb{E}_z[\tau_x] + \mathbb{E}_x[\tau_z] \\
&= \mathbb{E}_x[\tau_a] + \mathbb{E}_a[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_x] + \mathbb{E}_x[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_a] + \mathbb{E}_a[\tau_x] \\
&= \mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] + \mathbb{E}_x[\tau_{z,a,x}] \\
&= 2\mathbb{E}_x[\tau_{a,z,x}] \\
&= 2\mathbb{E}_x[\tau_{a,z}] + 2\mathbb{E}_z[\tau_x] \\
&= 2\left(\mathbb{E}_x[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_{a,z}]\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a)\right) + 2\mathbb{E}_z[\tau_x] \\
&= 2(\mathbb{E}_x[\tau_z] + \mathbb{E}_z[\tau_x]) + 2\mathbb{E}_z[\tau_{a,z}]\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a) \\
&= 2t_{x\leftrightarrow z} + 2t_{a\leftrightarrow z}\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$t_{x\leftrightarrow a} + t_{a\leftrightarrow z} - t_{z\leftrightarrow x} = 2t_{a\leftrightarrow z}\mathbb{P}_x(\tau_z < \tau_a)$$

comme espéré. On conclut simplement en se rappelant l'identité du temps de transport appliquée à chacun des temps de transport $t_{\cdot\leftrightarrow\cdot}$.

Exercice 11. [Résistance équivalente d'une "échelle"] On considère le graphe induit par les sommets de coordonnées

$$V_n = \{(0,j) : 0 \le j \le n\} \cup \{(1,j) : 0 \le j \le n\}$$

sur $\mathbb{Z}^2$, que l'on note G_n.

1. Supposons $n \ge 1$. Montrer que la résistance équivalente $\mathcal{R}_n$ dans le graphe G_n satisfait à
$$1/2 \le \mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)) \le 3/4.$$
2. Justifier l'existence de la limite de la suite $(\mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer cette limite lorsque $n \to \infty$.

Correction. *Pour prouver que $\mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1)) \ge 1/2$, il suffit de trouver un cutset de deux arêtes, par exemple celui issu du sommet origine $(0,0)$ (ou du somnmet $(0,1)$). Pour donner une borne supérieure sur $\mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1))$, on construit un flot. Le flot unité passant par l'arête $\{(0,0),(0,1)\}$ donne une borne supérieure égale à 1. On considère donc le flot qui passe par les arêtes d'ordonnée ≤ 1. On met un flot x sur l'arête $\{(0,0),(0,1)\}$ et $1-x$ sur les trois autres arêtes dirigées qui relient ces deux sommets. L'énergie du flot vaut alors :*

$$x^2 + 3(1-x)^2 = 4(x^2 - 6/4x + 3/4) = 4((x-3/4)^2 + 3/16) = 4(x-3/4)^2 + 3/4.$$

de minimum atteint en $3/2$ égal à $3/4$, ce qui donne donc le majorant désiré.

Posons $u_n = \mathcal{R}_n((0,0) \leftrightarrow (0,1))$ pour tout entier n. On observe que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît par le principe de Rayleigh : le graphe G_n est en effet un sous graphe de G_{n+1}, et peut donc être obtenu à partir de celui-ci en spécifiant que les résistances des arêtes manquantes dans G_n sont égales à $+\infty$.

Maintenant, pour une analyse quantitative il nous faut trouver une relation de récurrence. On l'obtient comme suit : $u_{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2+u_n}}$ On sait déjà que la limite existe, donc il suffit de trouver la valeur de la limite ℓ (on peut aussi vérifier les hypothèses du point fixe de Picard pour cette suite récurrente, mais c'est un peu plus lourd). La limite ℓ est par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\frac{1}{2+x}} = \frac{2+x}{3+x}$ un point fixe de cette fonction, et

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{2+x}} \Leftrightarrow (3+x)x = 2+x \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-3=0$$

de solutions $\pm\sqrt{3}-1$. On retient la solution positive, donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3}-1$$

Exercice 12. [Bornes sur la résistance équivalente d'un sous-réseau $\mathbb{Z}^2$] Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x|+|y| \leq n$, et G_n le graphe induit par $\mathbb{Z}^2$ sur V. On note aussi ∂B_n l'ensemble des sommets (x,y) de $\mathbb{Z}^2$ tels que $|x|+|y| = n$.

On s'intéresse à la résistance équivalente $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n)$, dont on cherche un minorant et un majorant qui ne diffèrent que d'une constante multiplicative lorsque $n \to \infty$.

1. Prouver que :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4(2k+1)}$$

   et en déduire :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \geq \frac{1}{8}\log(n).$$

2. À l'aide de l'exercice [Urne de Polya II], définir un flot θ sur les arêtes orientées de G, et en déduire la majoration :

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \leq \left(\frac{1}{6} - o(1)\right)\log(n)$$

Correction. *Les deux choix suivants de cutsets donnent le même résultat. Tout d'abord si on considère la norme ℓ^1 des sommets (celle qui associe à un sommet (x,y) la quantité $|x|+|y|$), alors on considère le cutset Π_k constitué des arêtes qui relient des sommets de norme k à des sommets de norme $k+1$; ceux-ci sont au nombre de $4\times(2k+1)$. Il faut s'arrêter à $k+1=n$, c'est-à-dire que k parcoure l'ensemble $\{0,\dots,n-1\}$ et donc*

$$\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) \geq \sum_{k+1\leq n} \frac{1}{4(2k+1)} = \frac{1}{4}\sum_{k\leq n-1}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{4}(H_{2n-1} - \frac{1}{2}H_{n-1}) \sim \frac{1}{8}\log(n)$$

On peut en fait être bien plus précis que l'équivalent final : puisque $H_n - \log(n) \to \gamma$ *la constante d'Euler, on a*

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n) &= \frac{1}{4}(H_{2n-1} - \frac{1}{2}H_{n-1}) \\
&= \frac{1}{4}(\log(2n-1) + \gamma + o(1) - \frac{1}{2}(\log(n-1) + \gamma + o(1))) \\
&= \frac{1}{8}(\log(n) + 2\log(2) + \gamma + o(1))
\end{aligned}$$

On peut aussi considérer la norme ℓ^∞ *des sommets (celle qui associe à un sommet (x,y) la quantité* $\max\{x, y\}$*), alors on considère le cutset* Π_k *dont les arêtes qui relient des sommets de norme* k *à* $k+1$ *: ces arêtes sont au nombre de* $4 \times (2k+1)$ *également, d'où la même borne exactement, et* k *parcoure le même ensemble.*

Pour la borne sup en revanche, il faut construire un flot : celui construit dans l'exercice précédent, appliqué de façon symétrique sur les quatre quandrants, a une énergie

Par Thomson, cette quantité fournit une borne supérieure pour la résistance équivalente $\mathcal{R}(0 \leftrightarrow \partial B_n)$.

Feuille d'exercices n°4 : Temps de transport et temps de couverture

Exercice 13. Soit $G = (V, E)$ un graphe, $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible sur A de matrice P et

1. Montrer que la fonction $x \mapsto h(x) = \mathbb{E}_x[\tau_A]$ satisfait les équations suivantes :

$$\begin{cases} h(x) &= 1 + \sum_y P(x,y)h(y) \quad \text{si } x \notin A, \\ h(x) &= 0 \quad \text{si } x \in A \end{cases}$$

2. Montrer que ces équations admettent une unique solution.

Exercice 14. On considère un carré de côté 2 dans le réseau $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire (par exemple) le graphe induit par l'ensemble de sommets $V = \{0,1,2\}^2$ sur $\mathbb{Z}^2$. Les arêtes sont munies d'une résistance unité.

1. Calculer en exploitant les symétries du graphe la valeur de la fonction $h(x) = \mathbb{E}_x(\tau_{(2,2)})$ en tout sommet x du graphe.

Correction. *On note $h(x,y)$ pour $h((x,y))$ pour alléger les notations. Par symétrie les sommets de coordonnée (x,y) et (y,x) ont même image par h. Maintenant, on rappelle que π la mesure stationnaire est explicite, et on peut s'en servir comme suit :*

$$12 = \frac{1}{2/24} = \frac{1}{\pi((2,2))} = \mathbb{E}_x[\tau^+_{(2,2)}] = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{(1,2)}[\tau_{(2,2)}] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_{(2,1)}[\tau_{(2,2)}] = 1 + \mathbb{E}_{(1,2)}[\tau_{(2,2)}]$$

donc $h((1,2)) = 11$.

Ensuite on observe que $h(2,0)$ et $h(1,1)$ sont égaux puisque

$$h(2,0) = h(1,1) = 1 + \frac{1}{2}(h(1,0) + h(2,1)) = 1 + \frac{1}{2}((h(1,0) + 11))$$

— *On regarde ensuite les équations associés aux deux sommets (non équivalents restants)*

$$\begin{cases} h(1,0) &= 1 + \frac{2}{3}h(2,0) + \frac{1}{3}h(0,0), \\ h(0,0) &= 1 + h(1,0) \end{cases}$$

Ainsi on a le sytème d'équations

$$\begin{cases} \frac{2}{3}h(1,0) - \frac{2}{3}h(2,0) &= \frac{4}{3}, \\ -\frac{1}{2}h(1,0) + h(2,0) &= \frac{13}{2} \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} h(1,0) - h(2,0) &= 2, \\ -h(1,0) + 2h(2,0) &= 13 \end{cases}$$

d'où $h(2,0) = 15$ et $h(1,0) = 17$ et $h(0,0) = 18$.

— *On peut aussi utiliser l'identité du temps de transport par exemple entre $(0,0)$ et $(2,2)$ pour se passer de la résolution du sytème.*

Exercice 15. [Temps de couverture du tore 1d] On considère à nouveau le n-cycle, dont on cherche maintenant à estimer/calculer le temps de couverture.

1. A l'aide des formules du temps de transport et de Matthews, donner des bornes inférieures et supérieures pour le temps de couverture du tore 1-d.
2. On pose maintenant $Y_t = |X_t|$ et $\tau_k = \min\{t \geq 0 : Y_t = k\}$. Calculer $\mathbb{E}[\tau_{k+1} - \tau_k]$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Que dire de la qualité des bornes de Matthews sur cet exemple ? Commenter.

Correction. *Avec* $H_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i}$ *la série harmonique, la borne supérieure de Matthews indique que :* $\mathbb{E}[\tau_{cov}] \leq H_n \cdot \max_{x,y} \mathbb{E}_x[\tau_y]$ *Maintenant, on a l'identité du temps de transport,* $\mathbb{E}_x[\tau_y] + \mathbb{E}_y[\tau_x] = \mathcal{R}(x \leftrightarrow y)c_G$ *et comme de plus le réseau est transitif, on a que* $\mathbb{E}_x[\tau_y] = \mathbb{E}_y[\tau_x]$. *Ainsi, notant* $d(x, y)$ *la distance de* x *à* y *on note que les deux chemins de* x *à* y *sont de longueur* $d(x, y)$ *et* $n - d(x, y)$ *(avec par définition de la distance dans un graphe,* $d(x, y) \leq n - d(x, y)$*),*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\tau_y] &= \frac{1}{2}\mathcal{R}(x \leftrightarrow y)c_G \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{R}(x \leftrightarrow y)c_G \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{d(x,y)} + \frac{1}{n-d(x,y)}}n \leq \frac{1}{2}\frac{n}{4}n \leq \frac{n^2}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi donc, $\mathbb{E}[\tau_{cov}] \leq H_n \cdot \frac{n^2}{8}$. *Pour la borne supérieure, on a que*

$$\mathbb{E}[\tau_{cov}] \geq max_{A \subset V, |A| \geq 2} H_{|A|-1} \min_{x,y \in A} \mathbb{E}_x[\tau_y]$$

On choisit les points de A *équitablement répartis. On obtient* $\ln(m-1)$

Exercice 16. Trouver un graphe G avec deux sommets distingués $\{a, z\}$ tel que le graphe ne puisse pas être "réduit", c'est-à-dire transformé en une arête entre les deux sommets $\{a, z\}$ au moyen des opérations :

1. transformation en série,
2. transformation en parallèle,
3. transformation Δ-Y,
4. élimination des arêtes dont le degré d'un des deux sommets vaut 1.

Correction. *Un graphe est planaire si on peut le dessiner dans le plan sans que ses arêtes ne se croisent (noter que les arêtes peuvent être courbes).*

Il existe une caractérisation simple des graphes planaires : un graphe est planaire s'il ne comprend pas d'extension de K_5 *le graphe complet a* 5 *sommets, ou d'extension de* $K_{3,3}$ *le graphe bipartie complet. (Par extension d'un graphe, on entend tout graphe pour lequel des réductions d'arêtes en serie permettent de retrouver le graphe de base).*

Si un graphe est planaire après une des transformations mentionnées, il l'était auparavant. Donc seuls des graphes planaires peuvent être réduits à une seule arête. Tout graphe non planaire convient donc.